1 Введение

— Сколько необходимо действий, чтобы положить жирафа в холодильник?
— Четыре. Открыть холодильник. Вытащить оттуда бегемота. Положить жирафа. Закрыть холодильник.

Детская история.

Уважаемый читатель! Многие полагают, что теория вероятностей — предмет трудный и нудный, а подготовиться к экзамену могут только «ботаники» или подхалимы. Цель сборника задач, который Вы читаете, объяснить Вам, что это — неправда. Теория вероятностей тесно связана с окружающим миром, а круг приложений даже элементарных понятий необычайно велик. Чтобы изучить основы теории, развить вероятностную интуицию (и сдать экзамен по теории вероятностей!) требуется не зубрёжка и скрежет зубами, а логическое мышление и хорошее настроение. Алгоритм изучения предмета (и получения хорошей отметки) состоит из одного пункта. Вы соглашаетесь думать и решать задачи. Ведь не станете Вы отрицать, что умеете думать. Значит, Вы обладаете ключом к успеху.

Чтобы не пугать Вас трудными задачами, составители сборника начинают каждый раздел с введения новых понятий и элементарных вопросов. Далее приведены более содержательные (они же экзаменационные!) задания. Обычно они разделены на несколько простых вопросов. Их решение, напоминает игру с матрёшками. Вы открываете матрёшки одну за другой, пока не добираетесь до самой маленькой и, наверное, самой красивой, наконец, она у Вас в руках — Вы решили задачу.

В какой-то момент Вы почувствуете, уважаемый читатель, что готовы сдавать экзамен. Не исключено, что Вам захочется познакомиться с вероятностными головоломками или узнать о типичных приложениях выученного Вами предмета. Тогда для Вас – нетривиальные задачи, которые расположены в конце каждого раздела. А для более глубокого изучения теории вероятностей и её приложений загляните в соответствующую литературу. Её незначительная часть представлена в списке литературы.

2 Элементарные свойства вероятности

2.1 Комбинаторика

1. Сторона квадрата равна трём клеткам. Из скольких клеток состоит квадрат?

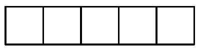
2. Ослику Иа-Иа медвежонок Винни-Пух подарил на день рождения три разных пустых бочонка, а поросёнок Пятачок – два воздушных шара: синий и зелёный. Сколькими способами Иа-Иа может разложить воздушные шары в подаренные бочонки?
Указание. Задача состоит в выборе бочонка для каждого шарика. Сколько вариантов для первого шарика? А для второго?

3. Сколькими способами можно распределить два различных шара по трём разных ящикам? Изменится ли ответ, если шары неразличимы?

4. Сколькими способами можно распределить k различных шаров по n различных ящикам? Проверьте, что при $k = 2$ и $n = 3$ формула даёт ответ предыдущей задачи.

5. Бросают три различные игральные кости. Сколько существует исходов эксперимента?
Указание. Здесь каждая кость – это шар из задачи 4, а каждый исход бросания одной кости – ящик.

6. Вы заполняете пять квадратов



нулями и единицами. Пустые клетки оставлять нельзя. Сколько существует различных способов заполнения клеток?

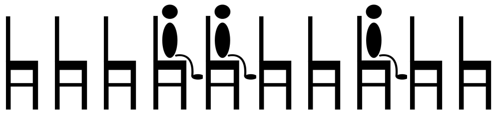
7. Сколько существует различных трёхзначных чисел?
Указание. В задаче происходит распределение цифр по трём ящикам (ящик – это место для очередной цифры), причём первая цифра не может быть нулём, поэтому существует только 9 вариантов заполнения первого ящика.

8. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2 и 3, если каждую цифру можно использовать только один раз?

9. Скольким способами можно посадить трёх человек на три стула? Двух человек на один стул размещать запрещено.

10. Компания из пяти человек садится в пятиместную машину, причём только двое из них умеют управлять автомобилем. Сколько существует способов заполнить машину?
Указание. Сначала найдите водителя, потом заполняйте остальные места в машине.

11. Скольким способами можно посадить трёх человек на десять стульев? Двух человек на один стул размещать запрещено. Переставлять стулья также нельзя. На диаграмме представлен пример того, как можно рассадить людей.



