

УДК 512.734

Аскольду Георгиевичу Хованскому к 65-летию,
с благодарностью и восхищениемИсчисление Шуберта
и многогранники Гельфанда–Цетлина

В. А. Кириченко, Е. Ю. Смирнов, В. А. Тиморин

Мы описываем новый подход к исчислению Шуберта на многообразиях полных флагов, используя многочлен объема, связанный с многогранниками Гельфанда–Цетлина. Этот подход позволяет вычислять произведения (пересечения) циклов Шуберта, пересекая грани многогранника.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: многообразие флагов, исчисление Шуберта, многогранник Гельфанда–Цетлина, многочлен объема.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	90
1.1. Основные результаты	90
1.2. История исчисления Шуберта	93
2. Кольцо многогранника	94
2.1. Кольца, связанные с многочленами	94
2.2. Многочлен объема	96
2.3. Структура колец многогранников	98
2.4. Пример: многогранники Гельфанда–Цетлина в \mathbb{R}^3	100
3. Многогранник Гельфанда–Цетлина и его кольцо	103
3.1. Многогранник Гельфанда–Цетлина	103
3.2. Грани и диаграммы граней	104
3.3. Когановские грани	105
4. Циклы Шуберта и грани	107
4.1. Циклы Шуберта	107
4.2. Многочлены Шуберта	107
4.3. Представление циклов Шуберта при помощи граней	108

Работа поддержана РФФИ (грант № 10-01-00540-а), Лабораторией алгебраической геометрии НИУ ВШЭ (грант правительства РФ дог. № 11.G34.31.0023), Федеральным агентством по науке и инновациям (грант № 02.740.11.0608), фондом Саймонса (Е.С., В.Т.), фондом “Династия” (В.К.), стипендией Делиня (В.Т.), грантом Президента РФ МК-2790.2011.1 (В.Т.), грантами РФФИ № 11-01-00289-а, 12-01-00944 (Е.С.), 11-01-00654-а (В.Т.), грантами РФФИ–CNRS № 10-01-93110-а (В.К.), 10-01-93111-а (Е.С.). В данной научной работе использованы результаты, полученные в ходе выполнения проектов № 11-01-0152 и 11-01-0159, реализованных в рамках Программы “Научный фонд НИУ ВШЭ” в 2012–2013 гг.

© В. А. Кириченко, Е. Ю. Смирнов, В. А. Тиморин, 2012

5. Характеры Демажюра	110
5.1. Характеры	110
5.2. Степени многообразий Шуберта	113
5.3. Формула Демажюра для характера	114
5.4. Зеркальный митоз	115
6. Митоз на параллелепипедах	116
6.1. Параллелепипеды	117
6.2. Комбинаторика параллелепипедов	119
6.3. Диаграммы слоя, лестничные движения и доказательство ключевой леммы 5.8	123
Список литературы	127

1. Введение

1.1. Основные результаты. В этой статье мы исследуем связь между исчислением Шуберта и многочленом объема на пространствах выпуклых многогранников. Мы приводим различные представления циклов Шуберта на многообразии полных флагов через суммы граней многогранника Гельфанда–Цетлина. Наша работа мотивирована богатым взаимодействием между алгебраической геометрией и выпуклыми многогранниками, первоначально исследованным для торических многообразий и недавно перенесенным в более общий контекст [10].

Один из наших главных инструментов – это конструкция из [22], которая ставит в соответствие каждому выпуклому многограннику $P \subset \mathbb{R}^d$ градуированное коммутативное кольцо R_P (оно называется *кольцом многогранника*), обладающее двойственностью Пуанкаре (см. [23] или раздел 2). Для *целочисленно простого* многогранника P (простота означает, что в каждой вершине сходятся в точности $d = \dim(P)$ ребер, а целочисленная простота означает, что примитивные целочисленные векторы, параллельные ребрам, порождают решетку \mathbb{Z}^d) кольцо R_P изоморфно кольцу Чжоу соответствующего торического многообразия X_P [22]. Грани многогранника P отождествляются с некоторыми элементами кольца R_P , которые порождают R_P как группу по сложению. Если $[F]$ – это элемент кольца R_P , соответствующий грани F , то $[F] \cdot [G] = [F \cap G]$ в R_P , при условии, что F и G трансверсальны. Отдельные грани многогранника P представляют циклы, заданные замыканиями орбит тора в X_P . В этой статье нас в первую очередь интересует случай, когда P не является простым. Кьюмарс Каве связал кольца многогранников некоторых непростых многогранников с кольцами Чжоу гладких неторических сферических многообразий [9]. В частности, он заметил, что кольцо R_P для *многогранника Гельфанда–Цетлина* $P = P_\lambda$ (который не является простым), связанного со строго доминантным весом $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ группы $GL_n(\mathbb{C})$, изоморфно кольцу Чжоу многообразия X полных флагов в \mathbb{C}^n . Напомним, что многогранник Гельфанда–Цетлина $P_\lambda \subset \mathbb{R}^d$, где $d := n(n-1)/2$ обозначает размерность многообразия флагов, задается $2d$ неравенствами, зависящими от λ (см. п. 3.1).

Когда P не прост, нет очевидного соответствия между гранями многогранника P и элементами кольца R_P . Один из результатов настоящей статьи –

общая конструкция, которая ставит в соответствие каждому элементу кольца R_P линейную комбинацию граней многогранника P (хотя не каждая грань многогранника P соответствует элементу кольца R_P). А именно, мы вкладываем кольцо R_P в некоторый \mathbb{Z} -модуль M_P , элементы которого можно рассматривать как линейные комбинации произвольных граней многогранника P по модулю некоторых соотношений (см. раздел 2). Модуль M_P зависит от выбора *разрешения* многогранника P . На алгебро-геометрическом уровне R_P можно рассматривать как подкольцо кольца Чжоу особого торического многообразия X_P , порожденное группой Пикара, и M_P можно построить, используя разрешение особенностей для X_P . Однако мы описываем M_P в элементарных терминах, используя выпуклую геометрию. Ключевой аспект такого представления суммами граней состоит в том, что мы по-прежнему можем перемножать элементы кольца R_P , пересекая грани (при условии, что грани, которые мы пересекаем, трансверсальны).

Наша конструкция применима к любому выпуклому многограннику P , но особенно интересно изучать случаи, когда $P = P_\lambda$ — это многогранник Гельфанда–Цетлина, поскольку в этом случае имеет место изоморфизм $R_P \simeq CH^*(X)$ для многообразия флагов X . Напомним, что $CH^*(X)$ (как группа) является свободной абелевой группой с базисом из циклов Шуберта $[X^w]$, где w пробегает все перестановки S_n (см. определение цикла Шуберта в п. 4.1). В частности, наша конструкция позволяет представлять циклы Шуберта как линейные комбинации граней многогранника Гельфанда–Цетлина многими разными способами (см. теорему 4.3, предложение 3.2, следствие 4.5), что имеет приложения к исчислению Шуберта.

Хотя связь между многообразиями Шуберта и некоторыми гранями многогранника Гельфанда–Цетлина была впервые обнаружена в [15], а затем другими методами также в [16] и [12], только наш подход развивает эту связь до такого уровня, при котором можно моделировать исчисление Шуберта через многогранник Гельфанда–Цетлина. Результаты работ [15], [16] не имеют приложений к исчислению Шуберта, поскольку в них для каждого многообразия Шуберта строится только одно представление в виде суммы граней. Кольцо многогранника R_P и \mathbb{Z} -модуль M_P позволяют нам получить новые представления для циклов Шуберта, в частности, любые два цикла Шуберта $[X^w]$ и $[X^{w'}]$ мы можем представить как суммы граней так, чтобы каждая грань, участвующая в разложении цикла $[X^w]$, была трансверсальна каждой грани, участвующей в разложении цикла $[X^{w'}]$. Поэтому пересечение любых двух циклов Шуберта представляется линейной комбинацией граней с неотрицательными коэффициентами, что напрямую связано с одной из основных задач исчисления Шуберта — комбинаторной интерпретацией положительности структурных констант (см. п. 1.2). Более точно, мы получаем следующий результат (см. также следствие 4.6).

ТЕОРЕМА 1.1. *Произведение любых двух циклов Шуберта $[X^w]$ и $[X^u]$ выражается как сумма следующих граней:*

$$[X^w] \cdot [X^u] = \sum_{\substack{w(F)=w, \\ w(F^*)=w_0 u w_0^{-1}}} [F \cap F^*],$$

где F и F^* пробегают соответственно множество всех приведенных когановских и двойственных когановских граней многогранника P_λ .

Здесь через $w_0 \in S_n$ обозначена самая длинная перестановка, переводящая i в $(n - i + 1)$. Приведенными двойственными когановскими гранями мы называем rs -грани работы [16] (см. п. 4.3). Когановские грани определяются в п. 3.3 и характеризуются тем, что содержат простую вершину v многогранника Гельфанда–Цетлина, имеющую минимальную сумму координат (соответственно, двойственные когановские грани содержат вершину v^* с максимальной суммой координат). Каждая когановская грань трансверсально пересекает каждую двойственную когановскую грань (поскольку не существует гиперграни, содержащей одновременно v и v^*). Для каждой когановской или двойственной когановской грани F можно определить перестановку $w(F) \in S_n$, ставя в соответствие гиперграням, содержащим v или v^* , простые транспозиции, и затем перемножая их в определенном порядке (см. подробности в п. 3.3).

Связь между исчислением Шуберта и многогранниками Гельфанда–Цетлина яснее всего видна из теории представлений группы $GL_n(\mathbb{C})$. Напомним, что по определению многогранников Гельфанда–Цетлина целые точки внутри и на границе многогранника P_λ параметризуют естественный базис (базис Гельфанда–Цетлина) в неприводимом GL_n -модуле старшего веса V_λ со старшим весом λ . В частности, каждой целой точке $z \in P_\lambda$ мы можем поставить в соответствие ее вес $p(z)$ в решетке весов группы GL_n (т.е. в решетке характеров максимального тора в GL_n). С другой стороны, теорема Бореля–Вейля–Ботта дает геометрическое описание модуля V_λ как двойственного к пространству глобальных сечений некоторого линейного расслоения \mathcal{L}_λ на многообразии флагов X (см. раздел 5). Тем самым, базис в пространстве сечений линейного расслоения на X параметризуются целыми точками в соответствующем многограннике Гельфанда–Цетлина, что позволяет использовать методы теории многогранников Ньютона. Аналогично, пространство сечений расслоения \mathcal{L}_λ , ограниченного на многообразии Шуберта X^w , двойственно к B^- -подмодулю модуля V_λ , так называемому модулю Демазюра $V_{\lambda,w}^-$ (через $B^- \subset GL_n$ обозначается подгруппа нижнетреугольных матриц). Естественно спросить, можно ли запараметризовать базис в $V_{\lambda,w}^-$ целыми точками в гранях многогранника Гельфанда–Цетлина. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема. Для каждого многообразия Шуберта X^w и строго доминантного веса λ мы реализуем соответствующий характер $\chi_w(\lambda)$ модуля Демазюра $V_{\lambda,w}^-$ как экспоненциальную сумму по целым точкам в объединении когановских граней (см. также теорему 5.1).

ТЕОРЕМА 1.2. *Для всякой перестановки $w \in S_n$ характер Демазюра $\chi_w(\lambda)$ имеет вид*

$$\chi_w(\lambda) = \sum_{z \in A_{\lambda,w} \cap \mathbb{Z}^d} e^{p(z)},$$

где $A_{\lambda,w} := \bigcup_{w(F_\lambda)=w} F_\lambda$ – это объединение всех приведенных когановских граней многогранника Гельфанда–Цетлина P_λ с перестановкой w .

Это обобщает тождество из [21; следствие 15.2] для характера Демазюра 132-избегающей или, по другой терминологии, кемпфовской перестановки w . Такие перестановки также называются *доминантными*, но мы вместо этого будем использовать термин “кемпфовская”. Заметим, что перестановка является кемпфовской, если и только если существует единственная приведенная когановская грань с такой перестановкой (см. [15; предложение 2.3.2]), и это в точности грань, рассмотренная в [21]. Теорема 1.2 позволяет изучать геометрию многообразий Шуберта методами теории многогранников Ньютона (см. раздел 5).

Чтобы доказать нашу формулу для характера Демазюра, мы используем элементарную выпуклую геометрию вместе с простой комбинаторной процедурой (носящей название *митоз*), введенной в [14] (см. также [19], где содержится элементарное изложение митоза) для работы с операторами разделенных разностей. В частности, наше доказательство дает геометрическую реализацию митоза (см. п. 6.2). В качестве побочного продукта мы строим минимальную реализацию симплекса как кубического комплекса, отличную от ранее известных реализаций (см. предложение 6.6).

Несколько слов об организации материала в этой статье. В разделе 2 мы напоминаем определение кольца многогранника R_P , обсуждаем его свойства и строим модуль M_P для непростого P . В разделе 3 мы изучаем кольца многогранников Гельфанда–Цетлина. В разделе 4 мы представляем циклы Шуберта гранями. В разделе 5 мы приводим формулы для характеров Демазюра, функций Гильберта и степеней многообразий Шуберта через грани и выводим из этих формул некоторые результаты раздела 4. В разделе 6 мы описываем простую геометрическую версию митоза (*парамитоз*) и используем ее для доказательства формул для характеров Демазюра из раздела 5.

1.2. История исчисления Шуберта. Основы исчисления Шуберта были заложены в XIX веке немецким математиком Германом Шубертом, который разработал общий метод для решения задач исчислительной геометрии. Например, классическая задача о том, сколько прямых в трехмерном пространстве проходит через четыре данные, сводится к вычислению произведений циклов Шуберта в грассманиане $G(2, 4)$. Для произвольного грассманиана существует алгоритм, называемый *правилом Литтлвуда–Ричардсона*, для вычисления структурных констант кольца Чжоу в базисе из циклов Шуберта, дающий комбинаторное доказательство неотрицательности структурных констант – каждая из них оказывается равной числу диаграмм Юнга с определенными свойствами (см., например, [8] или [18; гл. 1]).

Для многообразия полных флагов существует простой алгоритм умножения циклов Шуберта, но из него не следует комбинаторного доказательства неотрицательности структурных констант. При этом неотрицательность, как и в случае грассманиана, легко следует из геометрических соображений: поскольку любое многообразие (частичных) флагов является однородным пространством относительно действия группы GL_n , любые два подмногообразия можно привести действием группы в трансверсальное положение по теореме Клеймана о трансверсальности [13]. Отсюда уже несложно вывести, что пересечение двух циклов Шуберта является линейной комбинацией циклов Шуберта с неотрицательными коэффициентами. Комбинаторная интерпретация положительности

структурных констант была недавно получена лишь для двухшаговых многообразий флагов [5], причем возникающая при этом комбинаторика по сложности существенно превосходит классическое правило Литтлвуда–Ричардсона для грассманианов. Случай многообразия полных флагов пока открыт.

Поскольку кольцо Чжоу многообразия полных флагов в \mathbb{C}^n порождается группой Пикара, то это кольцо можно представить как факторкольцо кольца $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ многочленов от n переменных (см. [18; теорема 3.6.15]). Такое описание называется *представлением Бореля*. Реализация циклов Шуберта многочленами в представлении Бореля была получена в работах [3], [6] с помощью *операторов разделенных разностей* или *операторов Демажюра* (см. теорему 4.2). Тем самым, можно перемножать циклы Шуберта как многочлены в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$.

Интересно отметить, что операторы Демажюра (точнее, их K -теоретические версии) также играют важную роль в теории представлений, а именно, позволяют вычислять характеры Демажюра. Это было замечено еще в [6], но строгое доказательство появилось позже в [1] (см. теорему 5.6). Это одно из проявлений связи между исчислением Шуберта и теорией представлений. Другое ее проявление заключается в том, что правило Литтлвуда–Ричардсона для грассманиана дает также правило разложения тензорного произведения двух неприводимых GL_n -модулей на неприводимые модули.

В работе [17] были определены многочлены Шуберта – наиболее естественные представители циклов Шуберта в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Многочлены Шуберта стали популярной темой алгебраической комбинаторики. Одним из ярких результатов в этой области является теорема Кириллова–Фомина (см. [7] или п. 4.2), из которой следует, что каждый многочлен Шуберта является линейной комбинацией мономов с целыми неотрицательными коэффициентами (из определения многочленов Шуберта неотрицательность коэффициентов не очевидна).

