Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, 18/05/2011
Комментарии к контрольной работе номер 2 (решения задач)

Условия задачи 1: Приведите к нормальной форме следующие λ-термы

первый вариант: $(\lambda xy.x(xy))((\lambda xy.x(xxxy))(\lambda xy.x(xy)))$;

второй вариант: $(\lambda xy.x(xxy))((\lambda xy.x(xxy))(\lambda xy.x(xy)))$.

Прежде чем приводить решение, напомним некоторые свойства нумералов Чёрча и введём полезные сокращения. Как обычно, мы обозначаем $\underline{n}$ нумерал Чёрча для натурального числа $n \in \mathbb{N}$:

$$\underline{n} = \lambda fx\ .\ \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ итераций } f}\ x)\ldots)$$

Содержательный смысл данного комбинатора прост: это “механизм”, который преобразует любую функцию F в n-кратную итерацию F. Напрмер, если комбинатор INC представляет функцию прибавления единицы, то произведение ($\underline{n}$ INC) представляет функцию прибавления числа n; если комбинатор SQ представляет функцию возведения числа в квадрат, то ($\underline{n}$ SQ) представляет функцию возведения числа в степень 2^n.

Не трудно понять, что $(\underline{n}\ \underline{m}) = \underline{m^n}$ (n-кратная итерация комбинатора $\underline{m}$ есть “механизм”, который преобразует всякую функцию F в (m^n)-кратную итерацию F).

Если умножеть нумерал Чёрча $\underline{n}$ на какую-нибудь переменную y, то получиться следующий λ-терм

$$(\lambda fx\ .\ \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ итераций } f}\ x)\ldots))y = \lambda x\ .\ \underbrace{y(y(\ldots(y}_{n \text{ итераций } y}\ x)\ldots)$$

Будем обозначать такой λ-терм $\underline{n^y}$. Содержательный смысл этого терма тоже прост – это “механизм”, действие которого на другие λ-термы состоит в n-кратном приписывании переменной y (с группировкой скобок справа налево). Например,

$$\underline{n^y}\ z = (\lambda x\ .\ \underbrace{y(y(\ldots(y}_{n \text{ итераций } y}\ x)\ldots)z = \underbrace{y(y(\ldots(y}_{n \text{ итераций } y}\ z)\ldots)$$

Обратим внимание, что при всех $n \geq 1$ терм $\underline{n^y}$ не является комбинатором (замкнутым λ-термом), поскольку в нём есть свободная переменная y. Если к этому терму слева приписать квантор по переменной y, то получится замкнутый терм (комбинатор). И этот комбинатор будет (с точностью до переименования переменных) нумералом Чёрча $\underline{n}$:

$$\lambda y.(\underline{n^y}) = \lambda y\ .(\lambda x\ .\ \underbrace{y(y(\ldots(y}_{n \text{ итераций } y}\ )\ldots)) = \lambda yx\ .\ \underbrace{y(y(\ldots(y}_{n \text{ итераций } y}\ x)\ldots)) = \underline{n}$$

Последнее наблюдение, которые мы должны сделать, относится к произведению $\underline{n}$ и $\underline{m^y}$. Нетрудно проверить, что если $n \cdot m = k$, то $\underline{n}\ \underline{m^y} = \underline{k^y}$ (n-кратная итерация "механизма" по приписыванию m раз переменной y эквивалентна "механизму", который k раз приписывает переменную y).

На этом мы завершаем предварительную подготовку и приступаем к решению задачи.

Решение задачи из первого варианта контрольной работы (с подробными комментариями):

$$(\lambda xy.x(xy))((\lambda xy.x(xxxy))(\lambda xy.x(xy))) = \underline{2}\ ((\lambda xy.x(xxxy))\ \underline{2})$$

(пока ничего интересного не произошло, вы лишь воспользовались стандартным сокращением, чтобы сделать формулу более удобной для преобразований);

$$\underline{2}\ ((\lambda xy.x(xxxy))\ \underline{2}) = \underline{2}\ ((\lambda y.\underline{2}(\underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}\ y))) = \underline{2}\ ((\lambda y.\underline{2}(((\underline{2}\ \underline{2})\underline{2})y)))$$