12. Скольким способами можно посадить k человек на n стульев ($k \leq n$)? Двух человек на один стул размещать запрещено.
Указание. Сколько возможностей для первого человека? для второго? для k-ого (будьте внимательны!)?

Рассмотрим множество из n элементов a_1, a_2, …, a_n. Будем его называть *генеральной совокупностью.* Все элементы генеральной совокупности предполагаются различными.

Произвольное множество $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k})$ из k элементов, входящих в генеральную совокупность называется *выборкой объёма* k из этой генеральной совокупности. Другими словами выборке соответствует последовательный выбор элементов из генеральной совокупности. Если выбранный элемент не возвращается в генеральную совокупность (то есть все индексы j_k различны), то происходит *выбор без возвращения.*

13. Могут ли быть одинаковые элементы в выборке, если происходит выбор без возвращения?

Если выбранный элемент возвращается в генеральную совокупность, то происходит *выбор с возвращением.*

14. Сколько существует выборок объёма k из генеральной совокупности, состоящей из n элементов, если происходит выбор с возвращением?
Указание. Задание совпадает с задачей 4

15. Сколько существует выборок объёма k из генеральной совокупности, состоящей из n элементов, если происходит выбор без возвращения?
Указание. Задание совпадает с задачей 12

Число подмножеств, состоящих из k эелментов, множества состоящего из n элементов, обозначается C_n^k. На «бытовом уровне» это определение означает, что C_{10}^3 – это число способов выбрать 3 ручки из кучи, состоящей из десяти ручек.

16. Попробуйте пересчитать (простым перебором), сколько существует подмножеств, состоящих из двух элементов, у множества, состоящего из четырёх элементов.

17. На столе лежит четыре ручки. Верно ли, что существует C_4^2 способов выбрать из них две ручки? Ответ обоснуйте.

18. Четверо друзей отдыхают у реки. Один из них должен пойти за дровами, а другой за водой. Верно ли, что существует C_4^2 способов выбора? Ответ обоснуйте.

19. Докажите, что $C_4^1 = C_4^3$, не вычисляя чисел C_4^1 и C_4^3.
Указание. Выбрав один предмет из имеющихся четырёх, Вы, тем самым, выбрали и оставшиеся три (Чтобы определить, что у одного неудачника волос в бороде столько же, сколько волос в хвосте его осла, достаточно не пересчитывать волосы, а отрывать их по одному из бороды и из хвоста. Если волос действительно поровну, то они закончатся одновременно).

20. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$, не вычисляя чисел C_n^k и C_n^{n-k}.

Следующие задачи позволят вычислить C_n^k.

21. На двери дома — десять клавиш: 0, 1, ... и 9. Кодом является произвольная последовательность из трёх различных клавиш, например, 012 или 195, причём 012 и 120 — это различные коды. Сколько существует различных кодов?

22. На двери дома – десять клавиш: 0, 1, ... и 9. Кодом является одновременное нажатие трёх клавиш, то есть код – это последовательность из трёх различных цифр, причём 012 и 120 — это одинаковые коды. Сколько существует различных кодов?
Указание. Обозначьте через x искомое (неизвестное) число кодов. Каждый код можно упорядочить $3 \cdot 2 = 6$ю способами (см. задачу 8). Следовательно, общее число упорядоченных кодов равно $6x$. Число упорядоченных кодов требовалось найти в задаче 11. Оно равно $10 \cdot 9 \cdot 8$. Поэтому $x = (10 \cdot 9 \cdot 8)/(3 \cdot 2)$.

23. Чему равно C_{10}^3?
Указание. По определению число C_{10}^3 – это число способов выбрать выбрать три предмета из десяти. Предметы могут быть произвольными, например, клавиши, описанные в

предыдущей задаче. Попробуйте повторить рассуждение этой задачи, не используя слово «клавиши». Вот возможная схема. Существует $3 \cdot 2 = 6$ способов упорядочить любые три выбранных предмета. Следовательно, общее число способов упорядоченного выбора трёх предметов из десяти равно $6 \cdot C_{10}^3$. С другой стороны, число способов последовательно выбрать три предмета из десяти равно … (объясните, почему). Поэтому $C_{10}^3 = \ldots$.