Заметим, что подход к исчислению Шуберта, изложенный в настоящей работе, дает новую комбинаторную модель исчисления Шуберта, отличную от модели, основанной на многочленах Шуберта (см. замечание 2.5).

Благодарности. Этот проект был начат, когда первый, второй и третий автор, соответственно, сотрудничали с Математическим институтом Макса Планка (МРІМ), Математическим центром Хаусдорфа в Бонне и Университетом Якобса в Бремене. Дальнейшее развитие проект получил, когда первый и третий авторы посещали Свободный университет Берлина и МРІМ в Бонне. Мы хотим поблагодарить эти организации за гостеприимство, финансовую поддержку и прекрасные условия для работы.

Авторы благодарны Мишелю Бриону, Аскольду Георгиевичу Хованскому и Аллену Кнутсону за полезные обсуждения.

2. Кольцо многогранника

2.1. Кольца, связанные с многочленами. Следуя [22], мы свяжем с каждым однородным многочленом градуированное коммутативное кольцо. Затем мы рассмотрим интересующий нас частный случай многочлена объема на

пространстве многогранников с данным нормальным веером. Пусть Λ_f – решетка, т. е. свободный \mathbb{Z} -модуль, а f – однородный многочлен на вещественном векторном пространстве $V_f = \Lambda_f \otimes \mathbb{R}$, содержащем решетку Λ_f . Симметрическую алгебру $\text{Sym}(\Lambda_f)$ решетки Λ_f можно представлять себе как кольцо дифференциальных операторов с постоянными целыми коэффициентами, действующее на пространстве $\mathbb{R}[V_f]$ всех многочленов на V_f . Если $D \in \text{Sym}(\Lambda_f)$ и $\phi \in \mathbb{R}[V_f]$, то мы обозначаем через $D\phi \in \mathbb{R}[V_f]$ результат этого действия. Определим A_f как однородный идеал в алгебре $\text{Sym}(\Lambda_f)$, состоящий из всех дифференциальных операторов D таких, что $Df = 0$. Положим $R_f = \text{Sym}(\Lambda_f)/A_f$. Мы будем называть это кольцо *кольцом, связанным с многочленом f* .

Пусть Λ_g – другая решетка и $\sigma: \Lambda_g \rightarrow \Lambda_f$ – гомоморфизм решеток. Определим многочлен $g \in \mathbb{R}[V_g]$ формулой $\sigma^*(f) = f \circ \sigma$. Мы хотим описать связь между кольцами R_f и R_g , связанными с этими двумя многочленами. К сожалению, нет никакого естественного гомоморфизма между этими кольцами. Тем не менее, можно сформулировать следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Определены естественная абелева группа $M_{f,g}$, естественный эпиморфизм $\pi: R_f \rightarrow M_{f,g}$ и естественный мономорфизм $\iota: R_g \rightarrow M_{f,g}$ такие, что*

$$\pi(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) = \iota(\alpha\beta)$$

при условии, что $\pi(\tilde{\alpha}) = \iota(\alpha)$ и $\pi(\tilde{\beta}) = \iota(\beta)$.

Это предложение можно использовать следующим образом. Элементы кольца R_g допускают естественное вложение в группу $M_{f,g}$. Хотя элементы группы $M_{f,g}$ в общем случае нельзя перемножать, можно поднять в R_f пару элементов, приходящих из R_g , перемножить их в кольце R_f и спроецировать произведение обратно на группу $M_{f,g}$. Во многих случаях это сделать легче, чем непосредственно перемножать элементы кольца R_g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим \mathbb{Z} -подмодуль $A_{f,g}$ модуля $\text{Sym}(\Lambda_f)$, состоящий из всех операторов D , обладающих свойством $\sigma^*(Df) = 0$. Далее, положим $M_{f,g} = \text{Sym}(\Lambda_f)/A_{f,g}$. Ясно, что $A_f \subset A_{f,g}$; таким образом, мы получаем естественную проекцию $\pi: R_f \rightarrow M_{f,g}$. Пусть $\sigma_*: \text{Sym}(\Lambda_g) \rightarrow \text{Sym}(\Lambda_f)$ – гомоморфизм, индуцированный отображением σ . Для дифференциального оператора $D \in \text{Sym}(\Lambda_g)$ обозначим через $[D]$ класс оператора D в кольце R_g . Определим $\iota([D])$ как класс в группе $M_{f,g}$ оператора $\sigma_*(D)$.

Чтобы убедиться, что оператор $\iota([D])$ корректно определен, мы воспользуемся формулой

$$\sigma^*(\sigma_*(D)\phi) = D\sigma^*\phi$$

для каждого $\phi \in \mathbb{R}[V_f]$. Эта формула очевидна в случае $D \in \Lambda_g$, и обе части этой формулы зависят от оператора D мультипликативно. В частности, мы получаем

$$\sigma^*(\sigma_*(D)f) = D\sigma^*f = Dg,$$

что равно нулю в случае, если D лежит в A_g . Следовательно, элемент $\iota([D])$ корректно определен: если $D \in A_g$, то $\sigma_*(D) \in A_{f,g}$. Из той же формулы вытекает, что отображение ι инъективно: если $\iota([D]) = 0$, т. е. $\sigma_*(D) \in A_{f,g}$, то $D \in A_g$.

Остается доказать, что $\pi(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) = \iota(\alpha\beta)$ при условии, что $\pi(\tilde{\alpha}) = \iota(\alpha)$ и $\pi(\tilde{\beta}) = \iota(\beta)$. Но это непосредственно вытекает из формулы $\sigma_*(DE) = \sigma_*(D)\sigma_*(E)$. Предложение доказано.

ПРИМЕР 2.2. Приведем пример, иллюстрирующий предложение 2.1. Рассмотрим многочлен $f(x, y, z) = (x+y)^2 + xz$, определенный на пространстве \mathbb{R}^3 . Будем считать, что решетка Λ_f совпадает со стандартной целочисленной решеткой \mathbb{Z}^3 . Тогда кольцо R_f порождено над целыми числами классами $[\partial_x]$, $[\partial_y]$ и $[\partial_z]$ дифференциальных операторов ∂_x , ∂_y и ∂_z соответственно. Эти классы подчиняются соотношениям

$$[\partial_x]^2 = [\partial_y]^2 = [\partial_x][\partial_y] = 2[\partial_x][\partial_z], \quad [\partial_y][\partial_z] = [\partial_z]^2 = 0,$$

а также соотношениям, происходящим из того факта, что класс любого дифференциального оператора порядка 3 и выше равен нулю. Элементы 1 , $[\partial_x]$, $[\partial_y]$, $[\partial_z]$, $[\partial_x]^2$ образуют аддитивный базис в R_f (т. е. свободно порождают R_f как \mathbb{Z} -модуль). Таким образом, аддитивная группа кольца R_f имеет ранг 5. Рассмотрим гомоморфизм \mathbb{Z} -модулей $\phi: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$, заданный формулой $\phi(\xi, \eta) = (\xi, \eta, 0)$. Тогда многочлен $g = \phi^*f$ имеет вид $(\xi + \eta)^2$. Соответствующее кольцо R_g порождено классом $[\partial_\xi] = [\partial_\eta]$ с соотношением $[\partial_\xi]^3 = 0$. Таким образом, аддитивная группа кольца R_g имеет ранг 3 и свободно порождается элементами 1 , $[\partial_\xi]$, $[\partial_\xi]^2$. Теперь рассмотрим \mathbb{Z} -модуль $M_{f,g}$. Элементы этого модуля находятся во взаимно однозначном соответствии с ограничениями многочленов Df на подпространство $z = 0$, где D пробегает все дифференциальные операторы из $\text{Sym}(\Lambda_f)$. Соответствующее пространство многочленов имеет ранг 4 и свободно порождается многочленами 1 , $2(x+y)$, x , $(x+y)^2$. Мы будем отождествлять элементы модуля $M_{f,g}$ с соответствующими многочленами. Проекция $\pi: R_f \rightarrow M_{f,g}$ переводит элементы $[\partial_x]$ и $[\partial_y]$ в один и тот же многочлен $2(x+y)$, в частности, отображение π не является инъективным. Вложение $\iota: R_g \rightarrow M_{f,g}$ переводит аддитивные образующие 1 , $[\partial_\xi]$, $[\partial_\xi]^2$ кольца R_g в многочлены $(x+y)^2$, $2(x+y)$, 2 , в частности, многочлен x не принадлежит образу отображения ι .

2.2. Многочлен объема. Рассмотрим множество всех выпуклых многогранников размерности d в \mathbb{R}^d . Это множество можно наделить структурой коммутативной полугруппы при помощи *суммы Минковского*

$$P_1 + P_2 = \{x_1 + x_2 \in \mathbb{R}^d \mid x_1 \in P_1, x_2 \in P_2\}.$$

Нетрудно проверить, что эта группа удовлетворяет условию сокращения. Многогранники можно также умножать на неотрицательные вещественные числа, что сводится к применению гомотетии:

$$\lambda P = \{\lambda x \mid x \in P\}, \quad \lambda \geq 0.$$

Следовательно, можно вложить полугруппу выпуклых многогранников в ее группу Гротендика V , которая получает естественную структуру (бесконечномерного) вещественного векторного пространства. Элементы пространства V называются *виртуальными многогранниками*. Напомним, что два выпуклых

многогранника называются *аналогичными*, если они имеют один и тот же нормальный веер, т. е. имеется взаимно однозначное соответствие между гранями многогранника P и гранями многогранника Q , для которого любой линейный функционал, ограничение которого на P достигает максимума на данной грани $F \subseteq P$, обладает тем свойством, что ограничение этого функционала на Q достигает своего максимального значения на соответствующей грани многогранника Q (множество линейных функционалов, ограничения которых на многогранник P достигают максимального значения на грани $F \subseteq Q$, образуют конус C_F ; *нормальный веер* многогранника P определяется как множество конусов C_F , соответствующих всем граням $F \subseteq Q$). Мы говорим, что виртуальный многогранник аналогичен многограннику P , если его можно представить в виде разности двух выпуклых многогранников, аналогичных многограннику P . Все виртуальные многогранники, аналогичные многограннику P , образуют конечномерное подпространство $V_P \subset V$. На векторном пространстве V определен однородный многочлен vol степени d , который называется *многочленом объема*. Зафиксируем постоянную (трансляционно инвариантную) форму объема на \mathbb{R}^d . Если зафиксирована целочисленная решетка $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$, мы всегда будем выбирать форму объема таким образом, чтобы объем фундаментального параллелепипеда решетки \mathbb{Z}^d был равен 1. Если форма объема на пространстве \mathbb{R}^d фиксирована, то многочлен объема на пространстве V однозначно характеризуется тем свойством, что его значение $\text{vol}(P)$ на всяком выпуклом многограннике P равно объему многогранника P . Нас будет интересовать ограничение vol_P многочлена объема vol на подпространство V_P всех виртуальных многогранников, аналогичных многограннику P .

Рассмотрим целочисленный выпуклый многогранник P (т. е. выпуклый многогранник с целочисленными вершинами) размерности d , не обязательно простой. Пусть Λ_P – решетка в пространстве V_P , порожденная некоторыми выпуклыми многогранниками, аналогичными многограннику P (мы не предполагаем, что решетка Λ_P содержит все выпуклые многогранники, аналогичные многограннику P ; так что эта решетка может зависеть от некоторых дополнительных параметров, а не только от многогранника P). Допустим, что Q – выпуклый многогранник с целыми вершинами, нормальный веер которого является симплицальным подразбиением нормального веера многогранника P . В этом случае многогранник Q называется *разрешением* многогранника P (заметим, что, поскольку нормальный веер многогранника Q симплицальный, многогранник Q простой). С многочленом объема vol_P , ограниченным на решетку Λ_P , мы свяжем *кольцо многогранника* $R_P := R_{\text{vol}_P}$. Аналогичным образом, для простого многогранника Q мы рассмотрим кольцо $R_Q := R_{\text{vol}_Q}$, связанное с многочленом объема vol_Q на решетке Λ_Q (мы будем всегда предполагать, что эта решетка порождена *всеми* целочисленными многогранниками, аналогичными многограннику Q). Мы будем пользоваться \mathbb{Z} -модулем $M_{Q,P} := M_{\text{vol}_Q, \text{vol}_P}$, введенным в предложении 2.1, вместе с гомоморфизмами $\iota: R_P \rightarrow M_{Q,P}$ и $\pi: R_Q \rightarrow M_{Q,P}$. Поскольку ι является каноническим вложением, мы будем отождествлять элементы кольца R_P с их ι -образами в группе $M_{Q,P}$. Каждой грани \tilde{F} многогранника Q мы поставим в соответствие грань F многогранника P со свойством $C_{\tilde{F}} \subset C_F$, которую будем назы-

вать P -вырождением грани \tilde{F} (или просто *вырождением*, если многогранник P фиксирован). Грань F многогранника P называется *регулярной* (относительно многогранника Q), если есть только одна грань \tilde{F} многогранника Q такая, что грань F является вырождением грани \tilde{F} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть v – простая вершина многогранника P , т. е. в точности $d = \dim(P)$ гиперграней многогранника P пересекаются в вершине v . Кроме того, предположим, что никакая гипергрань многогранника Q не вырождается в грань меньшей размерности. Тогда всякая грань многогранника P , содержащая вершину v , является регулярной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_d$ – все гиперграны многогранника P , содержащие вершину v (они, очевидно, регулярны). Обозначим через $\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_d$ соответствующие (параллельные) гиперграны многогранника Q . Заметим, что пересечения различных подсовокупностей совокупности множеств $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_d\}$ являются различными гранями многогранника P . Ясно, что пересечение гиперграней $\tilde{\Gamma}_i$ вырождается в пересечение соответствующих гиперграней Γ_i (которое имеет такую же размерность), а все остальные грани многогранника Q вырождаются в грани многогранника P , не содержащие вершины v . Это доказывает требуемое утверждение.

2.3. Структура колец многогранников. Мы обсудим теперь более детально структуру кольца R_Q . Для каждой гиперграны Γ многогранника Q определен дифференциальный оператор $\partial_\Gamma \in \text{Sym}(\Lambda_Q)$ такой, что для каждого выпуклого многогранника Q' , аналогичного многограннику Q , число $\partial_\Gamma \text{vol}_Q(Q')$ равно $(d-1)$ -мерному объему гиперграны многогранника Q' , параллельной гиперграны Γ . Идеал $A_Q := A_{\text{vol}_Q}$ можно описать достаточно просто. Он порождается (как идеал) следующими двумя группами дифференциальных операторов [23]:

- образами целочисленных векторов $a \in \mathbb{Z}^d$ при естественном вложении решетки \mathbb{Z}^d в решетку $\Lambda_Q = \text{Sym}^1(\Lambda_Q)$, при котором $Q+a$ совпадает с результатом параллельного переноса многогранника Q на вектор a ;
- операторами вида $\partial_{\Gamma_1} \cdots \partial_{\Gamma_k}$, где $\Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k = \emptyset$.

Многочлен объема на пространствах V_Q ранее использовался в статье [22] для того, чтобы описать кольца когомологий торических многообразий, построенных по простым многогранникам. Мы вкратце напомним это описание. Всякий целочисленный многогранник Q определяет торическое многообразие X_Q , снабженное поляризацией. Если Q является целочисленно простым, то соответствующее многообразие X_Q гладко. В этом случае кольцо Чжоу многообразия X_Q (или, что то же самое, кольцо когомологий $H^{2*}(X_Q, \mathbb{Z})$) изоморфно кольцу R_Q [22; разд. 1.4].

