1 Предельные теоремы

Теорема 1 (Неравенство Чебышéва). *Пусть X — случайная величина с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2. Тогда для произвольного $t > 0$ выполнено неравенство*

$$\mathsf{P}\left\{|X-\mu| \geq t\right\} \leq \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

Доказательство. Предположим, что распределение случайной величины X задано формулой: $\mathsf{P}\{X = x_i\} = f(x_i)$. Тогда по определению дисперсии

$$\sigma^2 = \mathbf{M}(X-\mu)^2 = \sum_i (x_i-\mu)^2 f(x_i).$$

Все слагаемые полученной суммы положительны. Поэтому исключение слагаемых с $(x_i-\mu)^2 < t^2$ может только уменьшить правую часть равенства:

$$\sigma^2 \geq \sum_{i'} (x_{i'}-\mu)^2 f(x_{i'}),$$

где суммирование производится только по тем i', для которых $(x_{i'}-\mu)^2 \geq t^2$. Тогда, очевидно,

$$\sigma^2 \geq \sum_{i'} t^2 f(x_{i'}) = t^2\,\mathsf{P}\{|X-\mu| \geq t\}.$$

Полученное неравенство доказывает теорему. □

Пример. Пусть X — число выпадений герба при десяти независимых бросаниях монеты. Оценим $\mathsf{P}\{|X-4| \geq 5\}$. Случайная величина X имеет биномиальное распределение с $n = 10$ и $p = 1/2$. Следовательно, $\mu = \mathbf{M}X = 5$, $\sigma^2 = np(1-p) = 5/2$. По неравенству Чебышева

$$\mathsf{P}\{|X-5| \geq 4\} \leq \frac{5}{32}.$$

Заметим, что точно значение

$$\mathsf{P}\{|X-5| \geq 4\} = \mathsf{P}\{X = 0, 1, 9, 10\} = 2\cdot\frac{1}{2^{10}} + 2\cdot\frac{10}{2^{10}} = \frac{11}{512},$$

что много меньше, чем $5/32$.

Пример напоминает, что от неравнества Чебышева, как и от других результатов, имеющих большую общность, нельзя ожидать точных неравенств в частных случаях.

Теорема 2 (Закон больших чисел). *Пусть X_k — последовательность взаимно независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение. Предположим, что существуют конечные математические ожидания $\mu = \mathbf{M}X_k$ случайных величин X_k. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right\} \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведём при дополнительном предположении о существовании конечной дисперсии $\sigma^2 = \mathbf{D}X_k$ случайных величин X_k. Это ограничение можно снять (см., например, В. Феллер Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., Мир, Т. 1, стр. 252 (1967)). Положим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ и применим к случайной величине S_n неравенство Чебышева:

$$\mathsf{P}\{|S_n - n\mu| \geq t\} \leq \frac{n\sigma^2}{t^2}.$$

Положив $t = \varepsilon n$, получим, что

$$\mathsf{P}\{|S_n - n\mu| \geq \varepsilon n\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при фиксированных ε и σ и при $n \to \infty$. □

Пример. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих значения 1 и 0 с вероятностями p и $1 - p$ соответственно. Положим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Тогда $\mathbf{M}S_n = np$ и $\mathbf{D}S_n = np(1 - p)$. Случайную величину S_n можно интепретировать как число успехов в схеме Бернулли. Закон больших чисел утверждает: весьма правдоподобно, что при больших n среднее число успехов S_n/n будет близким к p. Для числа успехов в схеме Бернулли мы знаем более общий результат — теорему Муавра-Лапласа — позволяющий оценить отклонение от среднего значения: $\mathsf{P}\{\alpha < (S_n - np)/\sqrt{np(1-p)} < \beta\} \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$, где $\Phi(\beta)$ — функция Лапласа. Имеет место аналогичный результат для произвольной последовательности случайных величин.

