ИСЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: МЕТОД ШАЛЯ И ШУБЕРТА

Валентина Кириченко

1. Исчисление Шуберта

Исчислительная геометрия считает число геометрических объектов с заданными свойствами. Одна из самых первых задач исчислительной геометрии — это задача Аполлония.

Задача 1.1 (Аполлоний). *Сколько существует окружностей, касающихся трёх заданных окружностей на плоскости?*

Эта задача была решена ещё в Древней Греции в третьем веке до нашей эры. Ответ зависит от взаимного расположения окружностей. Мы не будем рассматривать конфигурации из трёх окружностей, для которых ответ бесконечен. Для остальных конфигураций оказывается, что максимальный возможный ответ восемь, а вообще ответ может быть и любым меньшим числом, кроме семи.

В задаче Аполлония все окружности, касающиеся трёх данных, можно найти явно. Например, попробуйте построить такие окружности с помощью циркуля и линейки. Однако, в большинстве других задач исчислительной геометрии можно найти число объектов с заданными геометрическим свойствами, не находя при этом сами объекты. Часто даже бывает, что найти явно сами объекты невозможно, зато несложно вычислить, сколько их будет.

В девятнадцатом веке исчислительная геометрия была одной из самых популярных областей математики. Было решено множество конкретных задач, а кроме того, немецкий математик Герман Шуберт разработал единый эффективный метод, позволяющий решать задачи исчислительной геометрии средствами алгебры. Шуберт назвал свой метод *исчислением условий*, но теперь метод Шуберта чаще называют *исчислением Шуберта.* Проиллюстрируем метод Шуберта на таком примере.

Задача 1.2 (Шуберт). *В трёхмерном пространстве задано четыре попарно скрещивающихся прямых. Сколько существует прямых, пересекающих все четыре заданные прямые?*

Возможных ответов четыре: две, одна, ни одной или бесконечно много.

Эту задачу можно решать по-разному. Один из способов вытекает из задачи 1.3. Мы же разберём решение Шуберта. При этом нас будут интересовать только те конфигурации из четырёх прямых, для которых ответ конечен и при этом

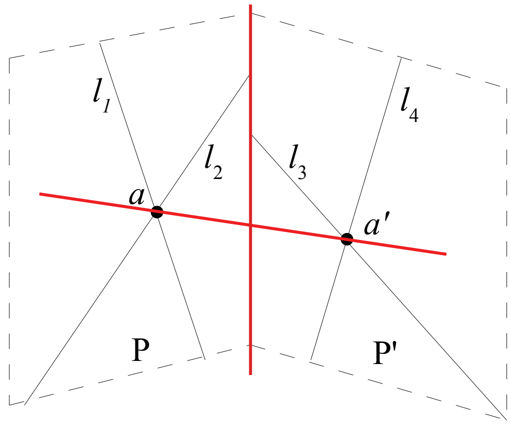

Рис. 1

максимален. Оказывается, что если чуть-чуть подвигать прямые в такой конфигурации, то ответ не изменится. Это один из фундаментальных принципов исчисления Шуберта — *принцип сохранения числа*. Пользуясь этим принципом можно заменять одну конфигурацию прямых на другую, более простую. Идея Шуберта — вместо четырёх попарно скрещивающихся прямых рассмотреть следующий специальный случай: прямые l_1 и l_2 пересекаются, и прямые l_3 и l_4 — тоже (см. рис. 1). Пусть прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке a. Тогда они лежат в одной плоскости, которую мы обозначим через P. Точку пересечения прямых l_3 и l_4 обозначим через a', а содержащую их плоскость — через P'. Легко доказать геометрически, что ровно две прямых пересекают все четыре прямых l_1, l_2, l_3 и l_4: прямая, проходящая через точки a и a', и прямая пересечения плоскостей P и P'. Мы же докажем это алгебраически с помощью исчисления условий. Преимущество алгебраического метода в его универсальности — он работает и в более сложных задачах, где геометрической интуиции уже не хватает.