Это описание весьма полезно. Во-первых, оно функториально. Во-вторых, как ясно из определения, ненулевые однородные компоненты кольца R_Q живут в степенях $\leq d$ (поскольку степень многочлена объема равна d), и при этом кольцо R_Q допускает невырожденное спаривание (двойственность Пуанкаре), определенное формулой $(D_1, D_2) := D_1 D_2 (\text{vol}_Q) \in \mathbb{Z}$ для любых двух однородных элементов $D_1, D_2 \in \text{Sym}(\Lambda_Q)$ произвольной степени. Двойственность

Пуанкаре в кольце R_Q является ключевым ингредиентом в доказательстве изоморфизма между R_Q и $H^{2*}(X_Q, \mathbb{Z})$ (см. более детальное обсуждение в [9]). Заметим, что имеется другое функториальное описание [4] кольца Чжоу многообразия X_Q через кусочно полиномиальные функции на веерах, но, в рамках этого описания, верхняя оценка на степень и двойственность Пуанкаре проверяются не так непосредственно. Заметим также, что самое раннее (нефункториальное) описание кольца Чжоу (через образующие и соотношения) нетрудно вывести из определения кольца R_Q (см., например, [23]). Поэтому есть основания считать, что кольца многогранников дают самое удобное описание колец Чжоу гладких торических многообразий.

Заметим, что если многогранник P не является простым, то кольцо R_P все равно имеет смысл, все однородные компоненты этого кольца имеют степени $\leq d$, и имеет место двойственность Пуанкаре. Однако связь этого кольца с кольцом Чжоу (теперь уже особого) торического многообразия X_P неясна отчасти потому, что последнее кольцо не удовлетворяет двойственности Пуанкаре. С другой стороны, кольца R_P для непростых многогранников часто связаны с кольцами Чжоу гладких неторических многообразий. Это было замечено в [9].

Обсудим некоторые важные свойства изоморфизма $R_Q \simeq CH^*(X_Q)$ для простого многогранника Q . Этот изоморфизм позволяет отождествлять алгебраические циклы на многообразии X_Q с линейными комбинациями граней многогранника Q . Размерность векторного пространства V_Q равна числу $N(Q)$ гиперграней многогранника Q (поскольку можно сдвигать все гиперграни многогранника Q независимо). Заметим, что для простого многогранника P размерность пространства V_P строго меньше, чем $N(P)$ (например, если P – октаэдр, то пространство V_P имеет размерность 4). Для простого многогранника Q пространство V_Q имеет естественные координаты, называемые *опорными числами*. Опорных чисел столько же, сколько гиперграней в многограннике Q . Опорные числа определяются выбором $N = N(Q)$ линейных функционалов ξ_Γ на пространстве \mathbb{R}^d , соответствующих гиперграням Γ многогранника Q и таких, что всякая гипергрань Γ многогранника Q содержится в гиперплоскости $\xi_\Gamma(x) = H_\Gamma$ для некоторой постоянной H_Γ , а все точки x многогранника Q удовлетворяют неравенствам $\xi_\Gamma(x) \leq H_\Gamma$. Если $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ – все гиперграни многогранника Q , то всякий набор вещественных чисел $(H_{\Gamma_1}, \dots, H_{\Gamma_N})$ определяет единственный (возможно, виртуальный) многогранник из V_Q . Когда мы будем иметь дело с целочисленными многогранниками, мы всегда будем выбирать функционал ξ_Γ так, чтобы он был примитивным целочисленным ко-вектором, ортогональным гиперграни Γ . В этом случае число H_Γ совпадает (с точностью до знака) с целочисленным расстоянием от начала координат до гиперплоскости, содержащей гипергрань Γ .

Если наш выбор формы объема и линейных функционалов ξ_Γ согласован с выбором целочисленной решетки (так, как описано выше), то дифференциальные операторы ∂_Γ совпадают с частными производными по опорным числам H_Γ . Для грани $F = \Gamma_1 \cap \dots \cap \Gamma_k$ коразмерности k мы положим $\partial_F = \partial_{\Gamma_1} \dots \partial_{\Gamma_k}$ и обозначим через $[F]$ класс дифференциального оператора ∂_F в кольце R_Q . Элементы $[F]$, соответствующие граням многогранника Q , порождают кольцо R_Q как абелеву группу. Более того, в качестве образующих до-

статочно взять некоторые специальные грани, называемые в [23] *сепаратрисами*. Имеется явный алгоритм для представления произведения $[F_1] \cdot [F_2] \in R_Q$ в виде линейной комбинации граней, т. е. элементов вида $[F]$, соответствующих граням F многогранника Q . Этот алгоритм напоминает известный алгоритм из теории пересечений: мы заменяем элемент $[F_1]$ линейной комбинацией граней, трансверсальных к F_2 . Линейные соотношения между гипергранями многогранника Q вытекают непосредственно из описания идеала A_Q , приведенного выше. Эти соотношения имеют вид

$$\sum \xi_\Gamma(a)[\Gamma] = 0, \quad (1)$$

где $a \in \mathbb{R}^d$ – произвольный вектор, а суммирование производится по всем гиперграням многогранника Q . В самом деле, многочлен объема инвариантен относительно параллельных переносов. Следовательно, производная выражения $\text{vol}(\cdot + ta)$ по t равна нулю (здесь \cdot заменяет любой фиксированный элемент пространства V_Q). По правилу дифференцирования сложной функции, эта производная совпадает с $\sum \xi_\Gamma(a) \partial_\Gamma \text{vol}(\cdot)$. Любое линейное соотношение между элементами $[\Gamma]$ имеет указанный вид (см. [23]).

Если многогранник Q является разрешением многогранника P , нас будут интересовать представления элементов $\alpha \in R_P$ в виде линейных комбинаций граней многогранника Q , т. е. в следующем виде:

$$\alpha = \pi\left(\sum [F]\right),$$

где суммирование производится по некоторому множеству граней многогранника Q . В этом случае предложение 2.1 позволяет вычислять произведения пар элементов $\alpha, \alpha' \in R_P$ следующим образом. Если мы найдем представление

$$\alpha' = \pi\left(\sum [F']\right),$$

в котором все грани F' трансверсальны всем F , то тогда

$$\alpha \cdot \alpha' = \pi\left(\sum [F \cap F']\right).$$

В дальнейшем нам понадобится также следующая лемма, которая является непосредственным следствием определения группы $M_{Q,P}$.

ЛЕММА 2.4. Пусть α и β – два однородных элемента кольца R_Q одной и той же степени. Равенство $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$ выполнено в группе $M_{Q,P}$ тогда и только тогда, когда $\pi(\alpha\gamma) = \pi(\beta\gamma)$ для всех однородных элементов $\gamma \in R_Q$ дополнительной степени таких, что $\pi(\gamma) \in R_P \subset M_{Q,P}$.

2.4. Пример: многогранники Гельфанда–Цетлина в \mathbb{R}^3 . Рассмотрим многогранник P в пространстве \mathbb{R}^3 , заданный следующими линейными неравенствами:

$$a \leq x \leq b, \quad b \leq y \leq c, \quad x \leq z \leq y.$$

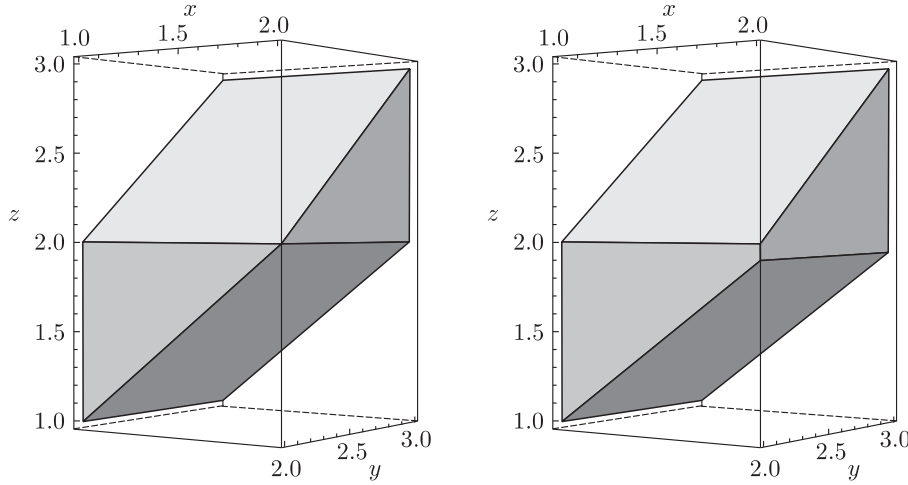


Рис. 1. Многогранник Гельфанда-Цетлина для GL_3 и его разрешение

Это трехмерный многогранник Гельфанда-Цетлина (см. рис. 1). Определяющая система линейных неравенств для многогранника P обычно представляется схематически следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ & x & y \\ & & z \end{array}$$

Например, то, что координата x расположена между a и b строчкой ниже, означает, что эта координата подчиняется неравенствам $a \leq x \leq b$.

Многогранник P можно получить из параллелепипеда $[a, b] \times [b, c] \times [a, c]$ удалением двух призм:

$$\{a \leq z < x \leq b, b \leq y \leq c\}, \quad \{b \leq y < z \leq c, a \leq x \leq b\}.$$

Следовательно, объем многогранника P равен

$$(b-a)(c-b)(c-a) - \frac{(b-a)^2(c-b)}{2} - \frac{(c-b)^2(b-a)}{2} = \frac{1}{2}(b-a)(c-b)(c-a)$$

(впрочем, можно увидеть и чисто геометрически, не производя никаких вычислений, что выкидываемые куски составляют ровно половину объема всего параллелепипеда). Кольцо R_P порождено классами частных дифференцирований ∂_a , ∂_b и ∂_c . Более того, поскольку объем многогранника P не изменится, если мы одновременно сдвинем параметры a , b и c на одно и то же вещественное число, имеем $\partial_a + \partial_b + \partial_c = 0$ в кольце R_P . Выделенная система аддитивных образующих кольца R_P задается многочленами Шуберта относительно дифференцирований $-\partial_a$ и $-\partial_b$, т. е.

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = -\partial_a^2 \partial_b, & \mathfrak{S}_{s_1 s_2} = \partial_a \partial_b, & \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = \partial_a^2, \\ \mathfrak{S}_{s_2} = -\partial_a - \partial_b, & \mathfrak{S}_{s_1} = -\partial_a, & \mathfrak{S}_{\text{id}} = 1. \end{array}$$

Теперь рассмотрим простой многогранник Q , заданный следующими неравенствами:

$$a \leq x \leq b, \quad b \leq y \leq c, \quad x \leq z \leq y + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – фиксированное маленькое число. Многогранник Q тоже можно получить из параллелепипеда $[a, b] \times [b, c] \times [a, c + \varepsilon]$ удалением двух призм:

$$\{a \leq z < x \leq b, b \leq y \leq c\}, \quad \{b \leq y < z - \varepsilon \leq c, a \leq x \leq b\}.$$

Следовательно, объем многогранника Q равен

$$\begin{aligned} (b-a)(c-b)(c-a+\varepsilon) - \frac{(b-a)^2(c-b)}{2} - \frac{(c-b)^2(b-a)}{2} \\ = \frac{1}{2}(b-a)(c-b)(c-a) + \varepsilon(b-a)(c-b). \end{aligned}$$

Это многочлен от переменных a, b, c и ε .

Кольцо R_Q мультипликативно порождается частными дифференцированиями $\tilde{\partial}_a, \tilde{\partial}_b, \tilde{\partial}_c$ (волна нужна только для того, чтобы отличить эти элементы кольца R_Q от элементов $\partial_a, \partial_b, \partial_c \in R_P$) и ∂_ε . Заметим, что $\tilde{\partial}_a + \tilde{\partial}_b + \tilde{\partial}_c = 0$ и в кольце R_Q . Имеем

$$\tilde{\partial}_a = -[x = a], \quad \tilde{\partial}_b = -[y = b] + [x = b], \quad \tilde{\partial}_c = [y = c], \quad \partial_\varepsilon = [z = y + \varepsilon].$$

Формула (1) дает три линейных соотношения на гиперграни многогранника Q :

$$\begin{aligned} -[x = a] + [x = b] + [x = z] &= 0, \\ -[y = b] - [z = y + \varepsilon] + [y = c] &= 0, \\ -[x = z] + [z = y + \varepsilon] &= 0. \end{aligned}$$

Мы можем представить многочлены Шуберта от дифференцирований ∂_a и ∂_b как образы при отображении π определенных элементов кольца R_Q следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{s_1} &= \pi([x = a]), & \mathfrak{S}_{s_2} &= \pi([y = b] + [x = z]), \\ \mathfrak{S}_{s_2 s_1} &= \pi([x = z = a]), & \mathfrak{S}_{s_1 s_2} &= \pi([x = a, y = b]). \end{aligned}$$

Все грани многогранника Q , которые возникают в правых частях этих соотношений, вырождаются в регулярные грани многогранника P . Например, выражение для $\mathfrak{S}_{s_2 s_1}$ может быть получено так:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{s_2 s_1} &= \partial_a^2 = \pi(\tilde{\partial}_a^2) = \pi([x = a] \cdot [x = a]) \\ &= \pi([x = a] \cdot ([x = b] + [z = x])) = \pi([x = a] \cdot [x = b] + [x = z = a]). \end{aligned}$$

Первый член в правой части обращается в нуль, поскольку грани $\{x = a\}$ и $\{x = b\}$ не пересекаются.

Таким же образом нетрудно обосновать все эвристические вычисления с гранями в [12; разд. 4].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Хотя многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_{s_2} = -\partial_a - \partial_b$ представляется как образ суммы двух граней

$$\mathfrak{S}_{s_2} = \pi([y = b] + [x = z]),$$

нет почленного равенства между мономами и гранями в его разложении. Дело в том, что образы граней $\pi([y = b])$ и $\pi([x = z])$ не лежат в кольце R_P (рассматриваемом как подмодуль в $M_{Q,P}$), хотя их сумма лежит.

Действительно, из определения \mathbb{Z} -модуля $M_{Q,P}$ и явной формулы для многочленов объема многогранников P и Q (см. выше) несложно вывести, что линейные соотношения между $\pi(\tilde{\partial}_a)$, $\pi(\tilde{\partial}_b)$, $\pi(\tilde{\partial}_c)$ и $\pi(\partial_\varepsilon)$ порождаются единственным соотношением $\pi(\tilde{\partial}_a) + \pi(\tilde{\partial}_b) + \pi(\tilde{\partial}_c) = 0$. Следовательно, $\pi(\partial_\varepsilon) = \pi([z = y + \varepsilon]) = \pi([x = z])$ не выражается как линейная комбинация ∂_a и ∂_b в $M_{Q,P}$ и, тем самым, не лежит в кольце $R_P \subset M_{Q,P}$.

3. Многогранник Гельфанда–Цетлина и его кольцо

3.1. Многогранник Гельфанда–Цетлина. Рассмотрим кольцо R_P многогранника Гельфанда–Цетлина $P = P_\lambda$, ассоциированного с некоторым строго доминантным весом $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ группы $GL_n(\mathbb{C})$, т. е. с набором из n целых чисел λ_i , удовлетворяющих неравенствам $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ при всех $i = 1, \dots, n - 1$. Напомним, что многогранник Гельфанда–Цетлина P_λ – это выпуклый целочисленный многогранник в \mathbb{R}^d , где $d = n(n - 1)/2$, целые точки внутри и на границе которого биективно соответствуют элементам базиса Гельфанда–Цетлина в неприводимом представлении группы $GL_n(\mathbb{C})$ со старшим весом λ . Этот многогранник задается системой неравенств

$$\begin{array}{ccccccc}
 \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & \dots & & \lambda_n \\
 & \lambda_{1,1} & & \lambda_{1,2} & & \dots & & & \lambda_{1,n-1} \\
 & & \lambda_{2,1} & & \dots & & & \lambda_{2,n-2} & \\
 & & & \ddots & & \dots & & & \\
 & & & & \lambda_{n-2,1} & & \lambda_{n-2,2} & & \\
 & & & & & & \lambda_{n-1,1} & &
 \end{array} \tag{GZ}$$

где $(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,n-1}; \lambda_{2,1}, \dots, \lambda_{2,n-2}; \dots; \lambda_{n-2,1}, \lambda_{n-2,2}; \lambda_{n-1,1})$ – это координаты в пространстве \mathbb{R}^d и запись

$$\begin{array}{cc}
 a & b \\
 & c
 \end{array}$$

означает, что $a \leq c \leq b$. Многогранник Гельфанда–Цетлина для группы $G = GL_3$ изображен на рис. 1. Отметим, что для любых двух строго доминантных весов λ и μ соответствующие многогранники Гельфанда–Цетлина P_λ и P_μ будут аналогичными. Далее мы будем обозначать через P многогранник P_λ , отвечающий некоторому строго доминантному весу λ , и обозначим через Λ_P решетку, порожденную всеми многогранниками Гельфанда–Цетлина P_μ , где μ пробегает все множество строго доминантных весов. Соответствие $\mu \mapsto P_\mu$ задает естественный изоморфизм решеток \mathbb{Z}^n и Λ_P . Иными словами, виртуальные многогранники в Λ_P параметризованы произвольными наборами из n целых чисел, не обязательно строго возрастающих. Можно показать, что кольцо R_P не меняется при замене решетки Λ_P на решетку, порожденную всеми многогранниками, аналогичными P_λ , однако нам это не потребуется.