Теорема 3 (Центральная предельная теорема). *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — последовательность взаимно независимых случайных величин с одинаковыми распределениями. Предположим, что существуют математические ожидания и дисперсии $\mu = \mathbf{M}X_k$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X_k$. Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Тогда для любых фиксированных α и β, $\alpha < \beta$*

$$\mathsf{P}\left\{\alpha < \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \beta\right\} \to \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Пример. Предположим, что в генеральной совокупности, состоящей из N семей, число семей, имеющих k детей, равно N_k $(N_0 + N_1 + \ldots + N_k = N)$. Для социологических исследований наугад выбирается n семей. Если проводится выбор с возращением (то есть семья, выбранная один раз, имеет такие же шансы быть выбрана в дальнейшем как и любая другая), то вероятность выбора на каждом шаге семьи, в которой k детей, равна N_k/N. Тогда выборку с возращением объёма n можно рассматривать как последовательность независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, имеющих распределение $\mathsf{P}\left\{X_j = k\right\} = N_k/N$. Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Тогда S_n/n — среднее значение выборки. Очевидно, что

$$\mathbf{M}S_n = n\,\mathbf{M}X_k = n\sum k\frac{N_k}{N},$$

то есть математическое ожидание S_n равно среднему значению генеральной совокупности.

Закон больших чисел утверждает, что при больших n среднее значение выборки вероятно окажется близким к среднему значению генеральной совокупности. Центральная предельная теорема позволяет оценить разницу между двумя средними и определить объём выборки, необходимый для надёжной оценки.

Предположим, что ставится задача о нахождении такого объёма выборки, чтобы с вероятностью 0.99 среднее значение выборки отличалось от *неизвестного* среднего значения генеральной совокупности не больше, чем на 0.05:

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \leq 0.05\right\} \geq 0.99. \tag{1}$$

Элементарные преобразования левой части неравенства и последующее применение центральной предельной теоремы показывают, что

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n - n\mu}{n}\right| \leq 0.05\right\} = \mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right| \leq \frac{0.05\sqrt{n}}{\sigma}\right\} \longrightarrow 2\Phi\left(\frac{0.05\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Если аргумент x функции $\Phi(x)$ равен 2.57, то $2\Phi(x) \approx 0.99$ (см. таблицу значений функции $\Phi(x)$), и с увеличением x функция $\Phi(x)$ возрастает. Следовательно, неравенство (1) выполнено при

$$0.05\sqrt{n}/\sigma > 2.57$$

или $n > 51.4\sigma^2$. Дисперсия σ^2 генеральной совокупности обычно неизвестна, однако часто можно получить её предварительную оценку. Именно оценка дисперсии обычно вносит наибольший вклад в ошибку при использовании центральной предельной теоремы.

Пример (Интервальная оценка среднего нормально распределённой случайной величины).

Определение 1. Пусть θ — некоторый параметр распределения. *Интревальной оценкой* параметра θ называется произвольное неравенство

$$\theta' < \theta < \theta''.$$

Вероятность $\gamma = \mathsf{P}\{\theta' < \theta < \theta''\}$ называется *надёжностью* оценки.

Задача заключается в получении оценки неизвестного математического ожидания нормально распределённой случайной величины по выборке значений объёма n с надёжностью γ. Как и в предыдущем примере выборку можно рассматривать как последовательность независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$. В данном случае все они имеют нормальное распределение. Итак, известно, что

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \leq \delta\right\} \geq \gamma.$$

Центральная предельная теорема утверждает, что

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right| \leq \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right\} = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Обозначим через t_γ такое число, что $2\Phi(t_\gamma) = \gamma$. Тогда $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$ и

$$m_n - \frac{t_\gamma\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < m_n + \frac{t_\gamma\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $m_n = S_n/n$ — среднее выборки.

Случайные величины с различными распределениями

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — последовательность случайных величин с различными распределениями, у которых существуют конечные математические ожидания $\mathbf{M}X_k = \mu_k$ и дисперсии $\mathbf{D}X_k = \sigma_k^2$. Положим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Тогда математическое ожидание $m_n = \mathbf{M}S_n$ и дисперсия $s_n^2 = \mathbf{D}S_n$ существуют и

$$m_n = \mu_1 + \ldots + \mu_n, \quad s_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2.$$

Определение 2. Для последовательности $X_1, \ldots, X_n$ выполняется закон больших чисел, если при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{|S_n - m_n|}{n} > \varepsilon\right\} \to 0.$$

Для последовательности $X_1, \ldots, X_n$ выполнена центральная предельная теорема, если при любых фиксированных α и β, $\alpha < \beta$

$$\mathsf{P}\left\{\alpha < \frac{S_n - m_n}{s_n} < \beta\right\} \to \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Оказывается, что закон больших чисел и центральная предельная теорема выполнены при довольно общих условиях. Рассмотрим некоторые из них.

Теорема 4. *Если*

$$\frac{s_n}{n} \to 0,$$

то для последовательности случайных величин выполнен закон больших чисел.