(мы применили β-редукцию и вспомнили, как расставляются опущенные скобки);

$$\underline{2}\ ((\lambda y.\underline{2}(((\underline{2}\ \underline{2})\underline{2})y))) = \underline{2}\ ((\lambda y.\underline{2}((\underline{4}\ \underline{2})y))) = \underline{2}\ ((\lambda y.\underline{2}(\underline{16}\ y)))$$

(дважды перемножили нумералы Чёрча);

$$\underline{2}\ ((\lambda y.\underline{2}(\underline{16}\ y))) = \underline{2}\ ((\lambda y.\underline{2}(\underline{16^y})))$$

(умножили нумерал на переменную y);

$$\underline{2}\ ((\lambda y.\underline{2}(\underline{16^y}))) = \underline{2}\ ((\lambda y.\underline{32^y}))$$

(вспомнили, как нумерал действует на терм $\underline{32^y}$);

$$\underline{2}\ ((\lambda y.\underline{32^y})) = \underline{2}\ (\underline{32})$$

(навешивания квантора по y на терм $\underline{32^y}$ даёт нумерал Чёрча для числа 32);

$$\underline{2}\ \underline{32} = \underline{1024} = \lambda fx\ .\ \underbrace{f(f(\ldots(f}_{1024\text{ итераций } f}\ x)\ldots)$$

(ещё раз воспользовались правилом перемножения нумералов Чёрча).

Ответ: нормальной формой исходного терма является нумерал Чёрча $\underline{1024}$.

Решение задачи из второго варианта контрольной работы мы запишем без детальных комментариев:

$$(\lambda xy.x(xxy))((\lambda xy.x(xxy))(\lambda xy.x(xy))) = (\lambda xy.x(xxy))((\lambda xy.x(xxy))\underline{2}) =$$

$$= (\lambda xy.x(xxy))((\lambda y.\underline{2}(\underline{2}\ \underline{2}y)) = (\lambda xy.x(xxy))((\lambda y.\underline{2}(\underline{4}\ y)) =$$

$$= (\lambda xy.x(xxy))((\lambda y.\underline{2}(\underline{4^y})) = (\lambda xy.x(xxy))((\lambda y.(\underline{8^y})) = (\lambda xy.x(xxy))(\underline{8}) =$$

$$= (\lambda y.\underline{8}(\underline{8}\ \underline{8}y)) = (\lambda y.\underline{8}(\underline{(8^8)}\ y)) = (\lambda y.\underline{8}(\underline{(8^8)^y})) = (\lambda y.(\underline{(8^9)^y})) = \underline{(8^9)} = \underline{134217728}$$

Ответ: нормальной формой данного терма является нумарл Чёрча $\underline{134217728}$.

Первый контрольный вопрос: На каких шагах мы использовали α-конверсию?

Второй контрольный вопрос: Проверьте, что описанные преобразования терма используют только α-конверсии и β-редукции (ни в одном из шагов знак равенства не обозначает преобразования, обратного к β-редукции).

Условия задачи 2: Постройте комбинатор, который представляет функцию

первый вариант: $n \mapsto 3^n$;

второй вариант: $n \mapsto 4^n$.

Эту задачу можно решать разными способами. Проще всего воспользоваться известным нам комбинатором возведения в степень:

$$\mathbf{EXP} = \lambda ab.ba,$$

который представляет функцию двух аргументов $(m, n) \mapsto m^n$. Если умножить (справа) комбинатор **EXP** на нумерал Чёрча $\underline{s}$, то получится комбинатор, представляющий функцию $n \mapsto s^n$.

Решение для первого варианта: $\underline{3} = \lambda fx.f(f(fx))$, и интересующий нас комбинатор есть

$$\mathbf{EXP}\ \underline{3} = (\lambda ab.ba)(\lambda fx.f(f(fx))) = \lambda b.b(\lambda fx.f(f(fx)))$$

Решение для второго варианта: $\underline{4} = \lambda fx.f(f(f(fx)))$, и интересующий нас комбинатор есть

$$\mathbf{EXP}\ \underline{4} = (\lambda ab.ba)(\lambda fx.f(f(f(fx)))) = \lambda b.b(\lambda fx.f(f(f(fx))))$$

Условия задачи 3: Постройте комбинатор, который по нумералу Чёрча для числа n вычисляет нумерал Чёрча для числа φ_n, где