Напомним, что с каждым полным флагом $W = W_1 \subset \dots \subset W^{n-1}$ в \mathbb{C}^n связаны одномерные векторные пространства $L_i(W) = W_i/W_{i-1}$. Несвязное объединение всех множеств вида $\{W\} \times L_i(W)$ с естественной проекцией на X , заданной формулой $\{W\} \times L_i(W) \mapsto W$, является линейным расслоением над X . Это линейное расслоение \mathcal{L}_i называется *тавтологическим линейным фактор-расслоением* над X .

ТЕОРЕМА 3.1 [9]. *Кольцо R_P изоморфно кольцу Чжоу (и кольцу когомологий) многообразия полных флагов X для группы $GL_n(\mathbb{C})$ (отметим, что $\dim(X) = d$). При этом изоморфизме образы в R_P дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \lambda_n}$ отображаются в первые классы Чженя тавтологического линейных факторрасслоений $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ над X .*

Эту теорему также можно вывести напрямую из представления Бореля для кольца когомологий $H^*(X, \mathbb{Z})$, воспользовавшись тем фактом, что объем многогранника P_λ , рассматриваемый как функция от λ , равняется определителю Вандермонда $\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$, умноженному на некоторую константу.

Наряду с многогранником Гельфанда–Цетлина P мы также рассматриваем такое его разрешение Q , что количество гиперграней в Q равняется количеству гиперграней в P и всякая опорная гиперплоскость многогранника Q , пересекающаяся с ним по гиперграню, достаточно близка к получаемой из нее параллельным переносом опорной гиперплоскости многогранника P , пересекающейся с P по гиперграню. Это задает взаимно однозначное соответствие между гипергранями Q и гипергранями P , причем соответствующие друг другу гипергранни оказываются параллельными. Ничто из изложенного далее не будет зависеть от конкретного выбора такого разрешения Q .

3.2. Грани и диаграммы граней. Для нас будет удобным представлять грани многогранника P при помощи *диаграмм граней*. Во-первых, заменим все λ_j и $\lambda_{i,j}$ в таблице (GZ) точками. Каждая грань многогранника P будет задаваться системой уравнений вида $a = b$, где a и b – это координаты, соответствующие соседним точкам в двух последовательных строках. Такое уравнение мы будем изображать отрезком, соединяющим соответствующие точки (эти отрезки идут с северо-запада на юго-восток или с северо-востока на юго-запад). Тогда система уравнений, задающих грань многогранника P , называется представленной при помощи набора отрезков, называемого диаграммой грани.¹ *Строки* диаграммы граней определяются как наборы точек, отвечающих координатам $\lambda_{i,j}$ при фиксированном i . *Столбцами* диаграммы мы будем называть наборы точек с фиксированным j (на наших рисунках столбцы выглядят как диагонали).

Пусть F – регулярная грань многогранника P , а \tilde{F} – соответствующая грань многогранника Q , т. е. F является вырождением грани \tilde{F} . Мы часто будем обозначать через $[F]$ класс $[\tilde{F}]$ грани \tilde{F} в кольце многогранника R_Q . Отметим, что, вообще говоря, $\pi[F]$ не принадлежит кольцу R_P .

¹Наши диаграммы граней, равно как и диаграммы в работе [12], получаются отражением диаграмм из [15] относительно горизонтальной прямой.

Все гиперграни в P являются регулярными. Пусть $i = 0, \dots, n-1$ и $j = 1, \dots, n-i-1$; обозначим через $\Gamma_{i,j}$ гипергрань многогранника P , задаваемую уравнением $\lambda_{i,j} = \lambda_{i+1,j}$ (мы считаем, что $\lambda_{0,j} = \lambda_j$). Аналогично, при $i = 0, \dots, n-1$ и $j = 2, \dots, n-i$ мы обозначим через $\Gamma_{i,j}^-$ гипергрань, задаваемую уравнением $\lambda_{i,j} = \lambda_{i+1,j-1}$. Ясно, что всякая гипергрань P имеет вид либо $\Gamma_{i,j}$, либо $\Gamma_{i,j}^-$.

Следующее предложение описывает все линейные соотношения между гипергранями в P .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *В кольце R_Q имеют место следующие линейные соотношения:*

$$[\Gamma_{i,j}] - [\Gamma_{i,j}^-] - [\Gamma_{i-1,j}] + [\Gamma_{i-1,j+1}^-] = 0,$$

где слагаемые, индексы при которых находятся вне допустимого диапазона, полагаются равными нулю. Более того, все линейные соотношения следуют из этих.

Мы будем называть это соотношение *четырёхчленным соотношением* для индексов (i, j) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e_{i,j}$ — стандартный базис в \mathbb{R}^d . Четырёхчленное соотношение для (i, j) имеет вид

$$\sum_{\Gamma} \xi_{\Gamma}(e_{i,j})[\Gamma] = 0,$$

где суммирование производится по всем гиперграням из Q . Но в Q есть не более четырех гиперграней Γ , для которых $\xi_{\Gamma}(e_{i,j}) \neq 0$; это $\Gamma_{i,j}$, $\Gamma_{i-1,j}$, $\Gamma_{i,j}^-$ и $\Gamma_{i-1,j+1}^-$. Непосредственно проверяется, что коэффициенты при них таковы, как указано выше. Предложение доказано.

3.3. Когановские грани. В дальнейшем мы будем рассматривать в основном грани многогранника Гельфанда–Цетлина, задаваемые уравнениями типа² $\lambda_{i,j} = \lambda_{i+1,j}$ (т.е. пересечения граней вида $\Gamma_{i,j}$). Такие грани мы будем называть *когановскими гранями*. Каждой когановской грани F сопоставим перестановку $w(F)$ следующим образом. Сначала сопоставим каждому уравнению $\lambda_{i,j} = \lambda_{i+1,j}$ элементарную транспозицию $s_{i+j} = (i+j, i+j+1)$. Далее рассмотрим слово, состоящее из всех элементарных транспозиций, которые соответствуют уравнениям, определяющим F , таким образом: прочтем каждую строку диаграммы F слева направо, начав с нижней строки и закончив верхней. Полученное слово является записью некоторой перестановки $w(F)$ (мы перемножаем перестановки справа налево, т.е. запись $w = w_1 w_2$ означает, что $w(i) = w_1(w_2(i))$ для всех $i = 1, \dots, n$). Грань F называется *приведенной*, если эта запись приведенная (в дальнейшем мы рассматриваем перестановки только для приведенных граней).³ Напомним, что запись $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ называется

²Т.е. типа L в обозначениях работы [12] или, что то же самое, типа A из работы [15] ($\lambda_{i+j,i}$ в обозначениях работы [15] соответствует нашему $\lambda_{i,j}$).

³Отметим, что наше определение перестановки $w(F)$ не согласуется с определением из [15; разд. 2.2.1]: определяемая там $w(F)$ равняется нашей $w(F)^{-1}$. Однако эта разница не влияет на определение приведенных граней.

приведенной, если ее длина минимальна, т. е. перестановку w нельзя представить как произведение менее чем l элементарных транспозиций. Приведенные когановские грани многогранника Гельфанда–Цетлина биективно соответствуют приведенным *гс-графам* (их еще называют *pipe dreams*; см. [15; разд. 2.2.1]). Отметим, что грани и соответствующему гс-графу отвечает одна и та же перестановка.

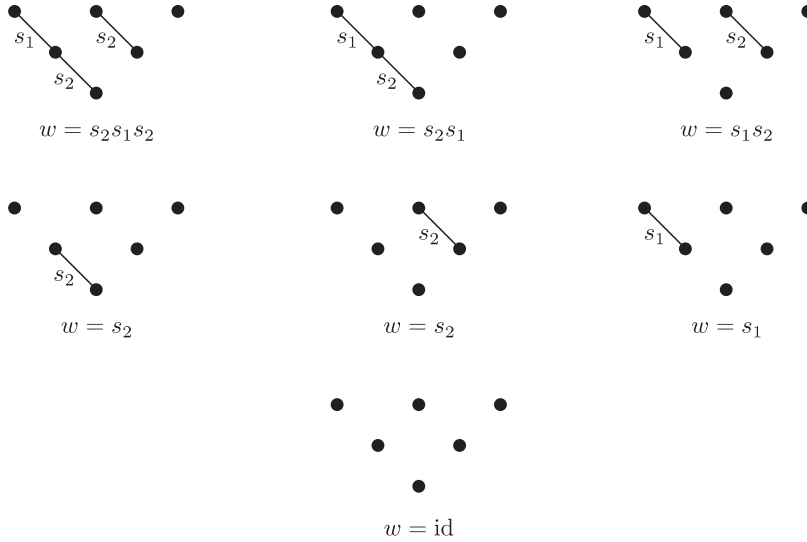


Рис. 2. Приведенные когановские грани для трехмерного многогранника Гельфанда–Цетлина

Диаграммы всех приведенных когановских граней в случае $n = 3$ и отвечающие им перестановки приведены на рис. 2.

Предложение 3.3. *Все когановские грани являются регулярными.*

Доказательство. Имеется только одна когановская вершина. Эта вершина является простой и содержится в любой другой когановской грани. Поэтому это утверждение следует из предложения 2.3.

При помощи четырехчленных соотношений можно выразить $[\Gamma_{0,j+1}^-]$ через когановские грани:

$$[\Gamma_{0,j+1}^-] = [\Gamma_{0,j}] - [\Gamma_{1,j}] + [\Gamma_{1,j}^-] = [\Gamma_{0,j}] - [\Gamma_{1,j}] + [\Gamma_{1,j-1}] - [\Gamma_{2,j-1}] + [\Gamma_{2,j-1}^-] = \dots = \sum_{i=0}^{j-1} [\Gamma_{i,j-i}] - [\Gamma_{i+1,j-i}].$$

Определим k -антидиагональную сумму гиперграней AD_k как сумму всех элементов вида $[\Gamma_{i,j}]$, где сумма $i + j = k$ постоянна (при этом i может равняться 0). Положим $\Gamma_j = \Gamma_{0,j}$ и $\Gamma_j^- = \Gamma_{0,j}^-$. Проведенное вычисление показывает, что

$$[\Gamma_{j+1}] - [\Gamma_{j+1}^-] = AD_{j+1} - AD_j.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. В R_P имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} = \pi(-[\Gamma_1]), \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_2} = \pi([\Gamma_2^-] - [\Gamma_2]), \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_n} = \pi([\Gamma_n^-]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ∂_j – образ вектора $\frac{\partial}{\partial \lambda_j}$ при естественном вложении $\Lambda_P \rightarrow \Lambda_Q$. Обозначим через H_j и H_j^- опорные числа, отвечающие гиперграням Γ_j и Γ_j^- соответственно. Таким образом, H_j и H_j^- – линейные функционалы на Λ_Q . По правилу дифференцирования сложной функции,

$$\partial_j = \sum_{k=1}^{n-1} H_k(\partial_j)[\Gamma_j] + \sum_{k=2}^n H_k^-(\partial_j)[\Gamma_j^-]$$

в R_Q , поскольку $[\Gamma_j] = \partial/\partial H_j$; аналогично для $[\Gamma_j^-]$. Теперь достаточно заметить, что $H_k(\partial_j) = -\delta_{kj}$ и $H_k^-(\partial_j) = \delta_{kj}$, где δ_{kj} – символ Кронекера. Предложение доказано.

4. Циклы Шуберта и грани

4.1. Циклы Шуберта. Далее на всем протяжении статьи мы положим $G = GL_n(\mathbb{C})$. Пусть через B и B^- обозначены соответственно подгруппы верхне- и нижнетреугольных матриц в G . Группу Вейля группы G можно отождествить с симметрической группой S_n : перестановка $w \in S_n$ соответствует элементу из G , действующему на векторах стандартного базиса e_i по формуле $e_i \mapsto e_{w(i)}$. Для всякого $w \in S_n$ определим *многообразие Шуберта* X^w как замыкание B^- -орбиты элемента w в многообразии флагов $X = G/B$. Несложно проверить, что длина $l(w)$ элемента w равна коразмерности подмногообразия X^w в X . Класс $[X^w]$ подмногообразия X^w в группе Чжоу $CH^{l(w)}(X)$ называется *циклом Шуберта*, отвечающим перестановке w .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Отметим, что обозначения в работе [16] отличаются от наших. А именно, там рассматривается многообразие флагов $B^- \setminus G$. При изоморфизме $G/B \rightarrow B^- \setminus G$, переводящем gB в $w_0 g^{-1} w_0^{-1} B^-$, наше многообразие Шуберта X^w отображается в многообразие Шуберта $X_{w_0^{-1} w w_0}$ в обозначениях [16; § 4].

4.2. Многочлены Шуберта. Напомним определение *многочленов Шуберта* (см. [3], [17]). Каждой простой транспозиции $s_i = (i, i + 1)$ поставим в соответствие оператор разделенных разностей, действующий на многочленах от переменных x_1, x_2, \dots по формуле

$$A_i(f) = \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}},$$

где $s_i(f)$ – многочлен f , в котором переставлены переменные x_i и x_{i+1} . Для каждой перестановки w рассмотрим некоторое приведенное (т. е. кратчайшее) разложение $w^{-1} w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ перестановки $w^{-1} w_0$ в произведение простых транспозиций. Многочлен Шуберта \mathfrak{S}_w определяется формулой

$$\mathfrak{S}_w(x_1, x_2, \dots) = A_{i_1} \cdots A_{i_k}(x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}).$$

ТЕОРЕМА 4.2 [3]. *Класс $[X^w]$ многообразия Шуберта X^w в кольце $CH(X)$ равняется $\mathfrak{S}_w(x_1, x_2, \dots)$, где $x_i = -c_1(\mathcal{L}_i)$ – взятый со знаком “минус” первый класс Чженя тавтологического линейного факторрасслоения \mathcal{L}_i . При отождествлении $CH(X) = R_P$ получаем, что*

$$[X^w] = \mathfrak{S}_w\left(-\frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial \lambda_n}\right).$$

Далее, напомним теорему Кириллова–Фомина [7]. Сопоставим каждой грани F моном $x(F)$ от переменных x_1, \dots, x_{n-1} , сопоставив x_j каждому из уравнений вида $\lambda_{i,j} = \lambda_{i+1,j}$, которые задают F , и взяв произведение всех этих переменных (здесь, разумеется, порядок уже несуществен). Теорема Кириллова–Фомина утверждает, что многочлен Шуберта \mathfrak{S}_w , отвечающий классу Шуберта $[X^w]$, равен

$$\sum_{w(F)=w} x(F),$$

где сумма берется лишь по приведенным когановским граням.

4.3. Представление циклов Шуберта при помощи граней. В кольце многогранника циклы Шуберта могут быть отождествлены с линейными комбинациями граней без использования многочленов Шуберта. Следующая теорема является непосредственным аналогом теоремы Кириллова–Фомина; она показывает, что всякий цикл Шуберта может быть представлен в виде суммы граней точно таким же способом, как соответствующий ему многочлен Шуберта представляется в виде суммы мономов.

ТЕОРЕМА 4.3. *Цикл Шуберта $[X^w]$, рассматриваемый как элемент кольца многогранника Гельфанда–Цетлина, может быть представлен в виде следующей линейной комбинации граней:*

$$[X^w] = \pi\left(\sum_{w(F)=w} [F]\right),$$

где сумма берется лишь по приведенным когановским граням (все эти грани регулярны).

Доказательство этой теоремы будет приведено в п. 5.2. Оно использует комбинаторику и геометрию многогранника Гельфанда–Цетлина, а также формулу Демазюра для характера.