Определим *условие* σ_i на прямую l таким образом: условие σ_i выполнено, если прямая l пересекает прямую l_i. Условия можно складывать и умножать. Под суммой нескольких условий будем понимать выполнение хотя бы одного из условий (то, что в логике называется *дизъюнкцией*), а под произведением — выполнение всех условий одновременно (то есть *конъюнкцию*). Тогда, скажем, условие $\sigma_1 + \sigma_2$ есть условие пересечения с l_1 или l_2, а выполнение условия $\sigma_1\sigma_2$ равносильно пересечению с обеими прямыми l_1 и l_2. Условие пересечения прямой l со всеми четырьмя прямыми l_1, l_2, l_3, l_4 — это условие $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$. Легко проверить, что сложение и умножение условий удовлетворяет обычным свойствам сложения и умножения, таким как переместительный, сочетательный и распределительный законы. Мы будем считать два условия равными, если им удовлетворяют одни и те же прямые. Наша цель — заменить условие $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ на равное ему, но более простое условие.

Обозначим за ρ_a условие, что прямая l проходит через точку a, а за τ_P — условие, что прямая l лежит в плоскости P. Тогда легко проверить, что $\sigma_1\sigma_2 = \rho_a + \tau_P$. Аналогично, $\sigma_3\sigma_4 = \rho_{a'} + \tau_{P'}$. Следовательно,

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = \rho_a\rho_{a'} + \rho_a\tau_{P'} + \tau_P\rho_{a'} + \tau_P\tau_{P'}.$$

Теперь заменим условие в левой части и каждое из четырёх условий в правой части на число прямых, удовлетворяющих этому условию. Здесь мы используем ещё один фундаментальный принцип исчисления Шуберта — алгебраические тождества на условия при таких заменах дают верные численные равенства. Легко проверить, что каждому из условий $\rho_a\rho_{a'}$ и $\tau_P\tau_{P'}$ удовлетворяет ровно одна прямая, а условиям $\rho_a\tau_{P'}$ и $\tau_P\rho_{a'}$ — ни одной. Поэтому мы опять получаем, что число прямых, пересекающих l_1, l_2, l_3, l_4, равно двум.

Примерно таким образом Шуберт сводил сложные условия к более простым и в других задачах. То, что специальный случай даст тот же ответ, что и общий, Шуберт не обосновывал, и поэтому его современники неоднократно пытались уличить его, приводя примеры, в которых вырожденный случай даёт неверный ответ. Однако, во всех вычислениях Шуберта ответ получался правильным. Давид Гильберт включил проблему обоснования исчисления Шуберта в свой знаменитый список проблем под номером 15. Попытки решить эту проблему способствовали развитию некоторых важных направлений современной математики, таких как *алгебраическая геометрия*. С тех пор методы Шуберта были частично обоснованы с помощью *теории пересечений* (последняя и была создана во многом для того, чтобы формализовать исчисление Шуберта), но в полном объёме 15-я проблема Гильберта пока не решена.

Исчислению условий и его многочисленным приложениям к конкретным задачам исчислительной геометрии Шуберт посвятил целую книгу “Kalkül der abzählenden Geometrie”, изданную в 1879 году. Спустя сто лет книга Шуберта была впервые переиздана, а интерес к исчислительной геометрии вновь вырос — оказалось, что она важна для *теории струн*, новой физико–математической теории, призванной единым образом объяснить природу всех физических взаимодействий.

Задача 1.3. *Докажите, что прямые в трёхмерном пространстве, пересекающие три попарно скрещивающиеся прямые, заметают поверхность, заданную уравнением степени два. (На самом деле, такая поверхность — либо однополостный гиперболоид, либо гиперболический параболоид, но для решения задачи Шуберта это неважно.)*

2. Задача Штейнера

Теперь мы обсудим одну из самых знаменитых задач исчислительной геометрии девятнадцатого века, обобщающую задачу Аполлония. Задачу поставил известный немецкий геометр Якоб Штейнер в 1848 году, а решил известный французский геометр Мишель Шаль в 1864 году. Чтобы сформулировать задачу, мы сначала обобщим понятие окружности так, чтобы оно включило в себя таких ближайших родственников окружностей, как эллипсы, гиперболы и параболы. В координатах (x, y) все эти кривые можно задать уравнением