24. Чему равно C_n^k?
Указание. В решении предыдущей задачи замените 10 на n, а 3 на k. Когда будете вычислять, сколькими способов последовательно можно выбрать без повторения k предметов из n воспользуйтесь задачей 15.

25. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x + y + z = 10$? Пример *одного* решения: $x = 3$, $y = 2$, $z = 5$.

26. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x + y + z = 10$?

27.* Сколько существует вариантов выпадения двух одинаковых костей? Слово «одинаковых» нужно понимать так, что $(1, 2)$ и $(2, 1)$ – это один вариант. Тот же вопрос для четырёх костей. Для n костей.

2.2 Пространство элементарных событий

Элементарным событием (связанным с некоторым экспериментом) называется (неразложимый) исход эксперимента.

Пример. *Выпадение единицы при бросании игральной кости является элементарным событием, а выпадение нечётного числа — нет, так как этот исход эксперимента раскладывается на три элементарных события.*

Показание секундной стрелки на часах дают другой пример эксперимента. Его элементарные события — действительные числа, лежащие на интревале $[0, 60)$.

Говоря об элементарных событиях, их обычно называют *точками пространства элементарных событий*. Среди пространств элементарных событий выделяют те, которые состоят из конечного числа точек $E_1, \ldots, E_n$ или счётного числа точек $E_1, \ldots, E_n, \ldots$. Их называют *дискретными*.

28. Приведите пример пространства элементарных событий. Сколько элементарных событий в этом пространстве?

29. Можно ли считать элементарным событием выпадение пары чисел $(1, 2)$ при бросании двух одинаковых игральных костей. Тот же вопрос для разлиных (например, по размеру) костей.

Пусть Ω — дискретное пространство элементарных событий. *Событие* означает некоторое множество элементарных событий. В терминах эксперимента можно говорить, что событие A наступило, если наступило какое-нибудь элементарное событие, определеяющее событие A.

Пример. *Выпадение нечётного числа при бросании игральной кости является событием, состоящим из трёх элементарных событий.*

Запись $A = 0$ означает, что событие A не содержит элементарных событий и, следовательно, никогда не наступает. Событие, состоящее из всех точек, не содержащихся в событии A, называтеся событием, противоположным событию A и обозначается $\bar{A}$.

Сумма событий A и B, $A+B$, — это событие, состоящее из объединения точек, содержащихся в A и B. *Произведение* событий A и B, AB, — это событие, состоящих из общих точек A и B.

30. Упростите $A\bar{A}$, $A+A$, AA, $(A+B)(A+\bar{B})$.

31. Перечислите все случаи наступления события $A+B\bar{C}$.

События A и B называются *несовместными*, если они не наступают одновременно.

32. Докажите, что события A и B несовместны, если $AB=0$.

33. Верно ли, что A и $\bar{A}$ несовместны?

34. События A и B несовместны. В каком случае несовместны события $\bar{A}$ и $\bar{B}$?

Если каждая точка события A содержится в событии B, то, говорят, что из события A *следует* событие B.

35. События A и B несовместны. Докажите, что из A следует $\bar{B}$.

2.3 Вероятность. Простейшие свойства

Рассматривается пространство элементарных событий, состоящее из точек E_1, E_2, ..., E_n, ... С каждой точкой E_i связано неотрицательное число $p_i = \mathsf{P}\left\{E_i\right\}$, которое называется *вероятностью* элементарного события E_i. Числа p_i удовлетворяют условию

$$p_1 + \ldots + p_n + \ldots = 1.$$

Вероятностью произвольного события A называют сумму вероятностей элементарных событий, составляющих A. Например, если $A = E_1+E_2$, то $\mathsf{P}\{A\} = \mathsf{P}\{E_1\}+\mathsf{P}\{E_2\} = p_1+p_2$.

36. Пусть Ω — пространство элементарных событий. Докажите, что $\mathsf{P}\{\Omega\}=1$.
Указание. Событие Ω является суммой *всех* элементарных событий: $\Omega = E_1+E_2+\ldots$.

37. При бросании двух различных монет пространство элементарных событий состоит из четырёх точек, которые обозначим ГГ, ГР, РГ и РР. Каждой точке естественно приписать одну и ту же вероятность. Какую? Найдите вероятность того, что на двух монетах выпал хотя бы один герб.

