1. Сколько различных подмножеств имеет множество, состоящее из n элементов? Ответ обоснуйте.

2. Что такое *сочетание* k *элементов из* n?

3. Докажите $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

4. Докажите $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$.

5. Докажите, $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6$.

6. Докажите,

$$C_6^0 - C_6^1 + C_6^2 - C_6^3 + C_6^4 - C_6^5 + C_6^6 = 0.$$

7. Докажите, что

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

8. Приведите пример пространства элементарных событий. Сколько элементарных событий в этом пространстве?

9. Можно ли считать элементарным событием выпадение пары чисел $(1,2)$ при бросании двух одинаковых игральных костей. Тот же вопрос для разлиных (например, по размеру) костей.

10. Дайте определение суммы и произведения событий. Какое событие называется противоположным к данному? Упростите $A\bar{A}$, $A+A$, AA, $(A+B)(A+\bar{B})$. Перечислите все случаи наступления события $A+B\bar{C}$.

11. Дайте статистическое определение вероятности $\mathsf{P}\{A\}$ события A. Объясните, почему $0 \le \mathsf{P}\{A\} \le 1$. Могут ли выполняться равенства $\mathsf{P}\{A\} = 0$, $\mathsf{P}\{A\} = 1$?

12. Как вводятся вероятности элементарных событий. Чему равна вероятность пространства элементарных событий?

13. Дайте аксиоматическое определение вероятности.

14. Пользуясь аксиоматическим определением вероятности докажите формулу $\mathsf{P}\{A+B\} = \mathsf{P}\{A\} + \mathsf{P}\{B\} - \mathsf{P}\{AB\}$.

15. Пользуясь аксиоматическим определением вероятности докажите формулу $\mathsf{P}\{A+B\} = \mathsf{P}\{A\} + \mathsf{P}\{B\}$ для несовместных событий событий A и B.

16. Пользуясь свойствами вероятности, докажите формулу $\mathsf{P}\{A+B+C\} \le \mathsf{P}\{A\} + \mathsf{P}\{B\} + \mathsf{P}\{C\}$

17. Рассмотрим пространство элементарных событий, определяемое размещением 2 различных шаров в 3 различных ящика. Всем элементарным событиям припишем равные вероятности. Событие S_i состоит в том, что в ящике под номером i находится 1 шар. Проверить формулу

$$\mathsf{P}\left\{S_1 + S_2\right\} = \mathsf{P}\left\{S_1\right\} + \mathsf{P}\left\{S_2\right\} - \mathsf{P}\left\{S_1 S_2\right\}.$$

18. Дайте определение независимости событий A и B. Дайте определение независимости событий A, B и C. Следует ли из равенства $\mathsf{P}\{ABC\} = \mathsf{P}\{A\}\,\mathsf{P}\{B\}\,\mathsf{P}\{C\}$ независимость событий A, B и C. Ответ обоснуйте.

19. Какие события называются несовместными? Вычислите AB для несовместных событий A и B. Докажите, что если события A и B несовместные, то они не являются независимыми.

20. Докажите, что из независимости событий A и B следует независимость событий A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

21. События A и $\bar{B}$ независимы, события A и $\bar{C}$ независимы, события B и C несовместны. Докажите, что события A и $B + C$ независимы.

22. Предположим, что одна из граней правильного тэтраэдра покрашена в белый цвет, вторая — в красный, третья — в черный, а на четвертой грани есть все три цвета. Пусть событие A состоит в том, что на наугад выбранной грани есть белый цвет, событие B — красный, событие C — черный. Являются ли события A, B и C независимыми?

23. Как понимать выражение: точка случайна выбрана в квадрате со стороной a?

24. Дайте определение условной вероятности $\mathsf{P}\{A|B\}$. Приведите примеры, когда $\mathsf{P}\{A|B\} > \mathsf{P}\{A\}$, $\mathsf{P}\{A|B\} = \mathsf{P}\{A\}$, $\mathsf{P}\{A|B\} < \mathsf{P}\{A\}$.