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (*)$$

при подходящем выборе коэффициентов a, b, c, d, e и f. Кривая, заданная уравнением $(*)$ называется *кривой второго порядка* или *коникой*, если a, b и c не равны нулю одновременно. Второе название связано с тем, что любую конику можно получить как *коническое сечение*, то есть пересечение прямого кругового конуса, заданного уравнением $\alpha z^2 = x^2 + y^2$ (при подходящем выборе положительного числа α), с некоторой плоскостью в трёхмерном пространстве. Например, коники получаются, когда свет от настольной лампы с абажуром конической формы падает на стены. Будем называть *вырожденными* те коники, которые получаются как сечения конуса плоскостями, проходящими через начало координат. Все остальные коники назовём *невырожденными*.

Упражнение 2.1. *Проверьте, что невырожденная коника — это или эллипс (окружность мы считаем частным случаем эллипса), или гипербола, или парабола, а вырожденная коника — это точка, прямая или пара прямых.*

Заметим, что коника определяется шестью коэффициентами (a, b, c, d, e, f), но при этом прорпорциональные наборы коэффициентов (то есть наборы (a, b, c, d, e, f) и (λa, λb, λc, λd, λe, λf), где $\lambda \neq 0$) задают одну и ту же конику. Так что на самом деле коники зависят от пяти независимых параметров. Поэтому во всех исчислительных задачах речь пойдёт о кониках, заданных пятью независимыми условиями (тогда число таких коник, как правило, конечно). Например, естественным обобщением задачи Аполлония будет такая задача.

Задача 2.2 (Штейнер)**.** *Сколько невырожденных коник касается данных пяти коник?*

Как и в задаче Шуберта, нас интересует максимально возможный конечный ответ. Вместе с задачей Штейнер сразу дал и ответ, но неверный. Ответ Штейнера — 7776 (это 6^5). Штейнер не приводил полного решения, а лишь заметил, что число коник, касающихся данной коники и проходящих через четыре данные точки равно максимум 6 (это правда, как мы вскоре увидим), число коник, касающихся двух данных коник и проходящих через три данные точки равно максимум 6^2 (и это правда), а далее — по аналогии. На самом деле, уже число коник, касающихся трёх данных коник и проходящих через две данные точки всегда строго меньше чем 6^3. В 1859 году французский математик Эрнест де Жонкьер нашёл правильный ответ в задаче Штейнера, но не решился опубликовать его, настолько был велик авторитет Штейнера. Де Жонкьер был учеником Шаля и, помимо занятий математикой, служил во французском флоте, где дослужился до чина адмирала.

Правильный ответ — 3264. Первым его опубликовал Шаль. Шаль решил задачу Штейнера (и множество других задач про коники), используя исчисление условий, похожее на исчисление Шуберта, но в более громоздкой форме, так как Шаль меньше пользовался алгебраическими тождествами при вычислениях с условиями. Мы разберём решение Шаля в изложении Шуберта.

В задаче Штейнера (как и в других задачах исчислительной геометрии девятнадцатого века) речь идёт о числе *комплексных* коник, то есть коэффициенты a, b, c, d, e, f могут быть любыми комплексными числами. Это задачу упрощает, потому что для почти всех конфигураций из пяти коник получается один и тот же ответ, а именно, максимально возможный среди конечных. В частности, любые пять коник всегда можно чуть-чуть подвигать так, чтобы ответ в задаче Штейнера для новой конфигурации был максимальным среди конечных ответов. То есть принцип сохранения числа в комплексном случае сильнее чем, в вещественном. Связано это с тем, что любое квадратное уравнение имеет два комплексных корня с учётом кратностей, тогда как вещественных корней может быть или два, или ни одного.