38. Монету бросили дважды. С этим экспериментом связаны два различных пространства элементарных событий. Первое состоит из четырёх точек: ГГ, ГР, РГ и РР. Каждой точке естественно приписать одну и ту же вероятность. Какую (сравните с предыдущим вопросом)? Второе пространство элементарных событий состоит из трёх точек: E_1 — выпадение двух гербов, E_2 — выпадение двух решек и E_3 — выпадение различных сторон монеты. Какие вероятности следует приписать этим элементарным событиям?

39. Докажите формулу $\mathsf{P}\{A+B\} = \mathsf{P}\{A\}+\mathsf{P}\{B\}$ для несовместных событий событий A и B.

40. Докажите формулу $\mathsf{P}\{A+B\} = \mathsf{P}\{A\}+\mathsf{P}\{B\}-\mathsf{P}\{AB\}$ для произвольных событий A и B.

41. Пользуясь свойствами вероятности, докажите формулу $\mathsf{P}\{A+B+C\} \le \mathsf{P}\{A\}+\mathsf{P}\{B\}+\mathsf{P}\{C\}$

42. Докажите формулу

$$\mathsf{P}\{A_1+\ldots+A_n\} = \mathsf{P}\{A_1\}+\ldots+\mathsf{P}\{A_n\} \tag{1}$$

для несовместных событий событий A_1, ..., A_n.

43. Пространство элементарных событий определяется размещением 2 различных шаров в 3 различных ящика. Всем элементарным событиям приписаны равные вероятности. Событие S_i состоит в том, что в ящике под номером i находится 1 шар. Проверьте формулу

$$\mathsf{P}\left\{S_1 + S_2\right\} = \mathsf{P}\left\{S_1\right\} + \mathsf{P}\left\{S_2\right\} - \mathsf{P}\left\{S_1 S_2\right\}.$$

44. Трое друзей садятся в электричку, состоящую из восьми вагонов. Каждый человек выбирает вагон наугад (с равной вероятностью). Опишите пространство элементарных событий. Из скольки точек оно состоит? Какую вероятность следует приписать каждому элементарному событию? Пусть событие A заключается в том, что трое друзей поедут в разных вагонах. Из скольких элементарных событий состоит событие A? Найдите вероятность события A.

45. В лифт 6-этажного дома вошли 4 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что все выйдут на одном и том же этаже.

46. Найдите вероятность того, что при бросании трёх игральных костей сумма выпавших чисел окажется равной 17.

47. Найдите вероятность того, что при бросании трёх монет выпадет чётное число гербов.

48. Рассматриваются четырёхзначные числа, составленные из цифр 1, 2 и 3. Найдите вероятность того, что в наугад выбранном числе все цифры одинаковые.

49. Ребёнок наугад составлят слово из букв “м”, “м”, “а”, “а” (используя все четыре буквы). С какой вероятностью у него получится слово “мама”?

50. Среди восемнадцати деталей шесть бракованных. Эксперимент заключается в том, что из этих деталей наугад отбирают пять. Опишите пространство элементарных событий. Из скольких точек оно состоит? Чему равна вероятность каждого элементарного события? Найдите вероятность того, что среди 5 наугад отобранных деталей 2 бракованные.

2.4 Условная вероятность

Начнём с примера. В семье трое детей. Известно, что по крайней мере один из детей девочка. Найдите вероятность того, что в семье ровно две девочки.

Введём обозначения. Пусть событие A заключается в том, что в семье ровно две девочки, а событие B – по крайней мере одна девочка. Известно, что событие B произошло. Событие A при условии, что событие B произошло, обозначается $A|B$. В задаче требуется найти вероятность $\mathsf{P}\{A|B\}$. Для этой вероятности существует ещё одно обозначение: $\mathsf{P}_B\{A\}$.

Трём детям соответствует вероятностное пространство, состоящее из восьми элементарных событий:

$$\text{МММ, ММД, МДМ, МДД, ДММ, ДМД, ДДМ, ДДД,}$$

где буквы М и Д обозначают мальчика и девочку соответственно.

Так как событие B произошло, то из восьми элементарных событий следует исключить МММ. Оставшиеся семь элементарных событий имеют равную вероятность. В трёх из них имеет место событие A. Значит, $\mathsf{P}\{A|B\} = 3/7$. Задача решена.

