

1. Рассмотрим множество всех слов в латинском алфавите (всех конечных последовательностей букв $\{a, b, \dots, z\}$) с лексикографическим порядком на них. Является ли это множество линейно упорядоченным? Является ли оно фундированным?

2. Рассмотрим множество всех подмножеств натурального ряда \mathbb{N} , упорядоченное по включению (для $A, B \subset \mathbb{N}$ считаем, что $A < B$, если A является собственным подмножеством B). Докажите, что данное отношение транзитивно. Является ли этот порядок линейным? Фундированным? Есть ли в этом множестве максимальные элементы? Минимальные элементы?

3. Те же вопросы для множества всех *конечных* подмножеств \mathbb{N} .

4. Рассмотрим множество многочленов с натуральными коэффициентами. Введём на этом множестве порядок: будем говорить, что многочлен $P(x)$ больше $Q(x)$, если $P(x) > Q(x)$ для всех достаточно больших x . Докажите, что данный порядок является линейным. Является ли он фундированным?

5. Тот же вопрос для многочленов с целыми (не обязательно положительными) коэффициентами.

6. Тот же вопрос для многочленов с положительными рациональными коэффициентами.

7. Дана конечная последовательность букв a и b . Со словом разрешается делать следующее преобразование: найти любое подслово ba и заменить его на $ab\dots b$ (с каким угодно числом букв b). Докажите, что такое преобразование нельзя выполнять бесконечно много раз.

8. Известны два определения *начального отрезка* вполне упорядоченного множества (A, \leq) : (1) $B \subset A$ называется начальным отрезком A , если для любого $x \in B$ и любого $y \in A$ такого, что $y < x$, элемент y также принадлежит B ; (2) $B \subset A$ называется начальным отрезком A , если для любого $x \in B$ и любого $y \in A \setminus B$ выполнено $x < y$. Докажите, что эти определения эквивалентны.

9. Докажите, что начальный отрезок вполне упорядоченного множества сам является вполне упорядоченным множеством (с унаследованным отношением порядка).

10. Пусть B и C являются начальными отрезками вполне упорядоченного множества (A, \leq) . Докажите, что одно из множеств B, C вложено в другое (более того, является начальным отрезком другого).

11. Пусть $(A, <)$ является вполне упорядоченным множеством, и некоторое отображение $f : A \rightarrow A$ сохраняет порядок (если $x < y$, то $f(x) < f(y)$). Докажите, что $f(x) \geq x$ для всех $x \in A$. Можно ли утверждать, что $f(x) = x$ для всех $x \in A$?

12. Пусть $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ являются вполне упорядоченными множествами, и существуют такие $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$, что f отображает A в начальный отрезок B (с сохранением порядка), а g отображает B в начальный отрезок A (также с сохранением порядка). Докажите, что функции f и g являются обратными друг к другу и

устанавливают изоморфизм между $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$.

13. Пусть $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ являются линейно упорядоченными множествами. Пусть A и B не пересекаются. Суммой этих линейно упорядоченных множеств (обозначается $A + B$) называется множество $C = A \cup B$ со следующим отношением порядка $<_C$: для всех $x, y \in A$ полагаем $x <_C y$, если $x <_A y$; для всех $x, y \in B$ полагаем $x <_C y$, если $x <_B y$; наконец, для любых $x \in A$ и $y \in B$ полагаем $x <_C y$. Докажите, что введенный порядок линейен. Докажите, что если $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ являются вполне упорядоченными множествами, то и $(C, <_C)$ вполне упорядоченное.

14. Докажите, что для любых $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ и $(C, <_C)$ сумма $A + (B + C)$ изоморфна $(A + B) + C$.

15. Приведите пример таких вполне упорядоченных $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$, что $A + B$ и $B + A$ не изоморфны.

16. Приведите пример таких вполне упорядоченных $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$, что $A + B$ изоморфно A , а $B + A$ не изоморфно A .

17. Пусть $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ являются линейно упорядоченными множествами. Произведением этих линейно упорядоченных множеств (обозначается $A \cdot B$) называется множество $C = A \times B$ со следующим отношением порядка $<_C$: для любых $(x, y), (x', y') \in A \times B$ полагаем $(x, y) <_C (x', y')$, если выполнено одно из двух условий: (1) $y <_B y'$, или (2) $y = y'$ и $x <_A x'$. Докажите, что введенный порядок линейен. Докажите, что если $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ являются вполне упорядоченными, то и их произведение является вполне упорядоченным множеством.

18. Докажите, что для любых $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ и $(C, <_C)$ произведение $A \cdot (B \cdot C)$ изоморфно произведению $(A \cdot B) \cdot C$.

19. Докажите, что для любых $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ и $(C, <_C)$ множество $A \cdot (B + C)$ изоморфно $(A \cdot B) + (A \cdot C)$, а $(A + B) \cdot C$ изоморфно $(A \cdot C) + (B \cdot C)$.

20. Приведите пример таких вполне упорядоченных $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$, что $A \cdot B$ и $B \cdot A$ не изоморфны.

21. Приведите пример таких вполне упорядоченных $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$, что $A \cdot B$ изоморфно A , а $B \cdot A$ не изоморфно A .

22. Пусть граф G связан и не имеет циклов (такие графы называются деревьями), число вершин бесконечно, но при этом у каждой вершины есть лишь конечное число соседей. Докажите, что в таком графе существует бесконечный путь, т.е., бесконечная цепочка вершин x_1, x_2, \dots такая, что каждая вершина x_i соединена ребром с x_{i+1} . Где в этом рассуждении используется аксиома выбора?

23. Для любого бесконечного множества A докажите, что

- a) A равномощно некоторому своему подмножеству B (не совпадающему со всем A);
- b) A можно представить в виде объединения двух непересекающихся A_1 и A_2 , каждое из которых равномощно A ;
- c) A можно представить в виде объединения счетного семейства непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, каждое из которых равномощно A .