

Числа на доске

Задача 1. На доске написаны числа от 1 до 20. Каждую минуту какую-то пару чисел заменяют на их сумму. Какое число останется на доске в итоге?

Задача 2. На доске написано 2009 знаков «+» и 2009 знаков «-». Каждую минуту какую-то пару знаков заменяют на «+», если они одинаковые, и на «-», если они разные. Какой знак останется на доске в итоге?

Задача 3. На доске написаны числа от 1 до 20. Каждую минуту какую-то пару чисел a и b заменяют на число $a + b - 1$. Какое число останется на доске в итоге?

Задача 4. На доске написаны числа от 1 до 20. Каждую минуту какую-то пару чисел a и b заменяют на число а) ab , б) $ab + a + b$. Какое число останется на доске в итоге? *Указание.* Можно начать с чисел от 1 до n , где $n = 1, 2, 3, \dots$

<http://www.mccme.ru/circles/mccme/>

Инварианты

Инвариант — это нечто, остающееся неизменным.

Задача 5. В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы. Два слова этого языка являются синонимами, если одно из другого можно получить добавляя или вычеркивая сочетания «ЫУ» или «УУЫЫ». Являются ли синонимами слова УЫЫ и ЫУУ? *Указание.* Выпишите несколько синонимов. Что у них общего?

Задача 6. На столе стоят 16 стаканов, один из которых перевернут доньшком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

Задача 7*. В стране Серобурмалинии живут 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Задача 8. а) На шести елках, растущих с интервалами 10 метров, сидят шесть чижей, на каждой елке — по чижу. Если какой-то чиж перелетает с одной елки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров в противоположном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной елке? б) А если чижей и елок — по семь?

Задача 9. В центре каждой клетки шахматной доски стоит по фишке. Фишки переставили так, что попарные расстояния между ними не уменьшились. Докажите, что попарные расстояния не изменились.

<http://www.mccme.ru/circles/mccme/>