Чтобы обобщить это решение на более сложные случаи, запишем последнее равенство в виде:

$$\mathsf{P}\{A|B\} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}}. \tag{2}$$

Появившееся число 8 означает количество элементарных событий. Действительно, дробь 3/8 в числителе равна суммарной вероятности трёх элементарных событий (МДД, ДМД, ДДМ), при которых наступают как A, так и B. Далее, дробь 7/8 в знаменателе равна вероятности события B.

В более трудных случаях не удаётся описать пространство элементарных событий и привести столь детальный анализ. Поэтому формулу (2) просто полагают определением условной вероятности:

$$\mathsf{P}\{A|B\} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}}, \tag{3}$$

если $\mathsf{P}\{B\} \neq 0$. Если $\mathsf{P}\{B\} = 0$, то условная вероятность $\mathsf{P}\{A|B\}$ не определяется.

События A и B называются *независимыми*, если

$$\mathsf{P}\{AB\} = \mathsf{P}\{A\}\,\mathsf{P}\{B\}. \tag{4}$$

В этом случае $\mathsf{P}\{A|B\} = \mathsf{P}\{A\}$.

51. События A и B независимы. Как связаны между собой $\mathsf{P}\{B|A\}$ и $\mathsf{P}\{B\}$?

Независимость событий A и B интерпретируется так, что наступление события A не влияет на наступление события B и наоборот. Обратите внимание, что взаимное невлияние событий друг на друга является именно интерпретацией, а не определением. При проверке независимости событий нужно пользоваться определением независимости.

52. Докажите, что из независимости событий A и B следует независимость событий A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

53. События A и $\bar{B}$ независимы, события A и $\bar{C}$ независимы, события B и C несовместны. Докажите, что события A и $B + C$ независимы.

54. Событие A заключается в том, что при бросании трёх монет выпало два герба, а событие B в том, что по крайней мере один герб. Что больше $\mathsf{P}\{A|B\}$ или $\mathsf{P}\{A\}$?

55. Приведите примеры, когда $\mathsf{P}\{A|B\} > \mathsf{P}\{A\}$, $\mathsf{P}\{A|B\} = \mathsf{P}\{A\}$, $\mathsf{P}\{A|B\} < \mathsf{P}\{A\}$.

56. При бросании двух одинаковых игральных костей оказалось, что одно из выпавших чисел делится на три. Найдите вероятность того, что и другое число делится на три.

События H_1, H_2, …, H_n образуют *полную группу событий*, если любые два из них несовместны, и $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$, где (напомним) Ω – пространство элементарных событий.

57. События H_1 и H_2 образуют полную группу событий. Вычислите H_1H_2.

58. События H_1 и H_2 образуют полную группу событий. Докажите, что H_1 и H_2 зависимы.

59. В качестве пространства элементарных событий рассматривается множество всевозможных исходов при бросании трёх монет. Приведите пример полной группы событий.

60. События H_1 и H_2 образуют полную группу событий, причём H_1 означает, что через неделю установится солнечная погода. Опишите событие H_2.

61. Верно ли, что события AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}$ образуют полную группу событий для любых событий A и B? Ответ обоснуйте.

62. События A и B не являются несовместными. Вычислите $P\big\{(A + B)|AB\big\}$.

63. Вероятностное пространство Ω – это квадрат S со стороной, длина которой равна одному сантиметру. Квадрат S разделён на четыре одинаковые квадрата прямыми, параллельными сторонам исходного квадрата. Меньшие квадраты обозначены S_1, S_2, S_3 и

S_4. Нумерация начинается с левого нижнего квадрата и продолжается по часовой стрелке. Событие A – это круг радиуса 1 сантиметр с центром, совпадающим с центром квадрата S. Сделайте рисунок и покажите на нём события AS_1, AS_2, AS_3 и AS_4. Проверьте, что $AS = AS_1 + AS_2 + AS_3 + AS_4$. Воспользуйтесь тем, что сложению событий соответствует объединение множеств, а умножению событий – пересечение множеств.