Несмотря на сходство между этой теоремой и теоремой Кириллова–Фомина, первая не следует из второй, так как нет почленного равенства между мономами в многочлене Шуберта \mathfrak{S}_w (которые всегда лежат в кольце R_P) и образами граней $\pi([F])$ в разложении цикла X^w (которые, как правило, не лежат в кольце R_P). Это видно уже в случае $n = 3$ и $w = s_2$ (см. замечание 2.5).

Отметим, что у цикла Шуберта может быть и более простое представление при помощи суммы граней, чем то, которое приводится в этой теореме (см. пример 4.4).

ПРИМЕР 4.4. Используя предложение 3.4 и теорему 4.2, можно выразить дивизоры Шуберта $[X^{s_i}]$ через элементы кольца многогранника, соответствующие гиперграням многогранника P . Во-первых,

$$[X^{s_{i_0}}] = \mathfrak{S}_{s_{i_0}} \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda_1}, -\frac{\partial}{\partial \lambda_2}, \dots \right) = \pi \left(\sum_{j=1}^{i_0} ([\Gamma_j] - [\Gamma_j^-]) \right),$$

где все слагаемые, индексы которых лежат вне допустимых пределов, считаются равными нулю. Как мы видели, элемент $[\Gamma_j] - [\Gamma_j^-]$ равняется $AD_j - AD_{j-1}$. Следовательно,

$$[X^{s_{i_0}}] = \pi(AD_{i_0}) = \pi \left(\sum_{j=1}^{i_0} [\Gamma_{i_0-j,j}] \right).$$

Мы получаем представление цикла $[X^{s_{i_0}}]$ в виде суммы i_0 граней. Это представление совпадает с указанным в теореме 4.3. Отметим, однако, что $[X^{s_{n-1}}]$ можно представить при помощи одной грани, а именно,

$$[X^{s_{n-1}}] = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_n} = \pi[\Gamma_n^-].$$

Мы использовали равенство $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda_i} = 0$ в R_Q , поскольку многочлен объема инвариантен относительно параллельных переносов, в частности, он не меняется от прибавления одного и того же числа ко всем λ_i .

Теорема 4.3 вместе с соотношениями в кольце многогранника R_P дает следующее двойственное представление циклов Шуберта при помощи граней. Определим *двойственные когановские грани* многогранника Гельфанда-Цетлина как грани, заданные уравнениями вида⁴ $\lambda_{i,j} = \lambda_{i+1,j-1}$ (т. е. являющиеся пересечениями гиперграней вида $\Gamma_{i,j}^-$). Иными словами, диаграммы двойственных когановских граней суть зеркальные образы диаграмм обычных когановских граней при отражении относительно вертикальной прямой. Каждой двойственной когановской грани F^* также можно сопоставить перестановку $w(F^*)$. А именно, сопоставим каждому уравнению $\lambda_{i,j} = \lambda_{i+1,j-1}$ простое отражение s_{n-j+1} и рассмотрим композицию этих отражений, полученную прохождением от нижней строки к верхней, причем каждая строка будет читаться справа налево. Отметим, что перестановка $w(F^*)$ совпадает с перестановкой $w(F)$, построенной по когановской грани F , которая является отражением грани F^* относительно вертикальной прямой (т. е. каждое уравнение вида $\lambda_{i,j} = \lambda_{i+1,j-1}$ заменяется уравнением $\lambda_{i,n-i-j+1} = \lambda_{i+1,n-i-j+1}$).

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *Цикл Шуберта $[X^w]$, рассматриваемый как элемент кольца многогранника Гельфанда-Цетлина, может быть представлен как следующая линейная комбинация граней:*

$$[X^w] = \pi \left(\sum_{w(F^*)=w_0 w_0^{-1}} [F^*] \right),$$

где сумма берется по всем приведенным двойственным когановским граням.

⁴Т. е. типа R в обозначениях работы [12], что то же самое, что тип B в работе [15].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейный автоморфизм пространства \mathbb{R}^d , переводящий точку с координатами $\lambda_{i,j}$ в точку с координатами $-\lambda_{i,n-i-j+1}$. Этот автоморфизм переводит многогранник Гельфанда–Цетлина P_λ в многогранник Гельфанда–Цетлина $P_{-w_0\lambda}$, где $w_0(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_n, \dots, \lambda_1)$. Таким образом, он индуцирует автоморфизм пространства V_P , сохраняющий решетку Λ_P , а значит, и автоморфизм A кольца R_P . Выберем такое разрешение Q , что автоморфизм A продолжается на кольцо R_Q . Ясно, что продолженный автоморфизм переводит элемент $\pi([F])$, отвечающий регулярной грани F многогранника P , в элемент $\pi([F^*])$, где диаграмма грани F^* получается из диаграммы грани F отражением относительно вертикальной прямой. Достаточно доказать, что автоморфизм A кольца R_P совпадает с автоморфизмом кольца $SH^*(X)$, переводящим цикл Шуберта $[X^w]$ в $[X^{w_0 w w_0^{-1}}]$. (Последний автоморфизм индуцирован автоморфизмом многообразия флагов X , переводящим полный флаг во флаг из его ортогональных дополнений.) Действительно, это легко проверить для дивизоров Шуберта, описанных в примере 4.4 (по существу, нужно проделать то же самое вычисление, но уже с двойственными когановскими гранями). Общий случай теперь следует из того, что дивизоры Шуберта являются мультипликативными образующими кольца когомологий многообразия X . Следствие доказано.

Отметим, что любая когановская грань пересекается с любой двойственной когановской гранью трансверсально. Поэтому мы можем представить циклы, отвечающие многообразиям Ричардсона, в виде сумм граней.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. *Произведение любых двух циклов Шуберта $[X^w]$ и $[X^u]$ выражается как сумма следующих граней:*

$$[X^w] \cdot [X^u] = \pi \left(\sum_{\substack{w(F)=w, \\ w(F^*)=w_0 u w_0^{-1}}} [F \cap F^*] \right),$$

где F и F^* пробегают соответственно множество всех приведенных когановских и двойственных когановских граней.

5. Характеры Демазюра

5.1. Характеры. Для каждого $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ рассмотрим аффинную гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ с координатами y_1, \dots, y_n , заданную уравнением $y_1 + \dots + y_n + u_0 = 0$, где $u_0 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Выберем координаты u_1, \dots, u_{n-1} в \mathbb{R}^{n-1} так, чтобы y_i равнялось $u_i - u_{i-1}$ при всех $i = 1, \dots, n-1$. Рассмотрим следующее линейное отображение $p: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ из пространства \mathbb{R}^d с координатами $\lambda_{i,j}$ в гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n-i} \lambda_{i,j}.$$

Иными словами, если представить координаты $\lambda_{i,j}$ в виде треугольной таблицы, как в (GZ), то u_i есть сумма всех элементов в i -й строке. Далее мы будем

отождествлять \mathbb{R}^n с вещественной оболочкой весовой решетки Λ группы G таким образом, что i -й базисный вектор в \mathbb{R}^n будет соответствовать весу, заданному i -м элементом диагонального тора в G . Тогда гиперплоскость \mathbb{R}^{n-1} получается параллельным переносом из гиперплоскости, порожденной корнями группы G . Несложно проверить, что образ многогранника Гельфанда–Цетлина $P_\lambda \subset \mathbb{R}^d$ при отображении p есть в точности весовой многогранник представления V_λ .

Пусть S – подмножество в многограннике Гельфанда–Цетлина P_λ (в дальнейшем S будет гранью или объединением граней). Определим *характер* χ_S подмножества S как сумму формальных экспонент $e^{p(z)}$ по всем целым точкам $z \in S$, т. е.

$$\chi(S) := \sum_{z \in S \cap \mathbb{Z}^d} e^{p(z)}.$$

Формальные экспоненты e^u , $u \in \mathbb{Z}^n$, порождают групповую алгебру решетки Λ . Поэтому характер принимает значения в этой групповой алгебре.

Рассмотрим такие линейные операторы $s_i: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, для которых точка $s_i(u_1, \dots, u_{n-1})$ отличается от точки (u_1, \dots, u_{n-1}) не более чем значением i -й координаты, причем i -я координата точки $s_i(u_1, \dots, u_{n-1})$ равняется $u_{i-1} + u_{i+1} - u_i$, где $u_n = 0$. Нетрудно проверить тот факт, что операторы s_i индуцированы ортогональными отражениями в пространстве \mathbb{R}^n (относительно простых корней) и что они задают действие симметрической группы S_n на \mathbb{R}^{n-1} , при котором отражение s_i соответствует простой транспозиции $s_i = (i, i+1)$ (мы используем одно и то же обозначение для отражения и соответствующей транспозиции, как это зачастую делается при работе с действиями групп). Также определим действие s_i на групповой алгебре весовой решетки, положив $s_i(e^u) := e^{s_i(u)}$.

Далее мы отождествляем \mathbb{R}^{n-1} с вещественным векторным пространством, порожденным корнями группы G , причем s_i соответствуют отражениям относительно простых корней. Простые корни отвечают векторам стандартного базиса в \mathbb{R}^{n-1} , т. е. единственная ненулевая координата простого корня α_i есть u_i , и значение этой координаты равно единице.

Пусть $V_{\lambda,w}^-$ есть B^- -модуль Демазюра, определенный как пространство, двойственное к пространству глобальных сечений $H^0(X^w, \mathcal{L}_\lambda|_{X^w})$, где $\mathcal{L}_\lambda := \mathcal{L}_1^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_n^{\otimes \lambda_n}$ есть очень обильное линейное расслоение на X , соответствующее строго доминантному весу λ . Отметим, что по теореме Бореля–Вейля–Ботта $V_{\lambda,e}^-$ изоморфно неприводимому представлению V_λ группы G со старшим весом λ . Выберем в $V_{\lambda,w}^-$ базис из весовых векторов. Напомним, что *характером Демазюра* $\chi^w(\lambda)$ для B^- -модуля $V_{\lambda,w}^-$ называется сумма экспонент весов, взятая по всем весовым векторам в этом базисе, или, что то же самое,

$$\chi^w(\lambda) := \sum_{\mu \in \Lambda} m_{\lambda,w}(\mu) e^\mu,$$

где $m_{\lambda,w}(\mu)$ есть кратность веса μ в $V_{\lambda,w}^-$.

Основной результат этого раздела устанавливает взаимосвязь между характером Демазюра многообразия Шуберта и характером объединения соответствующих граней.

ТЕОРЕМА 5.1. *Для всякой перестановки $w \in S_n$ характер Демазюра $\chi^w(\lambda)$ равен характеру соответствующего объединения граней:*

$$\chi^w(\lambda) = \chi\left(\bigcup_{w(F_\lambda)=w} F_\lambda\right).$$

Как обычно, F_λ принимает значения в множестве приведенных когановских граней многогранника Гельфанда–Цетлина P_λ .

Отметим, что в отличие от теоремы 4.3 эта теорема и приводимые ниже ее следствия, которые описывают функции Гильберта и степени многообразий Шуберта в проективных вложениях в $\mathbb{P}(V_\lambda)$, используют именно многогранник P_λ , а не просто какой-нибудь аналогичный ему многогранник. Там, где выбор λ существен, мы отмечаем это, используя для граней обозначение F_λ вместо F .

Для кемпфовских перестановок теорема 5.1 принимает вид, указанный в [21; следствие 15.2]. Отметим, что в силу [15; предложение 2.3.2] перестановка w является кемпфовой тогда и только тогда, когда существует единственная приведенная когановская грань F , для которой $w(F) = w$. Таким образом, в этом случае $\chi^w(\lambda) = \chi(F)$.

В п. 5.4 эта теорема будет сведена к чисто комбинаторной лемме 5.8. Доказательство данной леммы приводится в п. 6.3.

Выведем некоторые следствия из теоремы 5.1. Во-первых, аналогичным образом можно описать и характеры Демазюра B -модулей. Определим B -модуль Демазюра $V_{\lambda,w}^+$ как двойственное пространство к $H^0(X_w, \mathcal{L}_\lambda|_{X_w})$, где X_w — это замыкание B -орбиты элемента w в X (в частности, $[X_w] = [X^{w_0 w}]$ в $CH^*(X)$).

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Для всякой перестановки $w \in S_n$ характер Демазюра $\chi_w(\lambda)$ равен характеру следующего объединения граней:*

$$\chi_w(\lambda) = \chi\left(\bigcup_{w(F_\lambda^*)=w w_0} F_\lambda^*\right),$$

где F_λ^* принимает значения в множестве приведенных двойственных когановских граней в многограннике Гельфанда–Цетлина.

Это следствие немедленно получается из доказательства теоремы 5.1 и определения двойственных когановских граней, поскольку $\chi_w(\lambda) = w_0 \chi^{w_0 w}(\lambda)$.

Другое следствие из теоремы 5.1 описывает функцию Гильберта многообразия Шуберта X^w , вложенного в $\mathbb{P}(H^0(X^w, \mathcal{L}_\lambda|_{X^w})^*) \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Для всякой перестановки $w \in S_n$ размерность пространства $H^0(X^w, \mathcal{L}_\lambda|_{X^w})$ равна числу целых точек в объединении всех приведенных когановских граней, отвечающих перестановке w :*

$$\dim H^0(X^w, \mathcal{L}_\lambda|_{X^w}) = \left| \bigcup_{w(F)=w} F_\lambda \cap \mathbb{Z}^d \right|.$$

В частности, функция Гильберта $H_{\lambda,w}(k) := \dim H^0(X^w, \mathcal{L}_\lambda^{\otimes k}|_{X^w})$ равна многочлену Эрхарта множества $\bigcup_{w(F_\lambda)=w} F_\lambda$, т. е.

$$H_{\lambda,w}(k) = \left| \bigcup_{w(F_\lambda)=w} kF_\lambda \cap \mathbb{Z}^d \right|$$

при всех целых положительных k .

Это следствие будет особенно важным для доказательства теоремы 4.3.

5.2. Степени многообразий Шуберта. Прежде чем доказывать теорему 4.3, мы докажем аналогичное равенство для *многочленов степеней* многообразий Шуберта. *Многочлен степеней* D_w на \mathbb{R}^n однозначно характеризуется тем свойством, что $(d - l(w))! D_w(\lambda) = \deg_\lambda(X^w)$ для всех доминантных весов $\lambda \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. В частности, $D_e = (1/d!) \deg_\lambda(X) = \text{Volume}(Q_\lambda)$ и $D_{w_0} = 1$. Многочлены степеней впервые возникли в работе И. Н. Бернштейна, И. М. Гельфанда, С. И. Гельфанда [3]; недавно они также изучались А. Постниковым и Р. П. Стенли в работе [21]. Ниже мы докажем соотношения, связывающие многочлен степеней и объемы граней многогранника Гельфанда-Цетлина.

Обозначим через $\mathbb{R}F \subset \mathbb{R}^d$ аффинную оболочку грани F . В нижеприведенных формулах форма объема на $\mathbb{R}F$ считается нормированной таким образом, что кообъем решетки $\mathbb{Z}^d \cap \mathbb{R}F$ в $\mathbb{R}F$ равняется 1. Тогда имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.4. *Справедливы следующие равенства:*

$$D_w = \sum_{w(F_\lambda)=w} \text{Volume}(F_\lambda),$$

$$D_w = \sum_{w(F_\lambda^*)=w_0 w w_0^{-1}} \text{Volume}(F_\lambda^*).$$

Для кемповских перестановок первое равенство теоремы 5.4 принимает вид последней формулы из [21; следствие 15.2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 5.4 непосредственно вытекает из следствия 5.3 и теоремы Гильберта о старшем члене в многочлене Гильберта при помощи рассуждений, аналогичных использованным в работе [11]. Так, по теореме Гильберта $\dim(V_{k\lambda,w}^-)$ является многочленом от k (при достаточно больших k), и его старший член равен $D_w(\lambda)k^d$. Далее, отметим, что $\dim(V_{k\lambda,w}^-)$ есть число целых точек в $\bigcup_{w(F_\lambda)=w} kF_\lambda$ в силу следствия 5.3. Наконец, воспользуемся тем,

что для каждой грани F ее объем равняется старшему члену в многочлене Эрхарта этой грани (поскольку $\text{Volume}(kF) = k^n \text{Volume}(F)$ приближенно равен числу целых точек, принадлежащих kF , при больших k). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Двойственные грани Когана суть в точности те грани, которые рассматривались в [16; § 4]. Отметим, что определение перестановки $w(F^*)$ в [16] отличается от нашего, а также от приведенного в работе [15].

