1 Непрерывные случайные величины

Пусть задана непрерывная неубывающая функция $F(x)$ на $(-\infty, +\infty)$, такая что

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1, \tag{2}$$

Определение 1. X называется случайной величиной, если её распределение вероятностей $\mathsf{P}\big\{X < x\big\}$ определяется функцией $F(x)$:

$$\mathsf{P}\big\{X < x\big\} = F(x) \tag{3}$$

Будем считать по определению, что вероятность каждого значения равна нулю: $\mathsf{P}\{X = a\} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Случайная величина X называется абсолютно непрерывной, если существует неотрицательная функция $f(x)$ такая, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \tag{4}$$

Функция f называется плотностью случайной величины X.

Свойства плотности

Теорема 1. *Пусть X — абсолютно непрерывная случайная величина. Тогда*

$$f(x) \geq 0, \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1, \tag{6}$$

$$f(x) = F'(x). \tag{7}$$

Доказательство. Формула (5) является частью определения плотности случайной величины и повторена из-за её важности. Соотношение (6) непосредственно следует из (4) и (2). Наконец, (7) получается из (4) дифференцированием по переменной x. □

Теорема 2. *Пусть абсолютно непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$ и плотность $f(x)$. Тогда*

$$\mathsf{P}\big\{X \in [a,b]\big\} = F(b) - F(a) \tag{8}$$

и

$$\mathsf{P}\big\{X \in [a,b]\big\} = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{9}$$

Доказательство. Из формулы (4) следует, что соотношения (8) и (9) эквивалентны. Поэтому достаточно установить формулу (8). Очевидно, что $[a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a)$. Следовательно,

$$\mathsf{P}\left\{X \in [a, b]\right\} = \mathsf{P}\left\{X \in (-\infty, b]\right\} - \mathsf{P}\left\{X \in (-\infty, a)\right\} + \mathsf{P}\left\{X = b\right\}.$$

Последнее слагаемое равно нулю, а первые два — $F(b)$ и $F(a)$ соответственно. □

Замечание. Так как вероятность каждой точки равна нулю, то в левой части формул (8) и (9) отрезок можно заменить на интервал или полуинтервал. Кроме того, очевидно, что формулы (8) и (9) имеют смысл при a или b, равном бесконечности.

Пример. Показательное распределение.

Рассмотрим геометрическое распределение

T	δ	2δ	3δ	$\cdots$
P	p_δ	$p_\delta q$	$p_\delta q^2$	$\cdots$

где p_δ — это вероятность успеха в одном испытании схемы Бернулли, а $q = 1 - p_\delta$. Пусть случайная величина T обозначает время ожидания успеха. Успех может произойти в моменты времени δ, 2δ, $\ldots$. Тогда

$$\mathsf{P}\left\{T > n\delta\right\} = (1 - p_\delta)^n \quad \text{и} \quad \mathbf{M}T = \frac{\delta}{p_\delta}.$$

Перейдём от дискретной модели к непрерывной. Для этого устремим δ к 0, n к ∞ и p_δ к 0 так, что среднее значение случайной величины T и значение $n\delta$ не меняются. Обозначим

$$t = n\delta, \quad \alpha = \frac{p_\delta}{\delta}.$$

Тогда

$$\mathsf{P}\left\{T > n\delta\right\} = (1 - \delta\alpha)^{\frac{t}{\delta}}.$$

Переходя к пределу, получим, что

$$\mathsf{P}\left\{T > t\right\} = \left(1 + \frac{1}{-\frac{1}{\delta\alpha}}\right)^{\frac{-1}{\delta\alpha}(-\delta\alpha)\frac{t}{\delta}} \longrightarrow e^{-\alpha t}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\left\{T \le t\right\} = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t}, & \text{если } t > 0 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По определению 1 функция распределения $F(t)$ случайной величины T задаётся равенством $F(t) = \mathsf{P}\{T < t\}$. Поэтому

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t}, & \text{если } t > 0 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Дифференцируя полученное выражение для $F(t)$, согласно определению 2, имеем формулу для плотности $f(t)$ случайной величины T:

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & \text{если } t > 0 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{10}$$

Определение 3. Случайная величина T, имеющая плотность распределения (10), называется показательно распределённой случайной величиной.

Математическое ожидание и дисперсия.

Определение 4. Математическим ожиданием $\mathbf{M}X$ абсолютно непрерывной случайной величины X, имеющей плотность $f(x)$, называется

$$\mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx, \tag{11}$$

если интеграл сходится абсолютно. Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения и интеграл (11) расходится, то говорят, что математическое ожидание случайной величины X равно бесконечности. Если случайная величина X принимает как положительные, так и отрицательные значения и интеграл (11) не сходится абсолютно, то математического ожидания случайной величины X не существует.

Упражнение. Докажите, что случайная величина, определяемая функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

имеет бесконечное математическое ожидание.

Пример. Заметим, что математическое ожидание $\delta/p_\delta = \alpha^{-1}$ геометрических распределений в рассмотренном примере постоянно, поэтому оно не меняется и при переходе к пределу. Итак, установлена следующая теорема:

Теорема 3. *Математическое ожидание показательно распределённой случайной величины, имеющей плотность (10), равно* α^{-1}.

Определение 5. Дисперсией $\mathbf{D}X$ абсолютно непрерывной случайной величины X, имеющей плотность распределения $f(x)$, называется

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X).$$

Лемма 1. *Дисперсия* $\mathbf{D}X$ *абсолютно непрерывной случайной величины* X *вычисляется по формуле*

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2.$$

Доказательство. Утверждение леммы устанавливается аналогично доказательству соответствующей леммы для дискретных случайных величин. □

Пример. Равномерно распределённая случайная величина.

Определение 6. Случайная величина X распределена равномерно в интервале (a, b), если её плотность постоянна на интервале (a, b) и равна $(b - a)^{-1}$ на этом интервале. Вне интервала (a, b) плотность равна 0.

О равномерно распределённой случайной величине часто говорят “точка X, выбранная наудачу”.

Теорема 4. *Функция распределения* $F(x)$ *равномерно распределённой случайной величины на отрезке* (a, b) *равна*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in (a, b); \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$

Математическое ожидание $\mathbf{M}X = (a + b)/2$, *дисперсия* $\mathbf{D}X = (b - a)^2/12$.

Доказательство. Формула для функции $F(x)$, согласно (4), получается интегрированием плотности равномерно распределённой случайной величины. Далее,

$$\mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \\ = \frac{x^2}{2(b-a)}\bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \quad (12)$$

Чтобы вычислить дисперсию, нужно найти интеграл

$$\mathbf{M}X^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

□