25. При бросании двух одинаковых игральных костей оказалось, что одно из выпавших чисел делится на три. Найдите вероятность того, что и другое число делится на три.

26. Дайте определение полной группы событий. Верно ли, что события AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}$ образуют полную группу событий для любых событий A и B? Ответ обоснуйте.

Предположим, что A, B и C образуют полную группу событий. Могут ли они быть независимыми? Ответ обоснуйте.

27. Из наступления события B следует наступление события A. Верно ли, что $\mathsf{P}\{B\} + \mathsf{P}\{A\bar{B}\} + \mathsf{P}\{\bar{A}\} = 1$. Ответ обоснуйте.

28. Сформулируйте и докажите формулу полной вероятности.

29. Сформулируйте и докажите формулу Байеса.

30. События A и B не являются несовместными. Вычислите $P(A + B|AB)$.

31. Дайте определение схемы Бернулли. Приведите пример. Какими параметрами задается схема Бернулли? Выведите формулу вероятности $b(n, k, p)$ ровно k успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании. Вычислите

$$\sum_{k=0}^{n} b(n, k, p), \quad \sum_{k=0}^{n-1} b(n, k, p).$$

Какими приближенными формулами пользуются при вычислении вероятностей $b(n, k, p)$? Какие условия применимости этих приближенных формул? Какое наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли? Может ли оно отличаться от математического ожидания числа успехов больше, чем на 2.

32. Одновременно подбрасывают две монеты, одна из которых бракованная, то есть вероятность выпадения герба не равна одной второй. Пусть p — вероятность того, что на обеих монетах выпадет герб или на обеих монетах выпадет цифра. Докажите (с помощью формулы полной вероятности), что $p = 1/2$.

33. Дайте определение функции распределения дискретной случайной величины. Как выглядит ее график?

34. Пусть случайная величина X — это число выпавшее на игральной кости. Найдите функцию распределения случайной величины X.

35. Пусть $F(x) = \mathsf{P}\{X \le x\}$ — функция распределения случайной величины X. Вычислите $\mathsf{P}\{a < X \le b\}$.

36. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины. Существуют ли случайные величины, которые не имеют математического ожидания? Ответ обоснуйте.

37. Перечислите основные свойства математического ожидания дискретных случайных величин.

38. Выведите формулу $\mathbf{M}(X+Y) = \mathbf{M}X + \mathbf{M}Y$ для дискретных случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание.

39. Дайте определение независимых случайных величин. Выведите формулу $\mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}X\,\mathbf{M}Y$ для независимых дискретных случайных величин X и Y.

40. Сформулируйте и докажите неравенство Йенсена.

41. Пусть случайная величина X_1 — это число выпадений единицы при десяти бросаниях игральной кости, а X_2 — двойки. Будут ли случайные величины X_1 и X_2 независимыми? Ответ обоснуйте.

42. Дайте определение дисперсии дискретной случайной величины. Существуют ли случайные величины, которые не имеют дисперсии? Ответ обоснуйте. Перечислите основные свойства дисперсии случайных величин.

43. Дайте определение ковариации случайных величин. Перечислите основные свойства ковариации случайных величин.

44. Как определяется и что характеризует коэффициент корреляции $\rho(X, Y)$ случайных величин X и Y? Перечислите основные свойства коэффициента корреляции.

45. Пусть $\rho(X, Y)$ — коэффициент корреляции случайных величин X и Y. Докажите неравенство $|\rho(X, Y)| \leq 1$. Докажите, что если $|\rho(X, Y)| = 1$, то $Y = aX + b$ (где a и b — некоторые числа).

46. Известно, что $\rho(X, Y) = 0.5$. Вычислите $\mathbf{Cov}\left(\frac{X-\mathbf{M}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}}, \frac{Y-\mathbf{M}Y}{\sqrt{\mathbf{D}Y}}\right)$.

47. Какое распределение называется биномиальным? Выведите формулы для математического ожидания и дисперсии биномиального распределения с параметрами n и p. Докажите формулу $p = \sqrt{(\mathbf{M}X - \mathbf{D}X)/n}$.