64. События H_1, H_2, ..., H_n образуют полную группу событий. Докажите, что для любого события A выполнено равенство

$$AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n = A. \tag{5}$$

65. События H_1, H_2, ..., H_n образуют полную группу событий. Докажите, что для любого события A выполнено равенство

$$\mathsf{P}\{A\} = \mathsf{P}\{A|H_1\}\,\mathsf{P}\{H_1\} + \mathsf{P}\{A|H_2\}\,\mathsf{P}\{H_2\} + \ldots + \mathsf{P}\{A|H_n\}\,\mathsf{P}\{H_n\} \tag{6}$$

Указание. Воспользуйтесь формулами (1), (3) (5).

Формулу (6) называют *формулой полной вероятности.*

66. В ящике находятся 3 детали, произведенные на заводах A, B и C. Вероятности производства бракованной детали на заводах A, B и C равны 0.05, 0.1 и 0.15 соответственно. Найдите вероятность того, что наугад взятая из ящика деталь окажется бракованной.

67. (шутка) Если в столовой приготовлен вкусный обед, то вероятность прихода проверяющего на занятие равна 0.1. В противном случае она увеличивается до 0.3. Опыт показывает, что вероятность вкусного обеда равна 0.4. Мы находимся в аудитории и пытаемся вычислить вероятность того, что на занятие проверяющий придёт.

68. (продолжение) Проверяющий пришёл на занятие. С какой вероятностью обед был вкусным?
Указание. *1.* Вам нужно вычислить условную вероятность

$$\mathsf{P}\{\text{вкусный обед}|\text{проверяющий пришёл}\}.$$

Введите обозначения, чтобы эта вероятность оказалась записана символами, например $\mathsf{P}\{H_1|A\}$. *2.* Воспользовавшись определением условной вероятности, убедитесь, что

$$\mathsf{P}\{AH_1\} = \mathsf{P}\{H_1|A\}\,\mathsf{P}\{A\} \text{ и } \mathsf{P}\{AH_1\} = \mathsf{P}\{A|H_1\}\,\mathsf{P}\{H_1\}.$$

3. Перепишите предыдущие два равенства в виде $\mathsf{P}\{H_1|A\} = \mathsf{P}\{A|H_1\}\,\mathsf{P}\{???\}/\,\mathsf{P}\{???\}$ и воспользуйтесь формулой полной вероятности.

69. События H_1, H_2, ..., H_n образуют полную группу событий. Докажите, что для любого события A и произвольного индекса i выполнено равенство (оно называется формулой Байеса)

$$\mathsf{P}\{H_i|A\} = \frac{\mathsf{P}\{A|H_i\}\,\mathsf{P}\{H_i\}}{\mathsf{P}\{A|H_1\}\,\mathsf{P}\{H_1\} + \ldots + \mathsf{P}\{A|H_n\}\,\mathsf{P}\{H_n\}}.$$

Указание. По существу, формула Байеса получена в предыдущей задаче.

2.5 Схема Бернулли

Схемой Бенулли называют последовательность из n независимых одинаковых испытаний. В каждом испытании различают два исхода — успех и неудачу. Вероятность успеха в каждом испытании предполагается равной некоторому числу p.

Для наглядности успех и неудача в одном испытании схемы Бернулли обозначаются плюсом $+$ и минусом $-$ соответственно.

70. Чему равна вероятность события $\mathsf{P}\{++++\}$?

71. Вычислите вероятность n успехов в n испытаниях схемы Бернулли.

72. Вычислите вероятность n неудач в n испытаниях схемы Бернулли.

73. Чему равна вероятность события $\mathsf{P}\{+++-\}$?

74. Чему равна вероятность события $\mathsf{P}\{++-+\}$?

75. Сколькими способами может произойти три успеха в четырёх испытаниях схемы Бернулли?
Пусть $q = 1 - p$.

76. Докажите, что вероятность трёх успехов в четырёх испытаниях схемы Бернулли равна $C_4^3 p^3 q$.

77. Докажите, что вероятность $b(k, n, p)$ k успехов в n испытаниях схемы Бернулли равна

$$b(k, n, p) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{7}$$

78. Пользуясь формулой (7) покажите, что $b(k, n, p) > b(k-1, n, p)$ при $0 < k < np + p$ и $b(k, n, p) < b(k-1, n, p)$ при $np + p < k \leq n$.

79. Докажите, что наибольшее (по k) значение $b(k, n, p)$ достигатеся при целых $k \in [np - q, np + p]$. Следовательно, *наиболее вероятное число успехов* в схеме Бернулли находится на интервале $[np - q, np + p]$.

