# Trees and viruses: solutions

**Задача 1.** 1 - направо - вверх - направо - 2 вниз - налево - вниз - направо - вниз - направо - вверх - направо - вверх - влево - 2 вверх - направо - вниз - направо к 2. Можно также доказать, что такой путь в данном случае — единственный.

**Задача 2.** Пусть каждому распилу сопоставлено полено (одно), которое получается после этого распила. Тогда 52 распилам соответствует 52 полена. Заметим, что после последнего распила бревна образуется два полена, из которых мы пока учли только одно; значит, количество таких вторых поленьев равно количеству брёвен. Таким образом, брёвен 72 - 52 = 20.

**Задача 3.** а) Нарисуем граф: вершины - заражённые, рёбра соединяют заразившего с заражённым им. Тогда каждый пошедший гулять добавляет ещё 5 вершин. Значит, всего заражённых всегда $1+5k$ (1 первый и по +5 от каждого не оставшегося дома). Число 50 же делится на 5, поэтому не подходит.

б) Уберём первого заражённого: теперь нам надо получить 60 заражённых, набирая по 7 или 11, и понять, можно ли получить 59. Посмотрим на остатки по модулю 7: если мы их научимся подбирать, то научимся подбирать все (достаточно большие) числа с этими остатками. Если мы сможем набрать с помощью 7 и 11 числа от 60 до 66, то все большие числа сможем набрать, просто добавляя нужное количество раз по 7. Заметим, что

$$60 = 11+7\cdot7,\ 61 = 3\cdot11+4\cdot7,\ 62 = 5\cdot11+7,\ 63 = 9\cdot7,\ 64 = 2\cdot11+6\cdot7,\ 65 = 4\cdot11+3\cdot7,\ 66 = 6\cdot11.$$

А вот число 59 набрать не получится, поскольку ни одно из чисел 59, $59-11$, $59-2\cdot11$, $59-3\cdot11$, $59-4\cdot11$ и $59-5\cdot11$ не делится на 7.

**Задача 4.** Заметим, что если от какого-то дерева отходит ровно одна тропинка, то можно убрать это дерево и эту тропинку, и по-прежнему можно будет пройти от любого дерева к любому другому единственным путём. Действительно: любой путь в или от этого дерева теперь начинается или заканчивается у соседнего дерева (с которым убранное дерево соединяла убранная тропинка), а в и от него до любого и раньше можно было добраться единственным путём.

Продолжим убирать такие "одинокие"деревья вместе с единственной ведущей к ним тропинкой. С каждым таким разом оставшихся деревьев становится меньше, значит, процесс так или иначе остановится. Что же могло остаться в конце?

Если у нас осталось больше одного дерева, то от каждого из них выходит хотя бы две тропинки (иначе процесс можно было бы продолжить). Рассмотрим единственный путь, соединяющий деревья A и B. От дерева A также отходит ещё одна тропинка: посмотрим, куда она может привести. По условию, от любого дерева к любому можно пройти единственным способом, значит, любой путь от A через вторую тропинку проходит через разные вершины. Но, с другой стороны, остановиться этот путь тоже нигде не может, потому что если мы подошли к дереву по одной тропинке, то есть ещё одна, по которой можно пойти дальше! Получаем противоречие, ведь деревьев конечно, значит, рано или поздно путь где-то остановиться должен.

Таким образом, больше одного дерева у нас остаться не могло, значит, оно ровно одно. Заметим, что от него уже никуда не ведёт ни одной тропинки, иначе до этого для любого пути к оставшемуся дереву было бы два варианта: с заходом на эту тропинку-петлю и без. Значит, осталась одно дерево и 0 тропинок, а до этого мы убрали $N-1$ дерево и с ними $N-1$ тропинку, то есть, всего тропинок $N-1$.

**Задача 5.** Игра закончится, когда в каждой кучке будет по 1 спичке, то есть, когда на столе образуется 15 кучек. С каждым ходом количество кучек увеличивается на 1; после хода 1го игрока их всегда нечётно. Значит, первый победит независимо от своих ходов и ходов соперника.

**Задача 6.** У нас есть 64 клетки. Поставим в каждой из них вершину и будем соединять соседние вершины рёбрами, когда убираем спичку между ними: убранная спичка означает, что теперь из одной вершины в другую мы сможем попасть. При этом наименьшее количество убранных спичек соответствует наименьшему количеству рёбер в связном (потому что мы должны уметь добираться из любой точки в любую другую) графе на 64 вершинах. А это — дерево, и в нём рёбер на 1 меньше, чем вершин, то есть, ответ — 63.

**Задача 7.** Выиграет второй: если после хода игрока А нашлась такая тройка колышков, что один из них связан с обоими другими, то игрок В следующим ходом соединяет несоединённые и выигрывает. Значит, оба игрока будут стараться оттянуть неизбежное и соединять только те колышки, которые ещё ни с чем не соединены. Таким образом, каждый ход "убирает из игры"два колышка. $2020:2=1010$ ходов можно сделать, прежде чем придётся совершить ход, ведущий к проигрышу. Ход номер 1010, как и все чётные ходы, делает второй игрок, значит, следующим ходом первый игрок соединяет пару уже связанных колышков и проигрывает.

**Задача 8.** Сетка не распадётся на куски тогда и только тогда, когда из каждого её узла можно добраться в любой другой по не перерезанными линиям. Если в сетке есть цикл, то можно разрезать одну из верёвочек в нём, поэтому в итоге сетка должна превратиться в дерево. Вершин в ней $(4+1)\cdot(6+1)=35$, значит, рёбер должно остаться 34. А сначала было $(4+1)\cdot 6=30$ горизонтальных и $(6+1)\cdot 4 = 28$ вертикальных верёвочек. Итого можно разрезать максимум $30+28-34=24$ верёвочки.

**Задача 9.** Забудем пока про одного из последних двух выздоровевших. Сопоставим каждому соблюдавшему карантин того, кто его заразил - такой человек ровно один. Теперь, когда мы убрали одного из последних, каждому несоблюдавшему карантин также соответствует ровно один из заражённых им. Значит, соблюдавших карантин ровно на одного (которого мы убрали) больше, чем не соблюдавших. Значит, последних 2019.

**Задача 10.** Например: $8922+7602=16543-19$ или $6422+9282=15723-19$