

**МФТИ, ФИВТ, осень 2010.**  
**Вопросы к экзамену по курсу**  
**Математическая логика и теория алгоритмов**  
**Д. Мусатов, А. Ромащенко.**

1. Понятия множества и принадлежности множеству. Подмножество. Операции над множествами, тождества. Пары и кортежи. Декартово произведение и декартова степень. Свойства, отношения и предикаты произвольной валентности. Отношения эквивалентности. Теорема о разбиении на классы эквивалентности.
2. Отображения и соответствия. Инъекции, сюръекции, биекции. Образ и прообраз множества при соответствии. Свойства. Композиция отображений или соответствий, её некоммутативность. Единичное отображение. Обратное соответствие. Свойства.
3. Сравнение множеств по мощности. Свойства. Теорема Кантора–Бернштейна. Счётные и несчётные множества. Примеры. Теорема Кантора.
4. Частично упорядоченные множества и линейно упорядоченные множества. Диаграммы Хассе. Понятия наибольшего и наименьшего, максимального и минимального элементов, их свойства. Сложение, умножение и декартово умножение упорядоченных множеств. Обратный порядок. Свойства. Примеры.
5. Изоморфизмы упорядоченных множеств. Примеры. Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без первого и последнего элемента.
6. Пропозициональные формулы и булевы функции. Вычисление истинностного значения формулы. Тавтологии и противоречия. Примеры. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Полиномы Жегалкина. Построение нормальных форм для произвольной функции.
7. Полные и неполные системы связок. Примеры. Теорема Поста.
8. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Понятия вывода и выводимой формулы. Корректность исчисления высказываний. Вывод формулы  $A \rightarrow A$  в исчислении высказываний. Лемма о дедукции и её применения.
9. Лемма о выводимости формулы или её отрицания из литералов, соответствующих значениям переменных. Полнота исчисления высказываний.

10. Совместные и непротиворечивые семейства формул. Множество пропозициональных формул совместно тогда и только тогда, когда оно непротиворечиво. Эквивалентность теоремам о корректности и полноте.
11. Языки первого порядка: сигнатура, построение термов и формул. Свободные и связанные вхождения переменных. Параметры формулы. Интерпретация языка первого порядка. Определение истинности формулы. Истинность формулы зависит только от значений её параметров.
12. Выразимость предикатов: определение, примеры. Изоморфизмы и автоморфизмы интерпретаций. Сохранение выразимых предикатов при автоморфизме. Примеры невыразимых предикатов.
13. Метод элиминации кванторов. Применение к интерпретациям  $\langle \mathbb{N}, =, S \rangle$  и  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ .
14. Элементарная эквивалентность интерпретаций. Игры Эренфойхта. Пример пары элементарно эквивалентных, но не изоморфных интерпретаций.
15. Теории и модели. Выполнимость и общезначимость формул первого порядка. Примеры.
16. Исчисление предикатов: аксиомы и правила вывода. Правило обобщения. Корректность исчисления предикатов. Лемма о дедукции для исчисления предикатов.
17. Непротиворечивые и совместные теории. Непротиворечивость любой совместной теории, связь с корректностью исчисления предикатов.
18. Полные и экзистенциально полные теории. Любую непротиворечивую теорию можно расширить до полной и экзистенциально полной.
19. Существование модели из замкнутых термов у полной и экзистенциально полной теории. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов в сильной и слабой форме.