80. Найдите наиболее вероятное число выпадений единицы при двух бросаниях игральной кости? при шестидесяти бросаниях? при пятидесяти девяти бросаниях?

81. Вычислите

$$\sum_{k=0}^{n} b(k, n, p), \quad \sum_{k=0}^{n-1} b(k, n, p).$$

Указание. В схеме Бернулли число успехов может быть равно $0, 1, \ldots, n$. Других значений нет! Вас просят сложить вероятности этих исходов.

82. Какие приближённые формулы используют при вычислении вероятностей $b(k, n, p)$? Какие условия применимости этих приближенных формул?

83. Вычислите приближённо вероятность выпадения пятидесяти гербов при ста бросаниях монеты.

84.* При четырёх бросаниях монеты выпало два герба. Найдите вероятность того, что первый раз выпал герб.

85.* Событие A заключается в том, что при четырёх бросаниях монеты выпало два герба. Событие B означает, что при первом из этих четырёх бросаний выпал герб. Являются ли события A и B зависимыми?

Ответы к упражнениям

Раздел 2.1

1. 9. **2**. 9. **3**. 9. **4**. n^k. **5**. 216. **6**. 32. **7**. 900. **8**. 6. **9**. 6. **10**. 48. **11**. 720. **12**. $n(n-1)\ldots(n-k+1)$. **13**. Нет. **14**. n^k. **15**. $n(n-1)\ldots(n-k+1)$. **16**. 6. **17**. Да. **18**. Нет. **21**. 720. **22**. 120. **23**.

120. **24**. $n(n-1)\dots(n-k+1)/k!$. **25**. Число 10 в левой части уравнения представлено на диаграмме десятью палочками, которые нужно разделить между тремя переменными x, y и z.

$$\underbrace{|\;\;|\;\;|}_{x}\wr\underbrace{|\;\;|}_{y}\wr\underbrace{|\;\;|\;\;|\;\;|\;\;|}_{z}$$

На диаграмме предъявлен пример деления: иксу досталось три палочки, игреку – две, а зету – пять палочек. Разделителями (перегородками) являются знаки $\wr$. Покажите, что каждому решению (то есть набору из трёх чисел x, y и z) соответствует определённое расположение перегородок. В какие места можно ставить перегородки? Сколько существует расположений перегородок? Ответ: C_9^2.

26. Решение (не условие!) принципиально отличается от предыдущей задачи. Здесь нельзя ставить перегородки просто между «палочками», потому что при $y = 0$ приходится ставить обе перегородки в «одно место», что испортит предыдущее рассуждение (убедитесь в этом!). Для решения задачи приходится резервировать $10 + 2$ двенадцать мест (клеточек на диаграмме). Перегородки ставятся в две произвольные клеточки. В остальных – «палочки».

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline | & | & | & \wr & | & | & \wr & | & | & | & | & | & | \\ \hline\end{array}$$

Проверьте, что число способов расположить две перегородки в двенадцати клетках равно числу решений уравнения $x + y + z = 10$ в целых неотрицательных числах. Ответ: C_{12}^2. **27**. C_{n+5}^{n-1}.

Раздел 2.2

33. Да. **34**. Ни в каком.

Раздел 2.3

37. 1/4, 3/4. **38**. 1/4; 1/4, 1/4, 1/2. **44**. $\mathsf{P}\{A\} \approx 0.66$. **45**. 0.008. **46**. 1/72. **47**. 1/2. **48**. 1/27. **49**. 1/6. **50**. $C_6^2 \cdot C_{12}^3 / C_{18}^5$.

Раздел 2.4

51. $\mathsf{P}\{B|A\} = \mathsf{P}\{A\}$. **54**. $\mathsf{P}\{A|B\} > \mathsf{P}\{A\}$. **56**. 1/5. **57**. 0. **61**. Верно. **62**. 1. **67**. 0.22. **68**. $0.1 \cdot 0.4/0.22 = 0.1818$.

Раздел 2.5

70. p^4. **71**. p^n. **72**. $(1-p)^n$. **73**. $p^3(1-p)$. **74**. $p^3(1-p)$. **75**. C_4^3. **80**. 0; 10; 9 и 10. **84**. 0.5. **85**. Да.