первый вариант: $\varphi_n = \begin{cases} 2, & \text{если } n = 0, \\ 3, & \text{если } n = 1, \\ 3\varphi_{n-1} + 2\varphi_{n-2}, & \text{если } n > 1; \end{cases}$

второй вариант: $\varphi_n = \begin{cases} 3, & \text{если } n = 0, \\ 2, & \text{если } n = 1, \\ 3\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}, & \text{если } n > 1. \end{cases}$

Решение задачи из первого варианта: Требуемый комбинатор Φ нетрудно построить с помощью приёма “рекурсивного программирования”. Прежде всего запишием рекурсивное уравнение для комбинатора Φ. Комбинатор Φ представляет нужную нам функцию, если он удовлетворяет равенству

$$\Phi\ \underline{n} = \text{ifzero}\ \underline{n}\ \underline{2}\ (\text{ifzero}\ (\text{dec}\ \underline{n})\ \underline{3}\ (\ \text{add}\ (\text{mult}\ \underline{3}\ (\Phi\ (\text{dec}\ \underline{n})))(\text{mult}\ \underline{2}\ (\Phi\ (\text{dec}(\text{dec}\ \underline{n}))))))$$

Это значит, что достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\Phi\ = \underbrace{(\lambda fn.(\text{ifzero}\ \underline{n}\ \underline{2}\ (\text{ifzero}\ (\text{dec}\ \underline{n})\ \underline{3}\ (\ \text{add}\ (\text{mult}\ \underline{3}\ (f\ (\text{dec}\ n)))(\text{mult}\ \underline{2}(f\ (\text{dec}(\text{dec}\ n))))))))}_{G_1}\Phi$$

По теореме о неподвижной точке это уравнение имеет решение YG_1, где

$$Y = (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$$

(вместо Y можно также взять любой другой комбинатор неподвижной точки). Таким образом, мы получаем ответ

$$\Phi = ((\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy)))\ (\lambda fn.(\text{ifzero}\ \underline{n}\ \underline{2}\ (\text{ifzero}\ (\text{dec}\ \underline{n})\ \underline{3}$$
$$(\ \text{add}\ (\text{mult}\ \underline{3}\ (f\ (\text{dec}\ n)))(\text{mult}\ \underline{2}\ (f\ (\text{dec}(\text{dec}\ n))))))))$$

Решение задачи из второго варианта: Решение аналогично первому варианту. Сначала запишием рекурсивное уравнение для комбинатора Φ:

$$\Phi\ \underline{n} = \text{ifzero}\ \underline{n}\ \underline{3}\ (\text{ifzero}\ (\text{dec}\ \underline{n})\ \underline{2}\ (\ \text{sub}\ (\text{mult}\ \underline{3}\ (\Phi\ (\text{dec}\ \underline{n})))(\text{mult}\ \underline{2}\ (\Phi\ (\text{dec}(\text{dec}\ \underline{n}))))))$$

Это значит, что достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\Phi\ = \underbrace{(\lambda fn.(\text{ifzero}\ \underline{n}\ \underline{3}\ (\text{ifzero}\ (\text{dec}\ \underline{n})\ \underline{2}\ (\ \text{sub}\ (\text{mult}\ \underline{3}\ (f\ (\text{dec}\ n)))(f\ (\text{dec}(\text{dec}\ n)))))))}_{G_2}\Phi$$

По теореме о неподвижной точке это уравнение имеет решение YG_2, где

$$Y = (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$$

Получаем ответ:

$$\Phi = ((\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy)))\ (\lambda fn.(\text{ifzero}\ \underline{n}\ \underline{3}\ (\text{ifzero}\ (\text{dec}\ \underline{n})\ \underline{2}$$
$$(\text{sub}\ (\text{mult}\ \underline{3}\ (f\ (\text{dec}\ n)))(f\ (\text{dec}(\text{dec}\ n)))))))$$

Определение к задачам 4 и 5: Во вполне упорядоченном множестве $(A, <)$ элемент x является непосредственным предшественником y, если $x < y$, и не существует z такого, что $x < z < y$. Элементы, которые не имеют предщественника *и при этом не являются минимальными*, называются *предельными*.