А именно, в наших обозначениях авторы [16] ставят в соответствие двойственной грани F^* перестановку $w_0 w w_0^{-1}$. Однако, поскольку цикл Шуберта $[X_w]$ в их обозначениях совпадает с циклом Шуберта $[X^{w_0 w w_0^{-1}}]$ в наших обозначениях (см. замечание 4.1), в их теореме 8 (описывающей торическое вырождение многообразия Шуберта X_w) возникают в точности те же грани, что и во втором равенстве теоремы 5.4 настоящей работы, причем последнее может быть выведено из первой при помощи стандартной техники торической геометрии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3. Теперь выведем теорему 4.3 из теоремы 5.4, используя лемму 2.4. Напомним, что решетка Λ_P является подрешеткой в Λ_Q . В частности, многогранник P_λ можно рассматривать как элемент в $\Lambda_Q = \text{Sym}^1(\Lambda_Q)$. Обозначим через L_λ образ P_λ при канонической проекции $\text{Sym}(\Lambda_Q) \rightarrow R_Q$. Несложно проверить, что при изоморфизме, описанном в теореме 3.1, класс $\pi(L_\lambda)$ соответствует первому классу Чжэня линейного расслоения \mathcal{L}_λ . Итак, в R_P имеется следующее равенство:

$$[X^w] \pi(L_\lambda)^{d-l} = (\deg_\lambda(X^w)) [\text{pt}],$$

где $d-l = d-l(w)$ есть размерность многообразия X^w (произведение в левой части берется в R_P ; как и ранее, мы отождествляем элементы в R_P с их образами в $M_{Q,P}$).

С другой стороны, несложно проверить, что для всякой грани $F_\lambda \subset Q_\lambda$ коразмерности l произведение $[F_\lambda] L_\lambda^{d-l}$ в R_Q равняется классу вершины, умноженному на коэффициент $(d-l)! \text{Volume}(F_\lambda)$. Итак, по теореме 5.4 имеем

$$[X^w] \pi(L_\lambda)^{d-l} = \pi \left(\sum_{w(F)=w} [F] L_\lambda^{d-l} \right).$$

Поскольку элементы вида $\pi(L_\lambda)^{d-l}$ линейно порождают R_P^{d-l} , можно применить лемму 2.4 и заключить, что $[X^w] = \pi \left(\sum_{w(F)=w} [F] \right)$. Теорема 4.3 доказана.

5.3. Формула Демазюра для характера. Для доказательства теоремы 5.1 будет использована формула Демазюра для характера $\chi^w(\lambda)$ вместе с некоторым чисто комбинаторным рассуждением. Напомним формулу Демазюра для характера (подробности изложены в [1]). Для каждого $i = 1, \dots, n-1$ определим оператор T_i на групповой алгебре весовой решетки группы G при помощи формулы

$$T_i(f) = \frac{f - e^{-\alpha_i} s_i(f)}{1 - e^{-\alpha_i}}.$$

Аналогичным образом определим оператор T_i^- по формуле

$$T_i^-(f) = \frac{f - e^{\alpha_i} s_i(f)}{1 - e^{\alpha_i}}.$$

ТЕОРЕМА 5.6 [1]. Пусть $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ — приведенное разложение элемента w . Тогда характеры Демазюра $\chi_w(\lambda)$ и $\chi^{w_0 w}(\lambda)$ равны соответственно

$$\chi_w(\lambda) = T_{i_1} \cdots T_{i_l} e^\lambda$$

и

$$\chi^{w_0 w}(\lambda) = T_{n-i_1}^- \cdots T_{n-i_l}^- e^{w_0 \lambda}.$$

Первое равенство – это стандартный вид формулы Демажюра для характера. Мы будем использовать второе равенство, которое немедленно следует из первого, поскольку $\chi_w(\lambda) = w_0 \chi^{w_0 w}(\lambda)$ и $w_0 T_i = T_{n-i}^- w_0$.

Отметим, что эта теорема аналогична теореме 4.2 (а также ее версии для K -теории [6], см. также [20; § 3]), описывающей циклы Шуберта при помощи операторов разделенных разностей. Однако в этой теореме операторы T_{i_j} применяются в том же порядке, что и простые транспозиции s_{i_j} , входящие в приведенное разложение элемента w , тогда как в теореме 4.2 порядок противоположный (т. е. такой же, как в w^{-1}).

5.4. Зеркальный митоз. *Митоз* – это комбинаторная операция, введенная А. Кнутсоном и Э. Миллером [14], [19], которая ставит в соответствие каждой когановской грани некоторый набор когановских граней⁵. При применении митоза в i -м столбце к множеству всех приведенных когановских граней, соответствующих перестановке w , получают все приведенные когановские грани, соответствующие всем перестановкам ws_i , удовлетворяющим условию $l(ws_i) = l(w) - 1$. Нам потребуется *зеркальный митоз*, который получается из обычного митоза транспонированием диаграмм граней (т. е. заменой строк на столбцы и наоборот). Другими словами, зеркальный митоз для перестановки w – это обычный митоз для перестановки w^{-1} . Мы используем зеркальный митоз для того, чтобы вывести теорему 5.1 из формулы Демажюра для характеров. Приведем определение зеркального митоза.

Пусть F – приведенная когановская грань размерности l . Для каждого $i = 1, \dots, n-1$ построим множество $M_i^-(F)$ приведенных когановских граней размерности $l+1$ следующим образом. Для каждого $i = 1, \dots, n-1$ будем говорить, что у диаграммы F имеется ребро в i -й строке, если грань F удовлетворяет уравнению $\lambda_{i-1,j} = \lambda_{i,j}$ при некотором j . Аналогично будем говорить, что у диаграммы F имеется ребро в i -м столбце, если грань удовлетворяет уравнению $\lambda_{j-1,i} = \lambda_{j,i}$ при каком-то j . Рассмотрим i -ю строку диаграммы грани F . Если у нее нет ребра в первом столбце, то множество $M_i^-(F)$ пусто. Теперь предположим, что i -я строка грани F содержит ребра во всех столбцах, начиная с первого и до k -го включительно, и не содержит ребра в $(k+1)$ -м столбце. В таком случае для каждого $j \leq k$ проверим, имеется ли в $(i+1)$ -й строке ребро в j -м столбце. Если да, то не будем делать ничего. Элементы множества $M_i^-(F)$ соответствуют таким значениям j , для которых на пересечении $(i+1)$ -й строки и j -го столбца ребра нет. Для каждого такого значения j удалим j -е ребро в i -й строке и сдвинем каждое ребро, расположенное слева от него в той же строке, на одну позицию в юго-восточном направлении (в $(i+1)$ -ю строку), если это возможно. Новая приведенная когановская грань $F_{i,j}$, полученная таким образом, называется j -м *потомком* грани F в i -й строке. Множество $M_i^-(F)$ состоит из потомков $F_{i,j}$ при всех $1 \leq j \leq k$.

⁵Исходное определение использовало понятие g -графов, а не когановских граней.

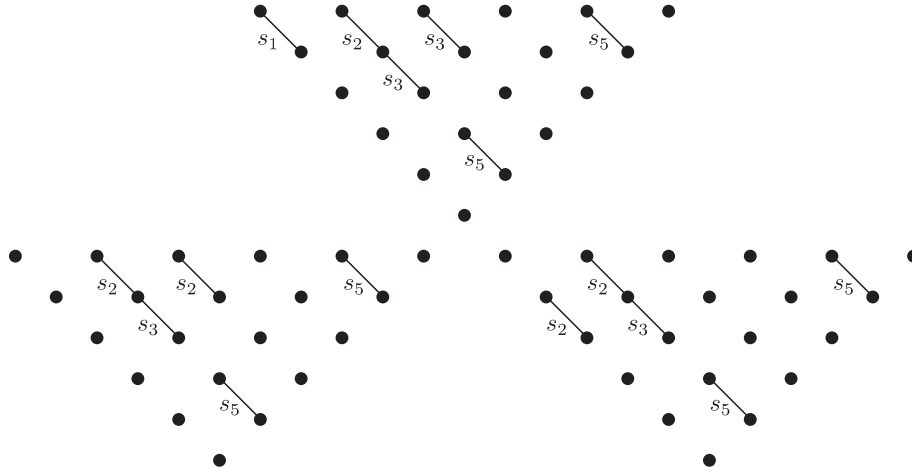


Рис. 3. Зеркальный митоз, примененный к первой строке верхней диаграммы, дает множество, состоящее из двух нижних диаграмм

Мощность множества $M_i^-(F)$ равна $k - k'$, где k' есть число ребер на первых k позициях в $(i + 1)$ -й строке. Это равняется числу мономов в $A_i(x_i^k x_{i+1}^{k'})$. Иллюстрация к понятию зеркального митоза приведена на рис. 3.

Следующая теорема вытекает из свойств обычного митоза [19].

ТЕОРЕМА 5.7. Если $l(s_i w) = l(w) - 1$, то

$$\bigcup_{w(F)=w} M_i^-(F) = \bigcup_{w(E)=s_i w} \{E\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1 теперь получается применением убывающей индукции по $l(w)$ из формулы Демажюра для характеров (второго равенства теоремы 5.6), теоремы 5.7 и следующей леммы.

КЛЮЧЕВАЯ ЛЕММА 5.8. Для всякой перестановки $w \in S_n$ и простой транспозиции s_i , удовлетворяющей условию $l(s_i w) = l(w) - 1$, имеет место равенство

$$T_i^- \chi \left(\bigcup_{w(F)=w} F_\lambda \right) = \chi \left(\bigcup_{\substack{w(F)=w, \\ E \in M_i^-(F)}} E_\lambda \right).$$

Доказательство этой леммы является чисто комбинаторным. Оно приведено в п. 6.3.

6. Митоз на параллелепипедах

В этом разделе мы сведем митоз на гранях многогранника Гельфанда–Цетлина к аналогичной операции (называемой *парамитозом*) на гранях параллелепипеда. Последняя проще для изучения и имеет прозрачный геометрический смысл (см. замечание 6.7). Парамитоз для параллелепипедов и его приложения

к экспоненциальным суммам и операторам Демазюра изучаются в пп. 6.1 и 6.2. Материал этих пунктов самодостаточен, и все результаты доказываются методами элементарной геометрии. Эти результаты затем используются в п. 6.3 для доказательства ключевой леммы 5.8. Еще одно приложение – предложение 6.6, которое дает новое минимальное представление симплекса в виде кубического комплекса.

6.1. Параллелепипеды. Рассмотрим целые числа $\mu_1, \dots, \mu_m, \nu_1, \dots, \nu_m$, удовлетворяющие условию $\mu_k \leq \nu_k$ для всех $k = 1, \dots, m$. Определим параллелепипед $\Pi(\mu, \nu)$ как выпуклый многогранник

$$\Pi(\mu, \nu) = \{y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid \mu_k \leq y_k \leq \nu_k, k = 1, \dots, m\}.$$

Для всякого параллелепипеда $\Pi = \Pi(\mu, \nu)$ рассмотрим следующую сумму:

$$S_{\Pi}(t) = \sum_{y \in \Pi \cap \mathbb{Z}^m} t^{\sigma(y)}, \quad \text{где } \sigma(y) = \sum_{k=1}^m y_k.$$

Это многочлен от t . Этот многочлен можно найти явно, а именно, справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Имеем*

$$S_{\Pi}(t) = \prod_{k=1}^m \frac{t^{\nu_k+1} - t^{\mu_k}}{t - 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле,

$$\sum_{y \in \Pi \cap \mathbb{Z}^m} t^{\sigma(y)} = \left(\sum_{y_1=\mu_1}^{\nu_1} t^{y_1} \right) \left(\sum_{y_2=\mu_2}^{\nu_2} t^{y_2} \right) \dots \left(\sum_{y_m=\mu_m}^{\nu_m} t^{y_m} \right).$$

Каждый сомножитель в правой части вычисляется как сумма геометрической прогрессии.

Следующее предложение описывает двойственность многочленов $S_{\Pi}(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Имеем*

$$S_{\Pi}(t) = t^{\sum_{k=1}^m (\mu_k + \nu_k)} S_{\Pi}(t^{-1}).$$

Доказательство сводится к непосредственному вычислению. Предложение 6.2 может быть переформулировано в комбинаторных терминах следующим образом: число способов представить целое число N как сумму $y_1 + \dots + y_m$, в которой $\mu_k \leq y_k \leq \nu_k$ для всех $k = 1, \dots, m$, совпадает с числом способов представить целое число $\sum_{k=1}^m (\mu_k + \nu_k) - N$ в таком же виде.

Зафиксируем целое число C . Рассмотрим следующий линейный оператор на пространстве многочленов Лорана от t : каждому многочлену Лорана f поставим в соответствие многочлен Лорана f^* , полученный из f заменой каждой степени t^k на t^{C-k} . Другими словами, выполнено тождество $f^*(t) = t^C f(t^{-1})$. Ясно, что $f^{**} = f$ для всякого многочлена Лорана f . Свойство двойственности многочленов S_{Π} можно переформулировать следующим образом: если

$C = \sum_{k=1}^m (\mu_k + \nu_k)$, то $S_{\Pi} = S_{\Pi}^*$. Для того же значения числа C определим оператор T_{Π} формулой

$$T_{\Pi}(f) = \frac{f - tf^*}{1 - t}.$$

Нетрудно видеть, что для всякого многочлена Лорана f функция $T_{\Pi}(f)$ тоже является многочленом Лорана. Оператор T_{Π} зависит от параллелепипеда Π .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть Γ – грань параллелепипеда $\Pi = \Pi(\mu, \nu)$, заданная уравнением $y_1 = \mu_1$ (она может совпасть со всем параллелепипедом Π , если $\mu_1 = \nu_1$). Тогда

$$S_{\Pi} = T_{\Pi}(S_{\Gamma}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\Gamma = \Pi(\mu_1, \mu_1, \mu_2, \nu_2, \dots, \mu_n, \nu_n)$. Следовательно, по предложению 6.1,

$$S_{\Gamma}(t) = t^{\mu_1} \prod_{k=2}^m \frac{t^{\nu_k+1} - t^{\mu_k}}{t - 1}$$

и

$$S_{\Pi}(t) = \prod_{k=1}^m \frac{t^{\nu_k+1} - t^{\mu_k}}{t - 1} = \frac{t^{\nu_1+1-\mu_1} S_{\Gamma}(t) - S_{\Gamma}(t)}{t - 1}. \quad (2)$$

Предложение 6.2, примененное к грани Γ , дает $S_{\Gamma}(t) = t^{2\mu_1 + \sum_{k=2}^m (\mu_k + \nu_k)} S_{\Gamma}(t^{-1})$. Подставляя это в правую часть уравнения (2), получаем искомый результат. Предложение доказано.

При определенных предположениях это предложение остается верным, если параллелепипеды Π и Γ заменены их образами при вложении $\Pi \rightarrow \mathbb{R}^k$, сохраняющем сумму координат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Рассмотрим линейный оператор $\Lambda: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, определенный над целыми числами, такой, что $\sigma \circ \Lambda = \sigma$ (функция σ в правой части – это сумма всех координатных функций на \mathbb{R}^k). Пусть Π, Γ и T_{Π} – такие же, как в предложении 6.3. Предположим, что $\Lambda(B \cap \mathbb{Z}^k) = \Pi \cap \mathbb{Z}^m$ и $\Lambda(A \cap \mathbb{Z}^k) = \Gamma \cap \mathbb{Z}^m$ для некоторых подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}^k$ таких, что ограничения отображения Λ на $B \cap \mathbb{Z}^k$ и на $A \cap \mathbb{Z}^k$ инъективны. В этом случае

$$\sum_{z \in B \cap \mathbb{Z}^k} t^{\sigma(z)} = T_{\Pi} \left(\sum_{z \in A \cap \mathbb{Z}^k} t^{\sigma(z)} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $z \in B \cap \mathbb{Z}^k$ положим $y = \Lambda(z)$. Поскольку $\sigma(z) = \sigma(y)$, мы получаем, что

$$\sum_{z \in B \cap \mathbb{Z}^k} t^{\sigma(z)} = \sum_{y \in \Pi \cap \mathbb{Z}^m} t^{\sigma(y)}$$

(эти две суммы совпадают почленно), и аналогично для правой части. Таким образом, требуемое утверждение вытекает из предложения 6.3. Предложение доказано.