Если же искать только число вещественных коник, то ответ (как и в задаче Аполлония) будет существенно зависеть от выбора конфигурации из пяти коник. В наше время очень популярна *вещественная исчислительная геометрия*, которая, в частности, ищет конфигурации, для которых все решения окажутся вещественными. Например, в задаче Штейнера существует конфигурация из пяти гипербол, для которой все 3264 коники оказываются вещественными (1997, Ronga, Tognoli, Vust). Кроме того, для любой конфигурации из пяти эллипсов с непересекающимися внутренностями, найдётся по крайней мере 32 вещественных коники, касающиеся всех пяти эллипсов (2005,Welschinger). Для остальных конфигураций никаких оценок на число вещественных решений задачи Штейнера пока не известно.

Задача 2.3. *При каком расположении трёх окружностей на плоскости задача Аполлония для них имеет 8 вещественных решений?*

3. Решение Шаля

Сначала переформулируем задачу Штейнера на языке исчисления условий. Пусть κ_Q — условие касания с данной коникой Q. Нам нужно найти число невырожденных коник, удовлетворяющих условию $\kappa_{Q_1} \cdot \ldots \cdot \kappa_{Q_5}$ для пяти данных коник $Q_1,\ldots, Q_5$. Для простоты мы будем обозначать все условия κ_{Q_i} через κ. Такая вольность в обозначениях оправдывается принципом сохранения числа в комплексном случае — нас ведь интересует только число коник (а не сами коники), удовлетворяющих условию $\kappa_{Q_1} \cdot \ldots \cdot \kappa_{Q_5}$, а число будет одним и тем же для почти всех наборов $Q_1,\ldots, Q_5$. Вообще, исчисление Шуберта во многом основано на таких двусмысленных (и даже *много*смысленных) обозначениях, которые позволяют оперировать с разными условиями как с эквивалентными. Только с развитием *теории гомологий* в первой половине двадцатого века стало возможным строго определить эквивалентность условий, спрятанную в обозначениях Шуберта.

Шаль догадался, что условие κ можно выразить через более простые условия. В качестве самых простых условий Шаль взял условие прохождения через данную точку и условие касания с данной прямой (традиционно эти условия обозначаются буквами μ и ν, соответственно). Заметим, что условия μ и ν можно умножать на натуральные числа. Например, определим условие 2μ как сумму условия прохождения через точку a_1 и условия прохождения через точку a_2, где a_1 и a_2 различны (то есть мы опять злоупотребляем обозначениями и пишем 2μ вместо $\mu_{a_1} + \mu_{a_2}$).

Пусть нам удалось представить условие κ в виде суммы $m\mu + n\nu$ для некоторых целых неотрицательных чисел m и n. Тогда $\kappa^5 = (m\mu + n\nu)^5$ можно формально преобразовать, раскрывая скобки:

$$\kappa^5 = m^5\mu^5 + 5m^4n\mu^4\nu + 10m^3n^2\mu^3\nu^2 + 10m^2n^3\mu^2\nu^3 + 5mn^4\mu\nu^4 + n^5\nu^5. \qquad (1)$$

Заметим, что каждому моному $\mu^k\nu^{5-k}$ можно придать геометрический смысл — это в точности условие, что коника проходит через k данных точек и касается $(5-k)$ данных прямых. Из принципа сохранения тождеств получаем, что формальное тождество (1) останется верным, если заменить κ^5 на число коник, касающихся пяти данных коник, а каждый моном $\mu^k\nu^{5-k}$ — на число коник, проходящих через k данных точек и касающихся $(5-k)$ данных прямых. Сам Шаль этим принципом не пользовался, и лишь в 1873 году французский математик Жорж-Анри Гальфен заметил, что использование тождества (1) упрощает рассуждения Шаля. Именно замечание Гальфена подтолкнуло Шуберта к созданию исчисления условий. В следующем разделе мы найдём, что $\mu^5 = \nu^5 = 1$, $\mu^4\nu = \mu\nu^4 = 2$, $\mu^3\nu^2 = \mu^2\nu^3 = 4$. Поэтому

$$|\kappa^5| = m^5 + 10m^4n + 40m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5, \qquad (2)$$

где $|\kappa^5|$ обозначает число коник, удовлетворяющих условию κ^5. Причём это равенство справедливо для любого условия κ, представимого в виде $m\mu + n\nu$ (мы пока нигде не использовали, что κ — это именно условие касания с коникой).

