Triangle Inequality — Solutions

Задача 1. Пусть $a < b < c$ - длины сторон треугольника. Имеем три неравенства: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$. Первые два из них выполнены очевидным образом. $a + b + c > 2c \geq 8$. Последнее неравенство верно, так как c не может быть равно трем и меньше. Значит, периметр не меньше 9.

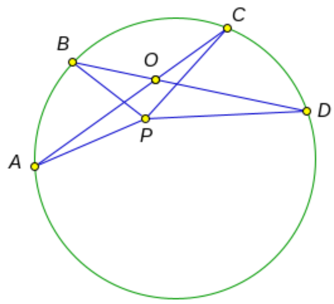
Второе решение: Для того, чтобы неравенство треугольника могло быть выполнено, наибольшая из сторон должна быть меньше половины периметра (иначе сумма остальных двух меньше половины периметра и, следовательно, наибольшей стороны). Т.к. стороны — целые числа, при наибольшей стороне n периметр не меньше, чем $2n + 1$. Если $n = 3$, то периметр — не меньше 7, но при наибольшей стороне 3 сумма трёх различных длин сторон равна 6. Значит, наибольшая сторона не меньше 4, и тогда периметр не меньше 9. Пример: $2 + 3 + 4 = 9$.

Задача 2. Ответ: в n-угольнике длина любой стороны меньше суммы всех остальных.

Рассмотрим произвольный четырехугольник $ABCD$. Не ограничивая общности, докажем, что $AB < BC + CD + DA$. В треугольнике ABC запишем неравенство $AB < BC + AC$, а в треугольнике ACD — неравенство $AC < CD + AD$. Из данных двух неравенств следует требуемое.

Задача 3. Ответ: нет.

Возьмём палочки длиной $2^0, 2^1, 2^2 \dots 2^9$. Среди любых трёх наибольшая строго больше суммы двух других.

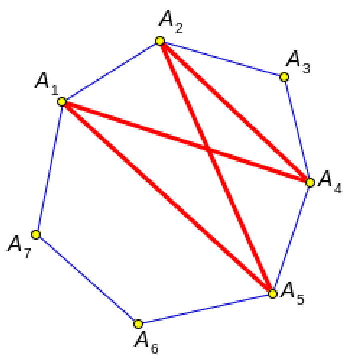


Задача 4. Ответ: в точке пересечения дигоналей образованного ими четырёхугольника.

Пусть точки лежат как на рисунке A, B, C, D — домики. P — произвольная точка. Тогда $AC < AP + PC$, $BD < BP + PD$. А расстояние от точки $O = AC + BD$.

Задача 5. Посмотрим на предыдущую картинку. Пусть $ABCD$ — наш выпуклый четырёхугольник. $AC+BD = AO+OB+OC+OD > AB+CD$.

Задача 6. Ответ: 4 или 5.



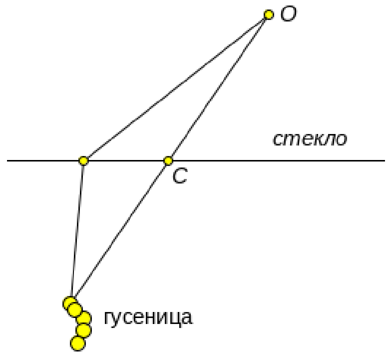
У квадрата и правильного пятиугольника все диагонали равны. Докажем, что других выпуклых многоугольников со всеми равными диагоналями не существует.

Предположим, что все диагонали выпуклого многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ равны, и $n \geqslant 6$. Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $A_1A_2A_4A_5$. Сумма его диагоналей $A_1A_4A_2A_5$ больше суммы противоположных сторон A_2A_4 и A_1A_5, что невозможно, т.к. по предположению эти суммы равны.

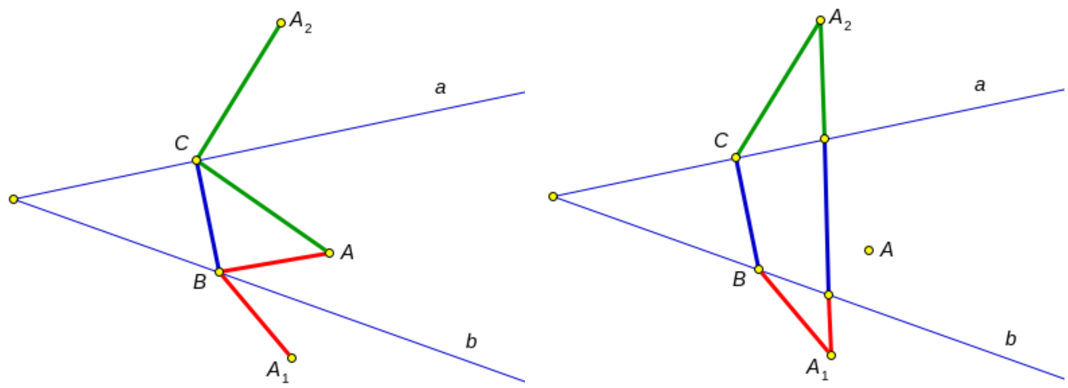
Задача 7. Если два отрезка пересекаются, то значит, образованный ими четырёхугольник — выпуклый. По задаче 5, замена диагоналей на противоположные стороны уменьшает сумму длин всех проведенных отрезков.

Теперь будем действовать следующим образом: видим пересекающиеся отрезки — заменили их. Сумма S длин всех проведенных отрезков строго уменьшилась. Величина S может принимать конечное число значений (Так как всего возможно конечное число расположений отрезков), мы за конечное число шагов прийдем к тому, что S нельзя будет уменьшить, а значит, никакие два отрезка не пересекаются. Мы построили некоторый **полуинвариант**.

Задача 8. Представим, что гусеница движется по плоскости: нижняя полуплоскость соответствует внутренней стороне стекла, верхняя — внешней стороне, а гусенице надо проползти в точку O. Тогда расстояние будем минимально, если гусеница поползёт по отрезку, соединяющему точку O на этой плоскости с её изначальным положением.



Задача 9. а) Отразим точку A (дом лесника) относительно каждого из берегов. Пусть он оказывается на берегах в точках B и C. Тогда по свойству отражения, отрезки, отмеченные одним цветом, равны. Значит, путь лесника это длина ломанной A_1BCA_2. В четыерёхугольнике A_1BCA_2 сторона A_1A_2 меньше суммы трёх других сторон. Значит, минимльный путь будет тогда и только тогда, когда точки лежат на одной прямой.



б) В случае тупого угла расстояние будет минимальным, если лесник пойдёт к вершине угла по прямой и так же обратно.