6.2. Комбинаторика параллелепипедов. Пусть $\Pi = \Pi(\mu, \nu)$ – координатный параллелепипед в \mathbb{R}^m размерности m , так что $\mu_i < \nu_i$ для всех $i = 1, \dots, m$. Обсудим комбинаторику параллелепипеда Π . Для каждой точки $y \in \Pi$ с координатами (y_1, \dots, y_m) мы можем определить *парадиаграмму* (“пара” от слова параллелепипед) точки x как набор из m символов $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)$, в котором

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i &= 0, & \text{если } y_i &= \mu_i, & \tilde{y}_i &= 1, & \text{если } y_i &= \nu_i, \\ \tilde{y}_i &= * & & & & & & \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Парадиаграмма называется *приведенной*, если 1 никогда не встречается непосредственно перед 0 в этом парадиаграмме.

Рассмотрим грань F параллелограмма Π . Заметим, что все точки внутренней выпуклости грани F имеют одну и ту же парадиаграмму. Мы будем называть эту парадиаграмму *парадиаграммой грани F* . Грань F называется *приведенной*, если таковой является ее парадиаграмма. Определим *парабокс* как часть парадиаграммы, состоящую из последовательных элементов. Парабокс, заполненный последовательностью единиц (возможно, пустой), после которой следует одна звездочка, после которой следует последовательность нулей (возможно, пустая), называется *интронным*⁶ *парабоксом*. Парабокс, содержащий левый конец парадиаграммы и заполненный последовательностью (возможно, пустой) нулей, называется *начальным парабоксом*. Парабокс, содержащий правый конец парадиаграммы и заполненный последовательностью (возможно, пустой) единиц, называется *конечным парабоксом*. Нетрудно видеть, что любая приведенная парадиаграмма состоит из начального парабокса, за которым следуют несколько (возможно, 0) интронных парабокса, за которыми следует конечный парабокс. Ниже показан пример разбиения парадиаграммы на начальный, интронные и конечный парабоксы:

0 0 0	1 1 1 * 0 0	* 0 0	1 1 *	*	1 1 1
-------	-------------	-------	-------	---	-------

По определению, две приведенные грани F_1 и F_2 параллелепипеда Π одинаковой размерности связаны *L-движением*, если их пересечение является неприведенной гипергранью в обеих гранях F_1 и F_2 . Мы можем также определить *L-движение* приведенной парадиаграммы. Это операция, заменяющая один фрагмент парадиаграммы вида $* 0$ на фрагмент $1 *$. Заметим, что *L-движение* не влияет на разложение парадиаграммы на начальный, интронные и конечный парабоксы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. *Две грани F_1 и F_2 одной и той же размерности связаны L-движением, если и только если их парадиаграммы связаны L-движением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть δ_1 – парадиаграмма грани F_1 , а δ_2 – парадиаграмма грани F_2 . Поскольку грань $F_1 \cap F_2$ имеет коразмерность 1 в F_1 , парадиаграмма δ грани $F_1 \cap F_2$ получается из парадиаграммы δ_1 заменой одной звездочки на 0 или 1. Рассмотрим два случая.

⁶Происхождение этого термина объясняется в [14; разд. 3.5].

Случай 1: звездочка заменяется на 0. В этом случае, поскольку грань $F_1 \cap F_2$ неприведенная, сразу перед этой цифрой 0 должна быть цифра 1. Поскольку грань F_2 приведенная, эта цифра 1 должна заменяться на звездочку в парадиаграмме δ_2 . Следовательно, парадиаграмма δ_1 получается из парадиаграммы δ_2 L -движением.

Случай 2: звездочка заменяется на 1. В этом случае, поскольку грань $F_1 \cap F_2$ неприведенная, сразу после этой цифры 1 должна идти цифра 0. Поскольку грань F_2 приведенная, эта цифра 0 должна заменяться звездочкой в парадиаграмме δ_2 . Следовательно, парадиаграмма δ_2 получается из парадиаграммы δ_1 L -движением.

Предложение доказано.

Мы будем говорить, что две грани одинаковой размерности L -эквивалентны, если одну из них можно получить из другой последовательностью L -движений или обратных L -движений (на уровне парадиаграмм, обратные L -движения определяются как обратные операции к L -движениям). Для краткости мы будем говорить о L -классах, имея в виду классы L -эквивалентности. До конца этого пункта мы отождествляем L -классы граней с объединениями этих классов (ясно, что класс эквивалентности легко восстанавливается по своему объединению).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. *Множество L -классов составляет симплициальный клеточный комплекс, комбинаторно эквивалентный стандартному симплексу. Более точно,*

- каждый L -класс гомеоморфен замкнутому диску,
- определено взаимно однозначное соответствие между L -классами и гранями симплекса, при котором соответствующие множества гомеоморфны, а пересечения классов соответствуют пересечениям граней.

Рис. 4 иллюстрирует это предложение в случае $m = 3$.

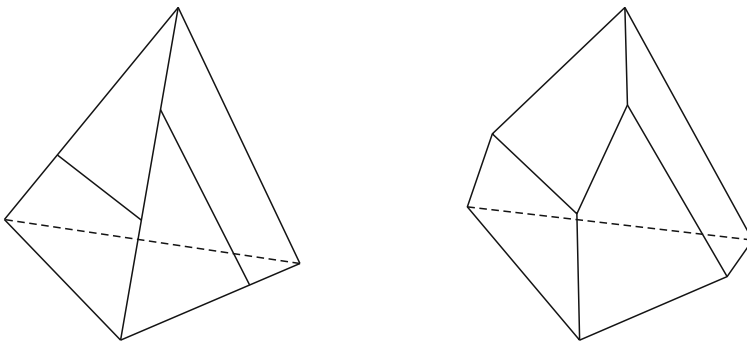


Рис. 4. Подразбиение тетраэдра с добавлением двух ребер дает комбинаторный куб

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим все приведенные вершины. Имеется ровно $m + 1$ таких вершин. Парадиаграмма приведенной вершины состоит

из последовательности нулей, за которой следует последовательность единиц. Заметим, что разные приведенные вершины никогда не бывают L -эквивалентными.

Рассмотрим произвольный L -класс A размерности k . Он содержит k интронных парабокс. Каждому L -классу A мы поставим в соответствие множество $v(A)$ из $k + 1$ вершин следующим образом: заполним первые $i \leq k$ интронных парабокс нулями, а все остальные интронные парабокс заполним единицами. Ясно, что множество $v(A)$ в точности совпадает с множеством всех приведенных вершин, содержащихся в классе A . Отсюда вытекает, что $v(A \cap B) = v(A) \cap v(B)$ для любых двух классов A и B . Заметим, что класс A однозначно определен положениями и размерами начального, интронных и конечного парабокс, т. е. множеством $v(A)$. Множество $v(A)$ порождает грань симплекса Σ – симплекса с вершинами во всех приведенных вершинах параллелепипеда Π . Таким образом, у нас есть инъективное отображение v из L -классов граней параллелепипеда Π в грани симплекса Σ ; это отображение переводит пересечения в пересечения.

Отображение v сюръективно: всякое множество приведенных вершин имеет вид $v(A)$ для некоторого класса эквивалентности A . В самом деле, класс A можно определить как класс, в котором границы интронных парабокс находятся на границах между нулями и единицами для вершин данного множества $v(A)$.

Теперь остается доказать, что всякий L -класс гомеоморфен замкнутому диску. Сначала заметим, что L -класс с только одним интронным парабокс является ломаной, звенья которой параллельны координатным осям (каждое прямолинейное звено этой ломаной отвечает определенному положению звездочки в интронном парабокс). Ломаная гомеоморфна отрезку. В общем случае L -класс является прямым произведением ломаных, описанных выше, следовательно, он гомеоморфен прямому произведению отрезков, т. е. замкнутому кубу. Предложение доказано.

Наиболее важное для нас следствие состоит в том, что пересечение двух L -классов снова является L -классом.

Теперь мы можем определить *парамитоз*. Это операция, которая делает несколько граней из одной грани F . Если парадиаграмма грани F не имеет начального парабокс, то парамитоз грани F пуст. Теперь предположим, что парадиаграмма грани F имеет непустой начальный парабокс. Мы тогда заменим его интронным парабокс: множество всех граней, полученных таким образом (соответствующих всем способам заполнения нового интронного парабокс), и есть парамитоз грани F . Ниже приведен пример парамитоза:

$$\boxed{0 \ 0 \ * \ 0} \xrightarrow{\text{парамитоз}} \boxed{* \ 0 \ * \ 0} \text{ и } \boxed{1 \ * \ * \ 0}$$

Парамитоз множества граней определяется как объединение парамитозов отдельных граней из этого множества.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.7. Нетрудно описать парамитоз L -класса, используя биекцию между L -классами и гранями стандартного симплекса, определенную в предложении 6.6. А именно, L -классы с пустыми начальными парабоксами соответствуют граням симплекса, содержащимся в некоторой гиперграни H . Пусть

v – вершина симплекса, не лежащая в гиперграни H . Тогда парамитоз грани $A \subset H$ совпадает с выпуклой оболочкой объединения A и v . Отсюда следует, что парамитоз L -класса снова является L -классом и что парамитоз пересечения двух L -классов с непустыми начальными парабоксами совпадает с пересечением их парамитозов.

Для подмножества $A \subset \Pi$ определим многочлен Лорана

$$\mathcal{S}(A) = \sum_{y \in A \cap \mathbb{Z}^m} t^{\sigma(y)}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. Пусть T_{Π} – оператор, связанный с параллелепипедом Π как в п. 6.1, функция $\sigma: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – сумма всех координат и A – L -класс граней параллелепипеда Π с непустым начальным парабоксом. Если B – парамитоз класса A , то $\mathcal{S}(B) = T_{\Pi} \mathcal{S}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим парадиаграмму грани из класса A . Предположим, что эта парадиаграмма содержит всего r парабокс, и что ℓ -й парабокс начинается с элемента с индексом j_{ℓ} (так что $j_1 = 1$). Рассмотрим следующее линейное отображение $\Lambda_F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$:

$$\Lambda_F(y_1, \dots, y_m) = \left(\sum_{j=j_1}^{j_2-1} y_j, \sum_{j=j_2}^{j_3-1} y_j, \dots, \sum_{j=j_r}^m y_j \right).$$

Имеет место равенство $\sigma \circ \Lambda_F = \sigma$, в котором σ – функция, вычисляющая сумму всех координат.

Теперь можно применить предложение 6.4 к отображению Λ_F . Предложение доказано.

Аналогичное утверждение справедливо для объединений L -классов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. Пусть A_1, \dots, A_k – L -классы с непустыми начальными парабоксами, и предположим, что L -классы B_1, \dots, B_k получены из A_1, \dots, A_k парамитозом. В этом случае

$$\mathcal{S}(B_1 \cup \dots \cup B_k) = T_{\Pi} \mathcal{S}(A_1 \cup \dots \cup A_k) = T_{\Pi} \mathcal{S}(B_1 \cup \dots \cup B_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой включения-исключения:

$$\mathcal{S}(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|-1} \mathcal{S}(A_I),$$

где суммирование производится по всем непустым подмножествам $I \subset \{1, \dots, k\}$, а A_I обозначает пересечение всех A_i , $i \in I$. Такая же формула имеет место для B_I , а оператор T_{Π} линейный, следовательно, достаточно доказать, что $\mathcal{S}(B_I) = T_{\Pi} \mathcal{S}(A_I)$. Но A_I тоже является L -классом с непустым начальным парабоксом. Таким образом, первое равенство вытекает из предложения 6.8.

Второе равенство вытекает из первого, поскольку $T_{\Pi} \circ T_{\Pi} = T_{\Pi}$.

Предложение доказано.

Обозначим через $M(A)$ парамитоз класса A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.10. *Предположим, что A_1, \dots, A_k – L -классы с непустыми начальными парабоксами, а B_1, \dots, B_r – L -классы с пустыми начальными парабоксами. Предположим, что $B_i = M((A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap B_i)$ для всех $i \in \{1, \dots, r\}$. Тогда*

$$\mathcal{SM}(A_1 \cup \dots \cup A_k \cup B_1 \cup \dots \cup B_r) = T_{\Pi} \mathcal{S}(A_1 \cup \dots \cup A_k \cup B_1 \cup \dots \cup B_r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле включения-исключения мы получаем следующее выражение для правой части (RHS):

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= T_{\Pi} \mathcal{S}(A_1 \cup \dots \cup A_k \cup B_1 \cup \dots \cup B_r) = T_{\Pi} \mathcal{S}(A_1 \cup \dots \cup A_k) \\ &\quad + T_{\Pi} \mathcal{S}(B_1 \cup \dots \cup B_r) - T_{\Pi} \mathcal{S}((A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap (B_1 \cup \dots \cup B_r)). \end{aligned}$$

Положим $A'_i = (A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap B_i$ для любого $i \in \{1, \dots, r\}$. Поскольку $B_i = M(A'_i)$, мы получаем, что $T_{\Pi} \mathcal{S}(B_1 \cup \dots \cup B_r) = T_{\Pi} \mathcal{S}(A'_1 \cup \dots \cup A'_r)$ по второму равенству из предложения 6.9. Следовательно,

$$T_{\Pi} \mathcal{S}(B_1 \cup \dots \cup B_r) = T_{\Pi} \mathcal{S}((A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap (B_1 \cup \dots \cup B_r)),$$

и RHS = $T_{\Pi} \mathcal{S}(A_1 \cup \dots \cup A_k)$.

Остается заметить, что левая часть совпадает с $\mathcal{SM}(A_1 \cup \dots \cup A_k)$, поскольку $M(B_1 \cup \dots \cup B_r)$ пусто. Искомое утверждение теперь вытекает из первого равенства в предложении 6.9. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.11. Заметим, что условие $B = M((A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap B)$ в предложении 6.10 выполнено во всех случаях, когда $B = M(A)$ для некоторого L -класса $A \subset A_1 \cup \dots \cup A_k$. В самом деле, если $B = M(A)$, то, по определению парамитоза, $A = H \cap B$, где H – это гиперплоскость $y_1 = \mu_1$. Поскольку гиперплоскость H содержит все A_i , всегда имеет место включение $(A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap B \subset H \cap B$. С другой стороны, условие $A \subset A_1 \cup \dots \cup A_k$ влечет за собой противоположное включение $H \cap B \subset (A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap B$.

6.3. Диаграммы слоя, лестничные движения и доказательство ключевой леммы 5.8. Мы теперь применим общие результаты про параллелепипеды к митозу на гранях многогранника Гельфанда–Цетлина P_λ . Зафиксируем некоторый индекс i . Рассмотрим зеркальный митоз в i -й строке (в дальнейшем под митозом мы всегда будем иметь в виду именно зеркальный митоз). Определим линейную проекцию $q_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-(n-i)}$, забывающую все элементы i -й строки, т. е. забывающую значения всех координат $\lambda_{i,j}$, первый индекс которых равен i . Определим *слои многогранника P_λ* как слои ограничения этой проекции на многогранник Гельфанда–Цетлина P_λ .

Зафиксируем значения всех координат $\lambda_{i',j}$ с $i' \neq i$. Тем самым мы получим слой многогранника P_λ . Слой можно задать в координатах $y_j = \lambda_{i,j}$ следующими неравенствами:

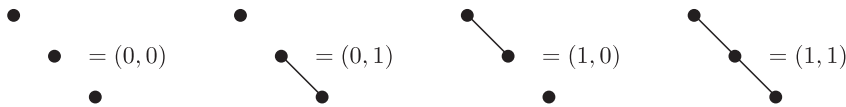
$$\begin{array}{cccccccc} \lambda_{i-1,1} & \lambda_{i-1,2} & \lambda_{i-1,3} & \dots & & & \lambda_{i-1,n-i+1} & \\ & y_1 & y_2 & \dots & & & y_{n-i} & \\ & & \lambda_{i+1,1} & \dots & \lambda_{i+1,n-i-1} & & & \end{array}$$

Положим $\mu'_j = \max(\lambda_{i-1,j}, \lambda_{i+1,j-1})$ и $\nu'_j = \min(\lambda_{i-1,j+1}, \lambda_{i+1,j})$, где $\lambda_{i+1,0} = -\infty$ (или достаточно большое отрицательное число) и $\lambda_{i+1,n-i} = +\infty$ (или

достаточно большое положительное число). Следовательно, слой можно отождествить с координатным параллелепипедом $\Pi(\mu', \nu') \subset \mathbb{R}^{n-i}$.