Условия задачи 4:

вариант 1: (а) Приведите пример такого бесконечного вполне упорядоченного множества, в котором нет предельных элементов. (б) Приведите пример такого вполне упорядоченного множества, в котором ровно два предельных элемента. (в) Приведите пример такого вполне упорядоченного множества, в котором бесконечно много предельных элементов.

вариант 2: (а) Приведите пример такого бесконечного вполне упорядоченного множества, в котором нет предельных элементов. (б) Приведите пример такого вполне упорядоченного множества, в котором ровно три предельных элемента. (в) Приведите пример такого вполне упорядоченного множества, в котором бесконечно много предельных элементов.

Решение: (Варианты 1 и 2, а) Существует ровно одно (с точностью до изоморфизма) такое вполне упорядоченное множество — это множество натуральных чисел с обычным отношением порядка. У любого элемента $n \in \mathbb{N}$ кроме минимального есть предшественник (это число $n - 1$).

(Вариант 1, б) Например, множество $\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}$ со стандартным порядком на произведении упорядоченных множества: пара (x_1, y_1) считается меньше пары (x_2, y_2), если $y_1 < y_2$, или если $y_1 = y_2$ и $x_1 < x_2$.

Это вполне упорядоченное множество удобно представлять себе как три копии множества натуральных чисел: ‘левое’, ‘среднее’ и ‘правое’. В каждой из трёх копий $\mathbb{N}$ её элементы упорядочены слева направо обычным образом.

В этом множестве нет предшественников только у трёх элементов – у нулей в каждой из трёх копий $\mathbb{N}$. Ноль из ‘левой’ копии $\mathbb{N}$ является минимальным во всём множестве, так что он не считается предельным. А нули из двух других копий $\mathbb{N}$ являются предельными.

(Вариант 2, б) Решение аналогично задаче из первого варианта; нужно взять множество $\mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3\}$ с обычным порядком на произведении упорядоченных множеств.

(Варианты 1 и 2, в) Например, таким множество является произведение двух копий множеств натуральных чисел со стандартным порядком. Это значит, что мы берем множество пар $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и вводим на нём с обычный порядок для произведения двух вполне упорядоченных множеств: сравнивая пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2), мы сначала сравниваем вторые координаты; если они совпадают, то сравниваем первые координаты. Это множество можно представлять себе как бесконечное семейство копий натуральных чисел. В этом множестве нет предшественника у нулей из каждой копии множества натуральных чисел, т.е., у всех элементов вида $(n, 0)$. Все они кроме самого первого (минимального во всём множестве) являются предельными.

Комментарий: Оценка не снижалась при неправильной интерпретации условия – если минимальный элемент множества считался предельным элементов.

Контрольный вопрос: Есть ли другие вполне упорядоченные множества, удовлетворяющие условиям задачи в пунктах (б) и (в) ?

Условия задачи 5 (оба варианта): Рассмотрим множество многочленов ненулевой степени с натуральными коэффициентами и определим отношение порядка $P < Q$

$$P < Q \leftrightharpoons \lim_{x \to +\infty} (Q - P) > 0$$

Есть ли в получившемся линейно упорядоченном множестве предельные элементы?
Решение: Полезно переформулировать условия задачи: многочлен P счиатется меньше многочлена Q, если $P(x)$ меньше $Q(x)$ для всех достаточно больших x. Нетрудно понять, как нужно сравнивать многочлены: из двух многочленов разной степени больше оказывается тот, у кого выше степень; при сравнении многочленов одинаковой степени, нужно сравнить их коэффициенты при старших степенях, в случае совпадения – коэффициенты при следующих степенях, и т.д.

Ответ на вопрос задачи: да, в это множестве есть предельные элементы. Ясно, что всякий многочлен $P(x)$ является предшественником многочлена $P(x)+1$. Поэтому предшественники есть у всех многочленов с ненулевым свободным членом. А все многочлены с нулевым свободным членом (кроме одного – минимального во всём множестве) являются предельными.

Например, многочлен x^2 меньше любого другого многочлена степени 2 и выше, но больше любого многочлена степени один. У него нет предшественника, и он является предельным.

Комментарий: Ответ в задаче не изменится, если рассматривать многочлены любой (а не только ненулевой) степени.

Контрольный вопрос: Изменится ли ответ в задаче, если рассматривать многочлены с целыми (положительными и отрицательными) коэффициентами?