Доказательство. Достаточно повторить доказательство теоремы 2 при условии существования дисперсии. □

Следствие. *Пусть последовательность $X_1, \ldots, X_n$ равномерно ограничена, то есть существует такое число A, что для любого $k < n$*

$$|X_k| < A.$$

Тогда для этой последовательности выполнен закон больших чисел.

Теорема 5. *Сохраняя обозначения этой лекции, положим*

$$\begin{aligned} U_k &= X_k - \mu_k, &\quad &\text{если } |X_k - \mu_k| \le \varepsilon s_n, \\ U_k &= 0, &\quad &\text{если } |X_k - \mu_k| > \varepsilon s_n. \end{aligned}$$

Если выполнены условия: $s_n \to \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(U_k^2) \to 1, \tag{2}$$

то справедлива центральная предельная теорема.

Теорема 6. *Если последовательность случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ равномерно ограничена и $s_n \to \infty$, то для неё выполнена центральная предельная теорема.*

Доказательство. Нужно воспользоваться предыдущей теоремой. Если $|X_k| < A$, то $|X_k - \mu_k| < 2A$. Так как $s_n \to \infty$, то найдётся такое большое число n_0, что $s_n > 2A\varepsilon^{-1}$ при всех $n > n_0$. Тогда $|X_k - \mu_k| \le \varepsilon s_n$ и $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(U_k^2) = s_n^2$. Следовательно, левая часть формулы (2) равна 1, и условие (2) выполнено. □

Пример. Выясним, выполнены ли закон больших чисел и центральная предельная теорема для последовательности взаимно независимых случайных величин, распределение которых задано таблицей

X_k	$-k$	0	k
P	$\frac{1}{2k}$	$1-\frac{1}{k}$	$\frac{1}{2k}$

В данном случае $\mu_k = 0$, $\sigma_k^2 = 2k$, $s_n^2 = n(n+1)/2$. Если $n > \varepsilon^{-1}$, то $|X_k| \le \varepsilon s_n$. Тогда $X_k = U_k$ и $\sum \mathbf{M}(U_k^2) = s_n^2$. Отсюда следует, что центральная предельная теорема выполнена, то есть

$$\mathsf{P}\left\{\alpha < \frac{\sqrt{2}S_n}{\sqrt{n(n+1)}} < \beta\right\} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Следовательно, вероятно, что S_n имеет порядок не меньший, чем n. Значит, S_n/n не стремится к нулю, и закон больших чисел не выполняется.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите неравенство Чебышева.

2. Пусть ξ — число выпадений гербов при восьми бросаниях монеты. Оцените вероятность $\mathsf{P}\left\{|\xi - 4| \ge 2\right\}$ с помощью неравенства Чебышева. Вычислите эту вероятность непосредственно.

3. Следует ли из центральной предельной теоремы для последовательности взаимно независимых случайных величин с одинаковым распределением закон больших чисел для этой последовательности? Ответ обоснуйте.

4. Следует ли из центральной предельной теоремы для последовательности взаимно независимых случайных величин с различными распределениями закон больших чисел для этой последовательности? Ответ обоснуйте.

5. Исходя из центральной предельной теоремы, докажите формулу Муавра-Лапласа для числа успехов в схеме Бернулли.

6. Рассмотрим последовательность независимых бросаний симметричной кости. Пусть X_k — число очков, выпавших при k-ом бросании. С помощью центральной предельной теоремы оцените

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - 3.5n\right| < 0.6744\sqrt{\frac{35n}{12}}\right\}.$$

7. Выполнен ли закон больших чисел и центральная предельная теорема для последовательности взаимно независимых случайных величин X_k, распределение которых задано таблицей

X_k	-1	0	1
P	$\frac{1}{2k}$	$1-\frac{1}{k}$	$\frac{1}{2k}$

8. Выполнен ли закон больших чисел для последовательности взаимно независимых случайных величин X_k, распределение которых задано таблицей

X_k	$-\sqrt{k}$	0	$\sqrt{k}$
P	$\frac{1}{2^k}$	$1-\frac{1}{2^{k-1}}$	$\frac{1}{2^k}$

9. Выполнен ли закон больших чисел и центральная предельная теорема для последовательности взаимно независимых случайных величин, распределение которых задано таблицей

X_k	$-k$	0	k
P	$\frac{1}{k}$	$1-\frac{2}{k}$	$\frac{1}{k}$