

Московский центр непрерывного математического образования

## ЗАОЧНЫЙ КОНКУРС ПО МАТЕМАТИКЕ

(осень 2014, 6–8 классы)

Дорогой друг! Приглашаем тебя принять участие в заочном конкурсе по математике. Участвовать в нём может любой ученик **6–8 класса**, решивший по крайней мере пять из предлагаемых 20 задач. Для этого он должен не позднее

### 20 октября

выслать полные решения (не только ответы!) задач обычным (**не заказным**) письмом по адресу

Москва, 119002, Большой Власьевский пер., дом 11, Московский центр непрерывного математического образования, заочный конкурс, ...  
класс.

На письме должен быть указан **обратный адрес**, включая **имя** и **фамилию**. В письмо следует вложить два пустых **незаклеенных конверта с маркой**, **написав на них свой адрес**. (В одном конверте будут посланы результаты проверки и приглашение на разбор. Другой конверт может быть использован для информации о заочном конкурсе, математических кружках, олимпиадах и пр.) На каждом листе работы просим указывать **фамилию, имя, номер школы и класс**. В письмо следует вложить заполненную **карточку участника** (см. на обороте).

Справки по всем вопросам, связанным с конкурсом, можно получить по телефону (495) 945-82-16 (попросить соединить с организаторами заочного конкурса), или (это надёжнее) по электронной почте: [zmk@mcsme.ru](mailto:zmk@mcsme.ru). (**Очень просим Вас НЕ отправлять решения задач по электронной почте.**)

Информация о заочном конкурсе есть на сайте <http://www.mcsme.ru/zmk/>; в частности, на этом сайте будет указана дата разбора задач (скорее всего, это будет в декабре), а после разбора помещён список победителей конкурса.

На сайте <http://www.mcsme.ru> имеется также информация о математических кружках, олимпиадах и пр. Информацию о кружках можно получить также по телефону (499) 241-05-00.

**Желаем успеха!**

1. Можно ли нарисовать пятиугольник и точку внутри него так, чтобы любая сторона пятиугольника была видна из этой точки под углом в  $70^\circ$ ?

2. Известно, что отношение  $b/a$  находится между 1,9 и 2,1, а отношение  $b/c$  находится между 2,9 и 3,1. Каковы возможные значения отношения  $c/a$ ?

3. Числа  $a$  и  $b$  целые, при этом  $2a + 3b$  делится на 7. Докажите, что  $a + 5b$  тоже делится на 7.

4. Не пользуясь калькулятором, найдите  $\sqrt{12345678987654321}$ .

5. Разложите на множители выражение

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + x^8.$$

6. По кругу написано  $n$  чисел, при этом каждое равно среднему арифметическому (полусумме) двух своих соседей. Докажите, что все числа равны.

7. Сумма трёх различных чисел (не обязательно целых) равна 10, а разница между наибольшим и наименьшим из них равна 3. Каким может быть среднее по величине число? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

8. Можно ли замостить бесконечную плоскость (без пропусков и наложений) одинаковыми плитками, имеющими форму выпуклого пятиугольника? (Выпуклость означает, что все углы меньше  $180^\circ$ .)

9. Можно ли замостить бесконечную плоскость (без пропусков и наложений) выпуклыми семиугольниками? (В отличие от предыдущей задачи не требуется, чтобы все они были одинаковы.)

10. Фигура представляет собой половину круга: с одной стороны она ограничена диаметром, с другой стороны — полуокружностью. На границе фигуры берут две точки: одну на полуокружности, другую на диаметре. Их соединяют отрезком и отмечают середину этого отрезка. Рассматривается множество всех точек, которые можно получить таким образом. Что это за множество? Из каких участков состоит его граница?

11. В выражении

$$(a + b - c)(d + e + f - g)(p - q - r)(s + t + u)$$

раскрыли скобки. Сколько слагаемых после этого получилось? Перед сколькими из них стоит минус?

12. Найдите наименьшее положительное число  $x$ , для которого числа  $\frac{6x}{5}$  и  $\frac{10x}{7}$  одновременно целые.

13. Верёвку сложили пополам, потом ещё раз пополам, потом снова пополам, а потом разрезали в каком-то месте (сразу все нити и не на сгибе). Сколько кусочков получилось?

14. (Продолжение) Два из этих кусочков имеют длину 9 см и 4 см. Какова длина верёвки? Укажите все возможные варианты.

15. Какое число (одно и то же) надо прибавить к числителю и знаменателю дроби  $\frac{11}{41}$ , чтобы она превратилась в  $\frac{3}{8}$ ?

16. Даны две бутылки с растворами разной концентрации: в одной 0,5 литра, в другой 0,3 литра. Два одинаковых стаканчика налили доверху (каждый из своей бутылки), после чего растворы влили обратно в бутылки, поменяв их местами. В результате в обеих бутылках оказался раствор одинаковой концентрации. Найдите объём стаканчиков.

17. В некоторые клетки прямоугольной таблицы записаны числа, при этом получилось так, что для каждой строки сумма попавших в неё чисел равна 7, а для каждого столбца сумма попавших в него чисел равна 5. Каково наименьшее возможное количество чисел, записанных в таблице? Докажите, что меньшим количеством обойтись нельзя.

18. Таблица умножения чисел от 1 до 10 имеет вид прямоугольника (на пересечении  $i$ -ой строки и  $k$ -го столбца стоит произведение  $i \cdot k$ ). Найдите сумму всех чисел этой таблицы.

1	2	3	...	8	9	10
2	4	6	...	16	18	20
3	6	9	...	24	27	30
...	...	...	...	...	...	...
10	20	30	...	80	90	100

19. В углу квадратной доски размером  $100 \times 100$  клеток стоит шахматный конь. Какое минимальное количество ходов надо сделать, чтобы конь побывал на всех вертикалях и на всех горизонталях? Докажите, что меньшим числом ходов обойтись нельзя.

20. В углу квадратной доски размером  $100 \times 100$  клеток стоит шахматная ладья. Какое минимальное количество ходов надо сделать, чтобы ладья побывала на всех вертикалях и на всех горизонталях? (Те вертикали или горизонталы, которые ладья только пересекала, не останавливаясь, не учитываются.) Докажите, что меньшим числом ходов обойтись нельзя.

# КАРТОЧКА УЧАСТНИКА

заочного конкурса по математике (осень 2014)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(заполняется при проверке)									

ФАМИЛИЯ, ИМЯ _____
ИНДЕКС _____ АДРЕС _____
_____
_____
школа _____ класс _____ дом. телефон _____
(заполняется участником, <b>ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ</b> )

Заполненная карточка участника должна быть отправлена **вместе** с решениями задач. Если Вы печатаете карточку на принтере, постарайтесь сохранить масштаб (она занимает половину стандартного листа а4)