В следующем разделе мы, пользуясь *полярной двойственностью*, докажем, что если условие касания с коникой можно представить в виде $m\mu+n\nu$, то тогда обязательно $m = n$, то есть $\kappa = n(\mu + \nu)$. Осталось найти n. Следуя Шуберту, мы опять рассмотрим специальный случай вместо общего. Вместо условия касания κ_Q с невырожденной коникой Q (скажем, с гиперболой $xy - 1 = 0$), попробуем описать условие касания κ_{Q_0} с вырожденной коникой Q_0, состоящей из пары пересекающихся прямых l_1 и l_2 (например, вместо гиперболы можно взять конику $xy = 0$). Тогда легко проверить, что невырожденная коника Q' касается коники Q_0, если выполнено одно из трёх условий: коника Q' касается прямой l_1, касается прямой l_2, или проходит через точку пересечения p прямых

l_1 и l_2. При этом достаточно далеко от точки p вырожденную конику Q_0 можно очень хорошо приблизить некоторой невырожденной коникой Q (например, гипербола $xy = 1$ хорошо приближает пару прямых $xy = 0$ вдали от начала координат). Поэтому $\kappa_Q = m\mu + 2\nu$, откуда $n = 2$.

Подставив $m = n = 2$ в тождество (2), получим правильный ответ в задаче Штейнера:

$$|\kappa^5| = 2^5(1 + 10 + 40 + 40 + 10 + 1) = 2^5 \cdot 102 = 3264.$$

Упражнение 3.1 (проверка рассуждения Штейнера)**.** *Для $k = 1, 2, 3, 4$, используйте метод Шаля, чтобы найти число невырожденных коник, касающихся k данных коник и проходящих через $(5 - k)$ данных точек.*

Мы (как и Шаль) не обосновали, что условие касания с коникой выражается через условия μ и ν. Это нетривиальный факт. Почему, например, нельзя выразить это условие только через μ? Вообще, идея выражать сложные условия через простые появилась сначала у де Жонкьера, и он как раз пытался выражать всё только через условие μ. Если бы мы так действовали, то мы бы получили, что $\kappa = 6\mu$, поскольку $|\kappa\mu^4| = 6$ (последнее равенство следует из упражнения 3.1, но его можно вывести, не пользуясь методом Шаля). Тогда $|\kappa^5| = 6^5|\mu^5| = 6^5$, а это в точности неправильный ответ Штейнера. Однако метод Шаля (выражать условия через μ и ν) даёт правильный ответ. Вскоре после того, как Шаль опубликовал свой метод, сразу несколько математиков (в том числе Гальфен, Фердинанд Линдеманн, Шуберт и его ученик — 17-летний гимназист Адольф Гурвиц) строго доказали применимость метода Шаля в большом числе случаев (в том числе, в задаче Штейнера).

Казалось, что метод Шаля универсален. Однако в 1876 году Гальфен привёл пример условия на невырожденные коники, которое нельзя выразить только через условия μ и ν. Это положило начало долгой дискуссии между Шубертом и Гальфеном. Шуберт считал, что условия всё равно нужно выражать через μ и ν, а то, что ответ при этом не будет иметь исчислительного значения (как ответ Штейнера), не так важно. Гальфен же считал, что нужно вводить дополнительные базовые условия, хотя это и делает метод Шаля более громоздким (так как можно придумать исчислительную задачу про коники, решение которой требует любого наперёд заданного числа базовых условий). В общем, спор шёл о том, что лучше — красивая теория или полезные приложения. В конце концов Шуберт согласился с Гальфеном, а идеи Гальфена присутствуют теперь во многих красивых и при этом универсальных результатах, связанных с исчислительной геометрией.

4. Исчислительная геометрия коник

В этом разделе мы решим все задачи про коники, ответы в которых мы использовали при решении задачи Штейнера. Для каждого $k = 0, 1, \ldots, 5$, мы найдём число невырожденных коник, проходящих через k данных точек на плоскости и касающихся $(5-k)$ данных прямых. Как всегда, нас будет интересовать максимальный конечный ответ. Начнём с самой простой задачи.