48. Что называется геометрическим распределением с параметром p? Приведите примеры. Выведите формулы для математического ожидания и дисперсии геометрического распределения с параметром p.

49. Какой закон распределения называется законом Пуассона? Приведите примеры. Выведите формулы для математического ожидания и дисперсии распределения Пуассона. В чем состоит связь между распределением Пуассона и приближенной формулой Пуассона для числа успехов в схеме Бернулли?

50. Случайная величина X определяется как число неудач до первого успеха. Докажите, что

$$\mathsf{P}\left\{X = k\right\} = pq^k,$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$, p и q — вероятности успеха и неудачи в одном испытании соответственно.

51. Случайная величина X задана распределением вероятостей

$$\mathsf{P}\left\{X = k\right\} = pq^k,$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$, а p и q — некоторые числа лежащие на интервале $(0, 1)$, сумма которых равна единице. Вычислите математическое ожидание и дисперсию X.

52. Может ли выполняться равенство $\mathbf{M}(X^2) = \big(\mathbf{M}(X)\big)^2 - 1$? Ответ обоснуйте.

53. Может ли выполняться равенство $\mathbf{M}(X^2) = \big(\mathbf{M}(X)\big)^2$, если случайная величина X не является константой? Ответ обоснуйте.

54. Может ли математическое ожидание случайной величины, принимающей только целые значения быть нецелым числом? Ответ обоснуйте.

55. Независимые случайные величины X_1 и X_2 принимают два значения 3 и 5 с вероятностями 0.4 и 0.6 соответственно. Пусть $Y = \max\left\{X_1, X_2\right\}$. Напишите совместное распределение $\big(X_1, Y\big)$.

56. Независимые случайные величины X_1 и X_2 принимают два значения 3 и 5 с вероятностями 0.4 и 0.6 соответственно. Найдите распределение случайной величины $\mathbf{M}\big(X_1 | X_1 + X_2\big)$.

57. Совместное распределение случайных величин (X_1, X_2) задано таблицей

$X_2 \setminus X_1$	3	5
3	0.2	0.3
5	0.4	0.1

Найдите частные распределения X_1 и X_2 и распределение вероятностей случайной величины $X_1 X_2$.

58. Сформулируйте и докажите неравенство Чебышева.

59. Пусть ξ — число выпадений гербов при восьми бросаниях монеты. Оцените вероятность $\mathsf{P}\{|\xi - 4| \geq 2\}$ с помощью неравенства Чебышева. Вычислите эту вероятность непосредственно.

60. Следует ли из центральной предельной теоремы для последовательности взаимно независимых случайных величин с одинаковым распределением закон больших чисел для этой последовательности? Ответ обоснуйте.

61. Следует ли из центральной предельной теоремы для последовательности взаимно независимых случайных величин с различными распределениями закон больших чисел для этой последовательности? Ответ обоснуйте.

62. Исходя из центральной предельной теоремы, докажите формулу Муавра-Лапласа для числа успехов в схеме Бернулли.

63. Рассмотрим последовательность независимых бросаний симметричной кости. Пусть X_k — число очков, выпавших при k-ом бросании. С помощью центральной предельной теоремы оцените

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - 3.5n\right| < 0.6744\sqrt{\frac{35n}{12}}\right\}.$$

64. Выполнен ли закон больших чисел и центральная предельная теорема для последовательности взаимно независимых случайных величин X_k, распределение которых задано таблицей

X_k	-1	0	1
P	$\frac{1}{2k}$	$1 - \frac{1}{k}$	$\frac{1}{2k}$

65. Выполнен ли закон больших чисел для последовательности взаимно независимых случайных величин X_k, распределение которых задано таблицей

X_k	$-\sqrt{k}$	0	$\sqrt{k}$
P	$\frac{1}{2^k}$	$1 - \frac{1}{2^{k-1}}$	$\frac{1}{2^k}$

66. Выполнен ли закон больших чисел и центральная предельная теорема для последовательности взаимно независимых случайных величин, распределение которых задано таблицей

X_k	$-k$	0	k
P	$\frac{1}{k}$	$1-\frac{2}{k}$	$\frac{1}{k}$

67. Дайте определение непрерывной функции распределения. Как найти вероятности $\mathsf{P}\{a \leq X \leq b\}$ и $\mathsf{P}\{a < X < b\}$, если известна функция распределения случайной величины X? Ответ обоснуйте.

