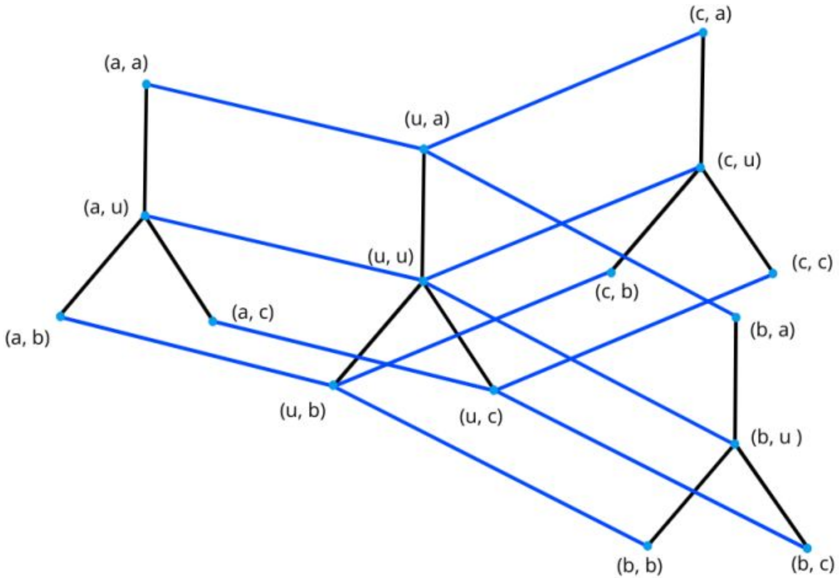
Симметричные 1-циклы во взрезанном квадрате графа

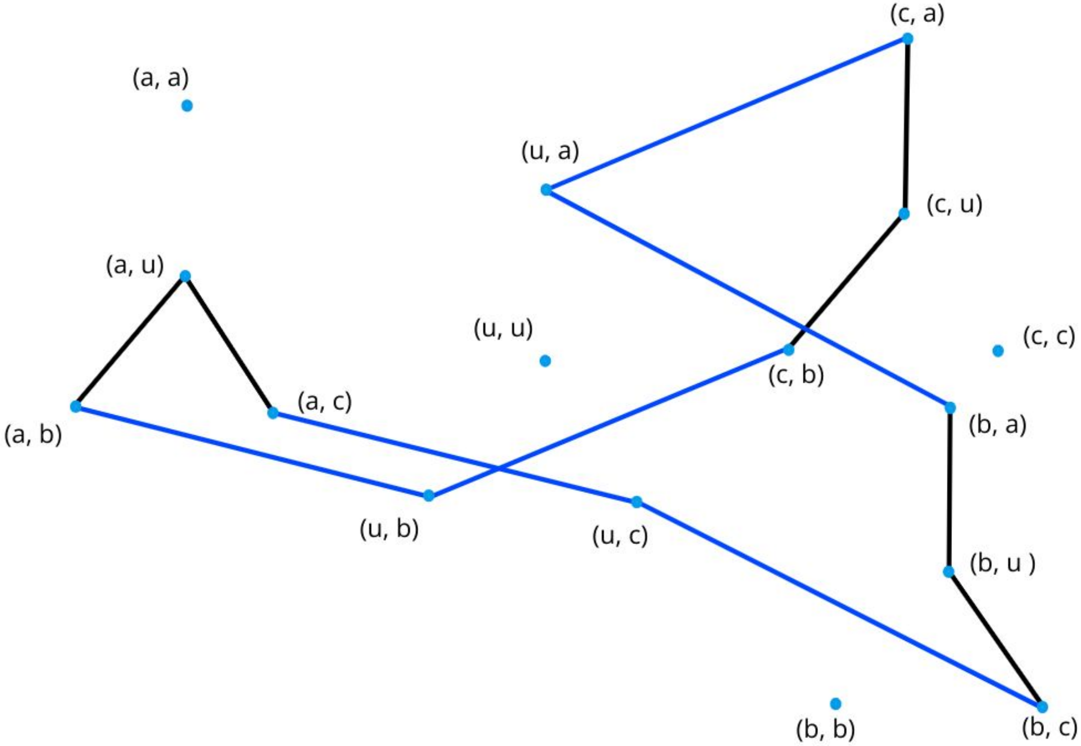
Бордачева Екатерина

Взрезанным квадратом графа называется дополнение до диагонали квадрата графа. Это конфигурационное пространство является теоретико-графовым аналогом множества размещений. В работе доказано, что некоторые естественные циклы порождают все симметричные 1-циклы во взрезанном квадрате графа. Иными словами, в работе описаны порождающие в группе одномерных гомологий во взрезанном квадрате графа. Это решает одну из гипотез, сформулированных в статье [DMNS].

