

## Динамика: Фибоначчи

*Комментарий.* Числами Фибоначчи называется последовательность  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$  — каждое следующее число равно сумме двух предыдущих.

**Задача 0.** Конь стоит в левом нижнем углу доски  $10 \times 10$ . Отметьте клетки, до которых конь может прийти не более чем за 1 ход, за 2, за 3 хода.

**Задача 1.** Кузнечик прыгает по полоске  $1 \times 10$ , сдвигаясь за ход на одну или две клетки вправо. Запишите в каждой клетке полоски, сколькими способами кузнечик может добраться из нее в крайнюю правую клетку.

*Указание.* Заполняйте полоску последовательно, начиная с правого края.

*Указание.* Пути можно разбить на начинающиеся с прыжка на 1 клетку и с прыжка на 2 клетки.

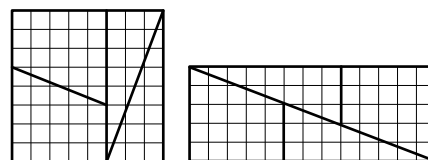
**Задача 2.** Доску  $2 \times n$  разрезают на доминошки (прямоугольники  $2 \times 1$ ).

а) Выясните, сколькими способами это можно сделать для  $n = 1, 2, 3, 4$ .

б) Что за последовательность получается? Сформулируйте гипотезу.

в) Докажите свою гипотезу. *Указание.* У края либо вертикальная доминошка, либо пара горизонтальных.

**Задача 3.** Шахматную доску разрезали на четыре части и сложили из них прямоугольник (см. рис.). Какова площадь прямоугольника? В чем же дело?



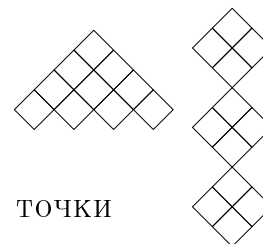
*Комментарий.* Стороны прямоугольников — 5, 8 и 13 являются последовательными числами Фибоначчи.

## Динамика: бином

*Комментарий.* Бином Ньютона — формула для раскрытия скобок в выражении  $(a + b)^n$ .

**Задача 4.** В верхней точке паутины сидит ленивый паук, желающий двигаться по паутине только вниз.

а) Запишите в каждом узле треугольной паутины, изображенной справа, сколькими способами паук может добраться до этого узла.



б) А сколькими способами паук может добраться до нижней точки следующей паутины? *Ответ.* б)  $6^3$ .

**Задача 5.** В левой нижней клетке клетчатого листа сидит математическая черепаха, которая умеет переползать на одну клетку вправо или вверх. а) Запишите в каждой клетке квадрата  $5 \times 5$ , сколькими способами до нее может добраться черепаха.



Найдите сотое число б) во второй строке; в) в третьей строке.

*Ответ.* б) 100; в)  $100 + 99 + \dots + 1 = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$ .

**Задача 6.** Как связаны числа из задач 4а и 5? Какое утверждение про паука соответствует задачам 5б и 5в?

**Задача 7.** Хромой конь за ход сдвигается на 1 клетку вверх и на две влево. Леонардо ставит хромого коня в одну из клеток таблицы задачи 5, после чего подсчитывает сумму чисел, на которые наступает конь, уходя за край листа. Что за последовательность получит Леонардо, если будет проделывать свой эксперимент последовательно для клеток нижнего ряда? *Ответ.* Числа Фибоначчи.