68. Дайте определение плотности распределения. Какая случайная величина называется абсолютно непрерывной? Может ли случайная величина иметь следующую плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} e^{-6x}, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Ответ обоснуйте.

69. Плотность распределения случайной величины X задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x \in [0.2]; \\ 0, & \text{если } x \notin [0.2]. \end{cases}$$

Найдите функцию распределения случайной величины X.

70. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1,5]$. Найдите вероятность $P\{1/X > 4\}$.

71. Случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения $F_X(x)$, случайная величина $Y = 7 - 9X$ имеет непрерывную функцию распределения $F_Y(y)$. Выразите F_Y через F_X.

72. Случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения $F_X(x)$, случайная величина $Y = e^X$ имеет непрерывную функцию распределения $F_Y(y)$. Выразите F_Y через F_X.

73. Непрерывная случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$, случайная величина $Y = e^X$ имеет плотность распределения $g(x)$. Выразите $g(x)$ через $f(x)$.

74. Нормальная случайная величина X имеет математическое ожидание -1 и дисперсию 4. Найдите вероятность того, что $|X| > 1$.

75. Функция распределения $F(x)$ случайной величины X равна 0, если $x < 2$, равна $(x-2)^2$, если $x \in [2,3]$ и равна 1, если $x > 3$. Вычислите $\mathbf{M}X$.

76. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-6x}, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения случайной величины $Y = \sqrt{X}$.

77. Объясните, что такое генеральная совокупность, повторная и бесповторная выборка.

78. Дайте определение среднего, дисперсии выборки и выборочной функции распределения. Вычислите их для выборки: 2, 5, 2, 1, 2. Дайте определение моментов порядка ν. Напишите формулу коэффициентов ассиметрии и эксцесса. Объясните с помощью графика, что означает положительный коэффициент ассиметрии.

79. Как вводятся основные характеристики выборки: среднее, дисперсия, центральные моменты высших порядков, коэффициенты ассиметрии и эксцесса? Какие из перечисленных характеристик остаются неизменными при линейных преобразованиях $x \to ax + b$?

80. Докажите, что оценка $m = (1/n) \sum x_i$ среднего значения μ неизвестного распределения является состоятельной.

81. Дана выборка x_1, x_2, x_3. Является ли оценка $0.25x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3$ несмещённой оценкой среднего генеральной совокупности? Ответ обоснуйте.

82. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка из распределения с дисперсией σ^2. Докажите, что $s^2 = \big(1/(n-1)\big) \sum (x_i - \bar{x})^2$ является несмещённой оценкой дисперсии.

83. Даны две оценки $m_1 = 0.1x_1 + 0.9x_2$ и $m_2 = 0.5x_1 + 0.5x_2$ среднего значения μ неизвестного распределения. Являются ли эти оценки несмещёнными? У какой из оценок меньше диспресия?

84. Найдите значения параметра a, лежащие на отрезке $[0, 1]$, при которых оценка $ax_1 + (1-a)x_2$ среднего значения μ неизвестного распределения является несмещённой. Среди этих оценок найдите оценку с наименьшей дисперсией.

85. Докажите, что оценка $(1/n) \sum_{i=1}^{n} x_i$ математического ожидания нормально распределённой случайной величины является эффективной.

86. Вычислите математическое ожидание оценки $\bar{x}$ среднего бесповоторной выборки.

87. Докажите, что дисперсия выборочной доли равна $\frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma^2}{n}$, где σ^2 — дисперсия генеральной совокупности.