Задача 4.1. *Сколько невырожденных коник проходит через пять точек?*

Понятно, что вырожденные коники, то есть пары (возможно совпадающих) прямых, не могут проходить через пять точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, поэтому слово невырожденный в условии этой задачи можно опустить. Заметим, что если коника, заданная уравнением $(*)$, проходит через данную точку с координатами (x_0, y_0), то коэффициенты $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)$ удовлетворяют однородному линейному уравнению

$$ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0.$$

Коэффициенты коники, проходящей через две данные точки, удовлетворяют двум однородным линейным уравнениям специального вида. Это наблюдение лежит в основе такого приёма. **Коники, проходящие через две данные точки можно заменить на окружности.** Дело в том, что окружности — это коники, удовлетворяющие двум однородным линейным уравнениям:

$$a = c, \quad b = 0.$$

На самом деле, окружности можно охарактеризовать как коники, проходящие через две фиксированные точки, только точки эти будут "мнимыми" и "бесконечно удалёнными".

Поэтому при $k \geq 2$ вместо числа коник, проходящих через k точек и касающихся $(5-k)$ прямых можно искать число окружностей, проходящих через $(k-2)$ точки и касающихся $(5-k)$ прямых. Это проще, так как можно использовать геометрическую интуицию. Более того, при $k = 2, 4, 5$, можно подобрать конфигурацию из $(k-2)$ точек и k прямых так, что все окружности окажутся вещественными. Поэтому можно использовать и наши знания из планиметрии. В частности, число коник, проходящих через пять данных точек, равно числу (вещественных) окружностей, проходящих через три данные точки. Как мы знаем, через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит ровно одна окружность.

Чтобы придать точный смысл термину "бесконечно удалённая точка" нужно вместо коники, заданной уравнением $(*)$, рассмотреть конус в трёхмерном пространстве, заданный однородным уравнением

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0. \qquad (**)$$

Тогда исходная коника будет сечением конуса плоскостью $z = 1$. Есть взаимно-однозначное соответствие между точками на плоскости $z = 1$ и прямыми в пространстве, проходящими через точку $(0, 0, 0)$ и не параллельными плоскости $z = 1$: точке (x_0, y_0) поставим в соответствие прямую, проходящую через начало координат и точку $(x_0, y_0, 1)$. При этом точкам коники $(*)$ будут соответствовать прямые на конусе $(**)$. Но на конусе могут быть ещё две прямых, которым никакие точки коники не соответствуют — это прямые, по которым конус пересекается с плоскостью $z = 0$. Пересечение можно задать уравнениями $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ и $z = 0$. Заметим, что над комплексными числами уравнение $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ всегда раскладывается на два линейных множителя, например, в случае окружности, имеем $a(x^2+y^2) = a(x+iy)(x-iy)$. С точки зрения *проективной геометрии*, коника — это множество *всех* прямых на конусе $(**)$, поэтому прямые, проходящие через начало координат и точку $(1, i, 0)$ или $(1, -i, 0)$ дают нам две полноправных точки на конике.

Заменяя на окружности коники, проходящие через две точки, можно решить и такую задачу.

Задача 4.2. *Сколько невырожденных коник касается прямой и проходит через четыре точки?*

Решение задачи 4.2 предоставляется читателю.

Заметим, что вещественных окружностей, проходящих через две данные точки и касающихся данной прямой, может быть как две или одна (если точки лежат по одну сторону от прямой), так и ни одной (если точки оказались в разных полуплоскостях). Но с комплексными числами такой сложности не возникает. Если мы допускаем комплексные значения координат x и y, то прямая перестаёт делить плоскость на две полуплоскости! Возьмём, к примеру, прямую $y = 0$ и точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$. Тогда из одной точки можно пройти в другую по пути, не пересекающему прямую $y = 0$ (пойдём, например, по пути $(0, \cos(\pi t) + i \sin(\pi t))$, где t пробегает все вещественные числа от 0 до 1). Это свойство комплексных чисел и его обобщения лежат в основе принципа сохранения числа.

