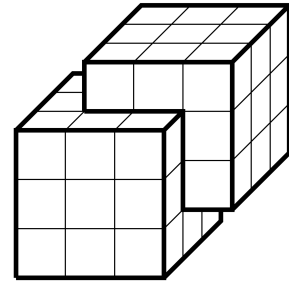


Формула включений-исключений

Сколько кубиков нужно, чтобы сложить «два пересекающихся куба» на картинке?

Задача 1. Среди волшебников каждый седьмой — с длинной бородой, а среди бородатых старцев каждый девятый — волшебник. Кого больше: бородатых старцев или волшебников?

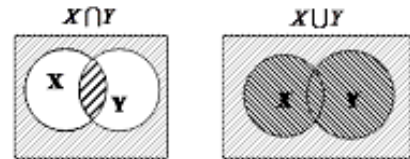
Задача 2. Два изумрудных куба со стороной 3 пересекаются так, как показано на рисунке. Найдите объём получившейся фигуры.



Задача 3. а) Докажите справедливость равенства $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$, где через $|A|$ обозначено количество элементов множества A .

б) Докажите теперь справедливость аналогичного равенства для трёх множеств: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

в) Составьте и докажите аналогичную формулу для произвольного числа множеств.



Задача 4. Сколько существует целых чисел от 1 до 33000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, но делятся на 11?



Задача 5. На кафтане Страшиллы площадью 1 размещены 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше $\frac{1}{2}$. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{5}$.

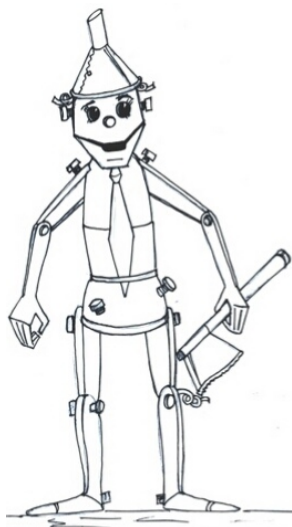
Дополнительные задачи

Задача 6. Из ряда натуральных чисел вычеркнули все числа, которые являются квадратами или кубами целых чисел. Какое из оставшихся чисел стоит на сотом месте?

Задача 7. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?

Изумрудный куб со стороной 10 разбит на 1000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. В каждом столбике из 10 кубиков (в любом из трёх направлений) сумма чисел равна 11. В одном из кубиков записана тройка. Через этот кубик проходит три *слоя* $1 \times 10 \times 10$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.

Задача 8. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?



Задача 9. Элли, Тотошка, Страшилла, Железный Дровосек, Трусливый Лев и Гудвин пришли в гости к волшебнице Вилене. Сколькими способами она может расселить гостей в четырёх комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой? (кто с кем живёт, не имеет значения, важно только количество гостей в каждой комнате)