Пусть F – любая приведенная когановская грань многогранника P_λ . Определим слой грани F как пересечение грани F со слоем многогранника P_λ . Нам будет удобно представлять слой грани F при помощи i -й диаграммы слоя грани F , т. е. при помощи сужения диаграммы грани F на объединение строк $i-1, i, i+1$. Заметим, что митоз в i -й строке можно увидеть на уровне диаграммы слоя – он не затрагивает других частей диаграммы грани. С диаграммой каждой когановской грани мы можем связать парадиаграмму грани параллелепипеда $\Pi(\mu', \nu')$ следующим образом. Слой каждой когановской грани является гранью параллелепипеда $\Pi(\mu', \nu')$, а мы возьмем парадиаграмму этой грани (заметим, что длина этой парадиаграммы, равная размерности параллелепипеда $\Pi(\mu', \nu')$, может оказаться строго меньше, чем $n-i$). Легко проверить, что парадиаграмма приведенной когановской грани тоже приведенная и что митоз на уровне диаграмм слоя совпадает с парамитозом соответствующих парадиаграмм.

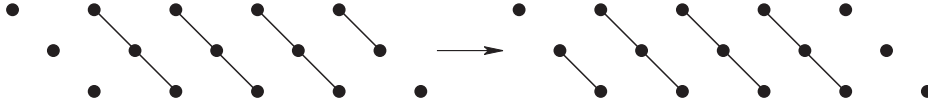
Для удобства читателя мы напомним определение *лестничного движения* (ladder move) из статьи [2] на языке приведенных когановских граней. Рассмотрим строки $i-1, i$ и $i+1$ в диаграмме грани F . Определим *диагональ* как набор из трех точек в строках $i-1, i$ и $i+1$, лежащих на прямой в направлении от северо-запада к юго-востоку, вместе со всеми отрезками, соединяющими какие-либо пары из этих трех точек и принадлежащими диаграмме грани. Диагонали бывают четырех возможных типов: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ и $(1,1)$. Первый элемент – единица, если диагональ содержит отрезок, соединяющий строчки $i-1$ и i , в противном случае первый элемент равен нулю. Второй элемент – единица, если диагональ содержит отрезок, соединяющий строки i и $i+1$, в противном случае второй элемент равен нулю:



Соответствие между диаграммами слоя и парадиаграммами теперь может быть описано в комбинаторных терминах следующим образом: диагонали типов $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ заменяются на $*$, 1 , 0 соответственно, а диагонали типа $(1,1)$ нужно проигнорировать (каждая такая диагональ уменьшает на единицу размерность параллелепипеда $\Pi(\mu', \nu')$, т. е. длину парадиаграммы). Например, первая диаграмма слоя верхней грани на рис. 3 приводит к парадиаграмме $\boxed{0\ 0\ * \ 0}$.

Определим *бокс* как любую последовательность идущих друг за другом диагоналей в диаграмме слоя. На наших картинках боксы выглядят как параллелограммы с углами 45° и 135° . По определению, *лестнично подвижный* бокс – это бокс, у которого первая (самая левая) диагональ имеет тип $(0,0)$, за ней следует произвольное число диагоналей типа $(1,1)$ и, наконец, одна диагональ типа $(1,0)$. Мы будем пользоваться символической записью $(0,0)+k(1,1)+(1,0)$ для представления этого бокса, в которой k – число диагоналей типа $(1,1)$. *Лестничное движение* из статьи [2] делает из лестнично подвижного бокса

бокс $(0, 1) + k(1, 1) + (0, 0)$:



Заметим, что лестничные движения не меняют перестановки, связанной с гранью. Более того, они переводят приведенные грани в приведенные грани. Наконец, заметим, что при соответствии между диаграммами слоя и парадиаграммами лестничные движения в точности отвечают L -движениям предыдущего пункта.

Мы теперь можем доказать ключевую лемму 5.8. Обозначим через Γ'' множество $\bigcup_{w(F)=w} F$, а через Π'' – объединение всех граней, которые получаются из граней в Γ'' митозом в i -й строке. Это те множества, которые рассматриваются в лемме 5.8, и для доказательства леммы мы должны доказать, что

$$T_i^-(\chi(\Gamma'')) = \chi(\Pi'').$$

Пусть Γ' и Π' – слои множеств Γ'' и Π'' соответственно в i -й строке, т. е. прообразы точки $z \in \mathbb{R}^{d-(n-i)}$ при ограничении отображения q_i на Γ'' и Π'' соответственно.

Тогда лемму 5.8 можно вывести из следующей леммы.

ЛЕММА 6.12. Пусть T_Π – оператор, связанный с координатным параллелепипедом $\Pi(\mu', \nu')$ как в п. 6.1. Отождествляя Γ' и Π' с подмножествами параллелепипеда $\Pi(\mu', \nu')$, мы получим

$$\sum_{y \in \Pi' \cap \mathbb{Z}^{n-i}} t^{\sigma(y)} = T_\Pi \left(\sum_{y \in \Gamma' \cap \mathbb{Z}^{n-i}} t^{\sigma(y)} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КЛЮЧЕВОЙ ЛЕММЫ 5.8 ПРИ ПОМОЩИ ЛЕММЫ 6.12. Заметим, что $q_i(\Pi')$ – это одна точка $z \in \mathbb{R}^{d-(n-i)}$ (т. е. все координаты во всех строках кроме строки i фиксированы). Выберем точку $x \in \Pi'$ и обозначим через $y = (y_1, \dots, y_{n-i})$ координаты точки x в строке i . Пусть $\sigma_j(z) = \sigma_j(x)$ (при $j \neq i$) – сумма координат в строке j . По определениям операторов T_i^- и T_Π , следующее тождество выполняется для всех $x \in \Pi'$ после подстановки $t = e^{\alpha_i}$:

$$T_i^- e^{p(x)} = \prod_{j \neq i} e^{\sigma_j(z) \alpha_j} T_\Pi(t^{\sigma(y)}).$$

В лемме 6.12 заменим t на e^{α_i} и умножим обе части на произведение

$$\prod_{j \neq i} e^{\sigma_j(z) \alpha_j}.$$

Чтобы получить ключевую лемму 5.8, теперь достаточно просуммировать полученное равенство по всем слоям множеств Π' и Π'' в i -й строке, соответствующим целым точкам $z \in \mathbb{R}^{d-(n-i)}$. Лемма 5.8 доказана.

Доказательство леммы 6.12. Лемма 6.12 получится как следствие предложения 6.10, как только мы проверим, что Γ' удовлетворяет условиям этого предложения. Мы знаем, что множество Γ' замкнуто относительно L -движений, поскольку Γ'' замкнуто относительно лестничных движений. Мы можем разбить множество Γ' в объединение L -классов $A_1 \cup \dots \cup A_k \cup B_1 \cup \dots \cup B_r$, в котором A_i и B_i соответственно имеют непустые и пустые начальные парабокссы. Согласно замечанию 6.11, достаточно показать для каждого $i \in \{1, \dots, r\}$, что $B_i = M(A'_i)$ для некоторого $A'_i \subset (A_1 \cup \dots \cup A_r)$. Это вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 6.13. Пусть F – приведенная когановская грань, для которой $w(F) = w$, а i -я диаграмма слоя начинается с \varkappa идущих подряд диагоналей типа $(1, 1)$, за которыми следует диагональ типа $(0, 0)$. Если $l(s_i w) = l(w) - 1$, то найдется другая приведенная когановская грань F' такая, что $w(F') = w$, а i -я диаграмма слоя начинается с \varkappa идущих подряд диагоналей типа $(1, 1)$, за которыми следует диагональ типа $(1, 0)$, и при этом $F \cap \Pi(\mu', \nu')$ содержится в $M(F' \cap \Pi(\mu', \nu'))$.

Доказательство. Напомним, что диаграмма грани F определяет приведенное разложение $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$, которое по определению разбивается на два приведенных слова w_1 и w_2 следующим образом. Слово $w_1 = s_{i_1} \dots s_{i_p}$ получено композицией элементарных транспозиций, соответствующих точкам на пути от нижней строки до строки i включительно, а $w_2 = s_{i_{p+1}} \dots s_{i_l}$ получено на пути от строки $(i - 1)$ до верхней строки. В частности, слово w_1 содержит только транспозиции s_j с $j \geq i$.

Если $\varkappa = 0$, то слово w_1 содержит только транспозиции s_j с $j > i$, в частности, $w_1(i) = i$, и $(i + 1, w_1^{-1}(i + 1))$ является беспорядком в перестановке w_1 , за исключением случая, когда $w_1(i + 1) = i + 1$. Следовательно, предположение $l(s_i w) < l(w)$ (эквивалентное тому, что $w^{-1}(i) > w^{-1}(i + 1)$) влечет, что $l(s_i w_2) < l(w_2)$. В самом деле,

$$w^{-1}(i) = w_2^{-1}(i) > w_2^{-1} w_1^{-1}(i + 1) \geq w_2^{-1}(i + 1)$$

(последнее неравенство выполнено, поскольку слово $w = w_1 w_2$ приведенное). Если $\varkappa > 0$, то слово w_1 можно дальше разложить как $w'_1 s_{i+1} s_{i+2} \dots s_{i+\varkappa} s_i s_{i+1} \dots s_{i+\varkappa-1} w''_1$, где w'_1 содержит только транспозиции s_j с $j > i$, а w''_1 содержит только транспозиции s_j с $j > i + \varkappa$. Рассуждая аналогично, мы заключаем, что $l(s_{i+\varkappa} w_2) < l(w_2)$ (надо использовать тождество $s_i(s_{i+1} s_{i+2} \dots s_{i+\varkappa} s_i s_{i+1} \dots s_{i+\varkappa-1}) = (s_{i+1} s_{i+2} \dots s_{i+\varkappa} s_i s_{i+1} \dots s_{i+\varkappa-1}) s_{i+\varkappa}$).

Применяя к слову $w_2 = s_{i_{p+1}} \dots s_{i_l}$ свойство замены (exchange property), мы можем заменить это слово приведенным словом $w'_2 = s_{i+\varkappa} s_{i_{p+1}} \dots \hat{s}_{i_r} \dots s_{i_l}$. Теперь заменим грань F приведенной гранью F' с той же самой перестановкой и непустым начальным парабоксом следующим образом. Из диаграммы грани F удалим ребро, соответствующее транспозиции s_{i_r} и добавим новое ребро $\lambda_{i, \varkappa+1} = \lambda_{i-1, \varkappa+1}$. Получившаяся диаграмма грани определяет грань F' . По построению, $M(F' \cap \Pi(\mu', \nu'))$ содержит $F \cap \Pi(\mu', \nu')$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству леммы 6.12. Применим лемму 6.13 к приведенной когановской грани $F \in \Gamma''$, парадиаграмма B которой лежит в B_i и начинается

с символа $*$. Мы получим грань $F' \in \Gamma''$ такую, что ее парадиаграмма A лежит в $A_1 \cup \dots \cup A_r$ и $M(A) = B$. Следовательно, класс L -эквивалентности A'_i парадиаграммы A тоже лежит в $A_1 \cup \dots \cup A_r$ и $M(A'_i) = B_i$, что и требовалось. Лемма 6.12 доказана.

Список литературы

- [1] Н. Н. Andersen, “Schubert varieties and Demazure’s character formula”, *Invent. Math.*, **79**:3 (1985), 611–618.
- [2] N. Bergeron, S. Billey, “RC-graphs and Schubert polynomials”, *Experiment. Math.*, **2**:4 (1993), 257–269.
- [3] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, “Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P ”, *УМН*, **28**:3(171) (1973), 3–26; англ. пер.: I. N. Bernstein, I. M. Gel’fand, S. I. Gel’fand, “Schubert cells and cohomology of the spaces G/P ”, *Russian Math. Surveys*, **28**:3 (1973), 1–26.
- [4] M. Brion, “The structure of the polytope algebra”, *Tohoku Math. J. (2)*, **49**:1 (1997), 1–32.
- [5] I. Coskun, “A Littlewood–Richardson rule for two-step flag varieties”, *Invent. Math.*, **176**:2 (2009), 325–395.
- [6] M. Demazure, “Désingularisation des variétés de Schubert généralisées”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **7** (1974), 53–88.
- [7] S. Fomin, A. N. Kirillov, “The Yang–Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials”, *Discrete Math.*, **153**:1–3 (1996), 123–143.
- [8] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, МЦНМО, М., 2006, 328 с.; пер. с англ.: W. Fulton, *Young tableaux*, With application to representation theory and geometry, London Math. Soc. Stud. Texts, **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, x+260 pp.
- [9] K. Kaveh, “Note on cohomology rings of spherical varieties and volume polynomial”, *J. Lie Theory*, **21**:2 (2011), 263–283, arXiv:math/0312503.
- [10] K. Kaveh, A. G. Khovanskii, “Newton–Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory”, *Ann. of Math. (2)*, **176**:2, 925–978, arXiv:0904.3350.
- [11] А. Г. Хованский, “Многогранник Ньютона, полином Гильберта и суммы конечных множеств”, *Функц. анализ и его прил.*, **26**:4 (1992), 57–63; англ. пер.: A. G. Khovanskii, “Newton polyhedron, Hilbert polynomial, and sums of finite sets”, *Funct. Anal. Appl.*, **26**:4 (1992), 276–281.
- [12] V. Kiritchenko, “Gelfand–Zetlin polytopes and geometry of flag varieties”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2010, № 13, 2512–2531.
- [13] S. L. Kleiman, “The transversality of a general translate”, *Compositio Math.*, **28** (1974), 287–297.
- [14] A. Knutson, E. Miller, “Gröbner geometry of Schubert polynomials”, *Ann. of Math. (2)*, **161**:3 (2005), 1245–1318.
- [15] M. Kogan, *Schubert geometry of flag varieties and Gelfand–Cetlin theory*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [16] M. Kogan, E. Miller, “Toric degeneration of Schubert varieties and Gelfand–Tsetlin polytopes”, *Adv. Math.*, **193**:1 (2005), 1–17.
- [17] A. Lascoux, M.-P. Schützenberger, “Polynômes de Schubert”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **294**:13 (1982), 447–450.
- [18] L. Manivel, *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*, Cours Spec., **3**, Société Mathématique de France, Paris, 1998, vi+179 pp.

- [19] E. Miller, “Mitosis recursion for coefficients of Schubert polynomials”, *J. Comb. Theory Ser. A*, **103**:2 (2003), 223–235.
- [20] H. Pittie, A. Ram, “A Pieri–Chevalley formula in the K -theory of a G/B -bundle”, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1999), 102–107.
- [21] A. Postnikov, R. P. Stanley, “Chains in the Bruhat order”, *J. Algebraic Combin.*, **29**:2 (2009), 133–174.
- [22] А. В. Пухликов, А. Г. Хованский, “Теорема Римана–Роха для интегралов и сумм квазиполиномов по виртуальным многогранникам”, *Алгебра и анализ*, **4**:4 (1992), 188–216; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii, “The Riemann–Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials on virtual polytopes”, *St. Petersburg Math. J.*, **4**:4 (1993), 789–812.
- [23] В. А. Тиморин, “Аналог соотношений Ходжа–Римана для простых выпуклых многогранников”, *УМН*, **54**:2(326) (1999), 113–162; англ. пер.: V. A. Timorin, “An analogue of the Hodge–Riemann relations for simple convex polytopes”, *Russian Math. Surveys*, **54**:2 (1999), 381–426.

В. А. Кириченко (V. A. Kirichenko)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: vkiritchenko@yahoo.ca

Поступила в редакцию

25.05.2012

Е. Ю. Смирнов (E. Yu. Smirnov)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”;
Лаборатория Понселе Независимого Московского
университета
E-mail: evgeny.smirnov@gmail.com

В. А. Тиморин (V. A. Timorin)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”;
Независимый Московский университет
E-mail: vtimorin@hse.ru