Задача 4.3. *Сколько невырожденных коник касаются трёх прямых и проходят через две точки?*

Нужно найти число окружностей, касающихся трёх прямых. Можно проверить, что максимальный конечный ответ получится, только если никакие две прямые друг другу не параллельны. В этом случае, рассмотрим треугольник с вершинами в точках пересечения прямых. Тогда легко видеть, что окружностей, касающихся всех сторон треугольника или их продолжений будет четыре: одна вписанная и три вневписанных.

Заметим, что ответ в задаче 4.3 изменится, если опустить требование невырожденности. Действительно, вырожденная коника, заданная уравнением $(px + qy + r)^2 = 0$ (такая коника называется *двойной прямой*), будет касаться сразу всех прямых, пересекающих прямую $px + qy + r = 0$. Геометрически это может показаться немотивированным, но легко проверяется с помощью алгебраического определения касания коники с прямой: коника касается прямой, если в ограничении на эту прямую уравнение коники имеет кратный корень. Например, коника $(*)$ касается прямой $y = 0$, если уравнение $ax^2 + dx + f$ имеет кратный корень. Выберем числа p, q и r так чтобы прямая $px + qy + r = 0$ проходила через две точки из задачи 4.3. Тогда вырожденная коника $(px + qy + r)^2 = 0$, будет проходить через эти две точки и касаться любых трёх прямых, не параллельных прямой $px + qy + r = 0$, то есть даст лишнее решение в задаче 4.3.

Теперь решим самую, на первый взгляд, сложную задачу.

Задача 4.4. *Сколько невырожденных коник касается пяти прямых?*

Здесь условие невырожденности тоже существенно. Если его отбросить, то решений будет бесконечно много — все двойные прямые, не параллельные пяти данным в задаче прямым, будут решениями. Заметим, что коники больше не проходят через две фиксированные точки, поэтому их нельзя заменить на окружности. Решить эту задачу нам поможет *полярная двойственность.* Мы сначала напомним, как она определяется в вещественном случае.

Если зафиксировать окружность C на плоскости, то каждой точке можно сопоставить прямую, называемую *полярой* этой точки. И наоборот, каждой прямой можно поставить в соответствие точку — *полюс.* Делается это так. Пусть p — точка вне окружности C. Проведём из точки p касательные к окружности C. Прямая l_p, проходящая через точки касания, и будет *полярой* точки p, а точка p будет *полюсом* прямой l_p. Тем самым, мы определили поляры для точек вне C, и полюса для прямых, пересекающих C. (Используя понятие *инверсии* относительно окружности C, можно иначе сказать, что l_p получается инверсией окружности, построенной как на диаметре на отрезке p_0p, где p_0 — центр окружности C.)

Упражнение 4.5. *Проверьте, что если точки q и r лежат на поляре l_p, то поляры l_q и l_r пересекаются в точке p. (Например, можно использовать свойства инверсии.)*

Это упражнение позволяет доопределить полярную двойственность для точек внутри окружности C (из которых касательные не проведёшь) и для прямых, не пересекающих C. Действительно, пусть теперь точка p лежит внутри. Проведём две прямые через p и обозначим через q и r их полюса. Тогда поляра точки p — это, по определению, прямая, проходящая через q и r, причём определение не зависит от выбора прямых.

Упражнение 4.6. *Определите полюс прямой, не пересекающей окружность C.*

Центр окружности C — это единственная точка, оставшаяся без поляры, но можно сказать, что полярой центра является *бесконечно удалённая прямая.* Как и раньше, каждой точке p на плоскости $z = 1$ сопоставим прямую P в пространстве, проходящую через начало координат и точку p. Тогда каждой прямой l на плоскости $z = 1$ будут соответствовать плоскость L в пространстве, проходящая через начало координат и прямую l. Бесконечно удалённая прямая — это плоскость $z = 0$. Теперь полярную двойственность можно определить так: прямой P поставим в соответствие плоскость L, перпендикулярную прямой P. То есть в пересечении с единичной сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ прямая P и плоскость L дадут два полюса и экватор, соответственно.

