

## Инварианты и гидранты

**Задача 1.** На столе стоят 16 стаканов, один из которых перевернут доннышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

**Задача 2.** В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы. Два слова этого языка являются синонимами, если одно из другого можно получить, добавляя или вычеркивая «ЫУ» или «УУЫЫ». Являются ли синонимами слова УЫЫ и ЫУУ?

**Задача 3.** а) В одной клетке квадрата  $2 \times 2$  стоит минус, во всех остальных – плюсы. За раз можно поменять в любом столбце или любой строке все знаки на противоположные. Может ли получиться квадрат со всеми плюсами? б) А если таблица  $4 \times 4$ ? в)  $3 \times 3$ ?

**Задача 4.** В пещере живет а) 2015-головая; б) 2016-головая гидра. Геракл за один раз может срубить 10 или 7 голов. Если он срубит 10 голов, то у гидры вырастет 7 новых, а если 7, то 16 новых голов. Если в какой-то момент у гидры не остается ни одной головы, то она погибает. Может ли Геракл победить гидру?

**Задача 5.** На столе лежат две кучки камней: в первой кучке 10 камней, а во второй – 15. За ход разрешается разделить любую кучку на две меньшие. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает в такой игре?

**Задача 6.** Даны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять по 1. Можно ли при помощи таких операций сделать все числа равными?

**Задача 7.** Круг разделен на 6 секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

**Задача 8.** В центре каждой клетки шахматной доски стоит по фишке. Фишки переставили так, что попарные расстояния между ними не уменьшились. Докажите, что в действительности попарные расстояния не изменились.