Заметим, что определение полярной двойственности дословно переносится на комплексный случай (и при этом даже становится проще). Действительно, в комплексном случае, из любой точки можно провести две касательных (возможно совпадающих) к окружности, и любая прямая всегда пересекает окружность в двух точках (возможно совпадающих или бесконечно удалённых). Поэтому можно определить поляру для каждой точки, и полюс для каждой прямой.

Полярная двойственность позволяет также определить конику, *двойственную* к данной невырожденной конике. А именно, рассмотрим все касательные к данной конике Q и возьмём их полюса. Оказывается, полюса будут лежать на некоторой невырожденной конике (см. [1, Теорема 3.5]), которую мы и назовём двойственной к Q и обозначим через Q^*. Из определения сразу следует, что если коника Q касалась прямой, то коника Q^* будет содержать полюс этой прямой. Кроме того, из определения также следует, что коника, двойственная к Q^*, совпадает с Q.

Упражнение 4.7. *Пусть Q — вещественная окружность, концентричная с вещественной окружностью C (по которой определялась полярная двойственность). Проверьте, что Q^* — тоже окружность, и что Q^* получается из Q инверсией относительно окружности C. Приведите пример окружности Q, такой что двойственная коника Q^* не является окружностью.*

Из перечисленных выше свойств полярной двойственности сразу вытекает такое следствие (полезное для решения задачи Штейнера). **Полярная двойственность для невырожденных коник переставляет условие касания с прямой и условие прохождения через точку**. При этом условие κ касания с коникой симметрично относительно полярной двойственности. Отсюда следует утверждение, которое мы использовали в предыдущем разделе: если $\kappa = m\mu + n\nu$, то обязательно $m = n$. Кроме того, получаем такой результат.

Предложение 4.8. *Для каждого $k = 0, 1, \ldots, 5$, число невырожденных коник, проходящих через k точек на плоскости и касающихся $(5-k)$ прямых, равно числу невырожденных коник, проходящих через $(5-k)$ точек и касающихся k прямых.*

Действительно, вместо того, чтобы считать, скажем, число коник, касающихся пяти прямых, мы найдём число двойственных коник. Двойственные коники будут проходить через полюса данных прямых, то есть через пять точек. Следовательно, есть ровно одна невырожденная коника, касающаяся пяти данных прямых.

Используя предложение 4.8 и ответы в задачах 4.2 и 4.3, можно сразу решить оставшиеся две задачи (для $k = 1$ и $k = 3$).

Внимательный читатель, возможно, заметил, что если решать задачу для $k = 3$ тем же методом, что и задачу 4.3 то есть искать число окружностей, проходящих через данную точку и касающихся двух данных прямых, то получится только две окружности (а не четыре, как должно быть из полярной двойственности). Дело в том, что недостающие две окружности на вещественной плоскости просто не видно. Действительно, рассмотрим семейство окружностей, которые касаются, скажем, двух координатных прямых. Оно состоит из окружностей двух типов: $(x-a)^2+(y-a)^2 = a^2$ и $(x+a)^2+(y-a)^2 = a^2$, где a — параметр. При этом если мы допускаем только вещественные значения параметра a, то окружности первого типа никогда не пройдут через точку (x_0, y_0), у которой координаты имеют разные знаки, а окружности второго типа — через точку с координатами одного знака. Если же допустить комплексные значения параметра a, то через каждую точку (x_0, y_0), такую что $x_0 \neq 0$ и $y_0 \neq 0$, пройдут ровно две окружности каждого типа. Такими же алгебраическими рассуждениями можно проверить, что и в задачах 4.1 и 4.2 мы никаких комплексных решений не упустили.

Список литературы

[1] Акопян А. В., Заславский А. А., *Геометрические свойства кривых второго порядка*, МЦНМО, 2007

[2] S. L. Kleiman, *Chasles's enumerative theory of conics: a historical introduction*, Studies in Algebraic Geometry, Studies in Math., **20**, Math. Assoc. Amer., Washington, D. C, 1980, pp. 117–138

[3] S. L. Kleiman and Dan Laksov, *Schubert calculus*, The American Mathematical Monthly, **79**, No. 10, (1972), pp. 1061-1082