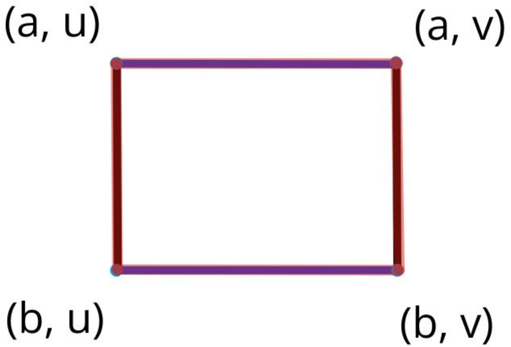


Вершинами $\square$-*произведения* $K\square L$ графов K и L являются упорядоченные пары (a, b) вершин a графа K и b графа L. Если вершины b и c графа L соединены ребром, то вершины (a, b) и (a, c) графа $K\square L$ соединены ребром, обозначаемым (a, bc). Если вершины b и c графа K соединены ребром, то вершины (b, a) и (c, a) графа $K\square L$ соединены ребром, обозначаемым (bc, a). Других ребер в $K\square L$ нет. Обозначим $K^{\square 2} = K\square K$.

Приведем определение комбинаторного аналога взрезанного квадрата. Вершинами графа $K^{\square\underline{2}}$ являются упорядоченные пары различных вершин графа K. Вершины графа $K^{\square\underline{2}}$ соединены ребром в $K^{\square\underline{2}}$, если они соединены ребром в $K^{\square 2}$.



Назовем 1-*циклом* (симплициальным, по модулю 2) в графе множество C ребер такое, что каждая вершина принадлежит четному числу ребер из C.



Примером 1-цикла в $\square$-произведении графов является *граница* – простой цикл

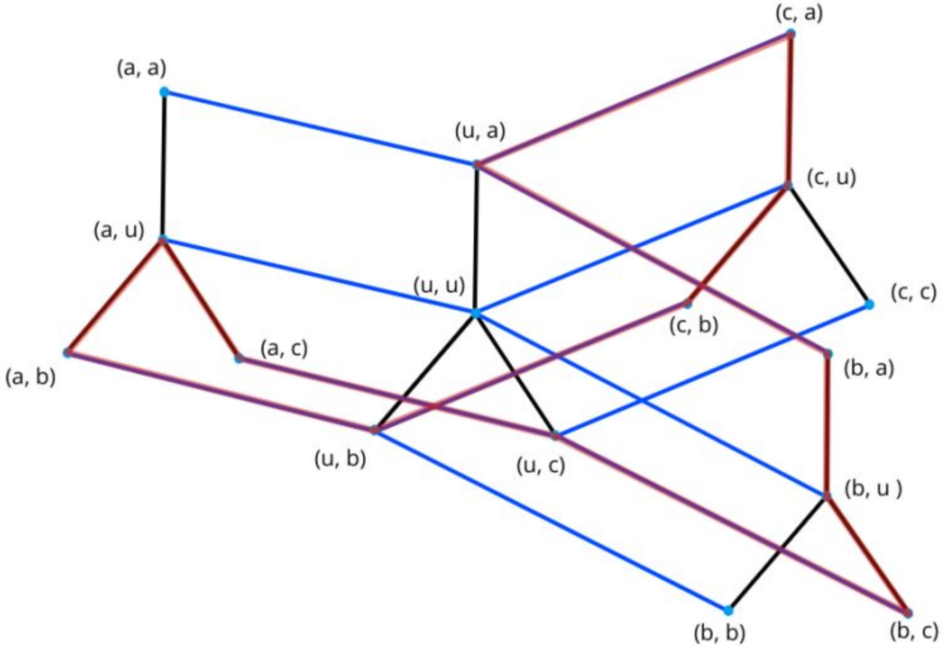
$$(a,u)(b,u)(b,v)(a,v)$$

для ребер ab и uv в K и L.

Для триода с вершинами a, b, c, u в графе K с центральной вершиной u *триодическим циклом* называется

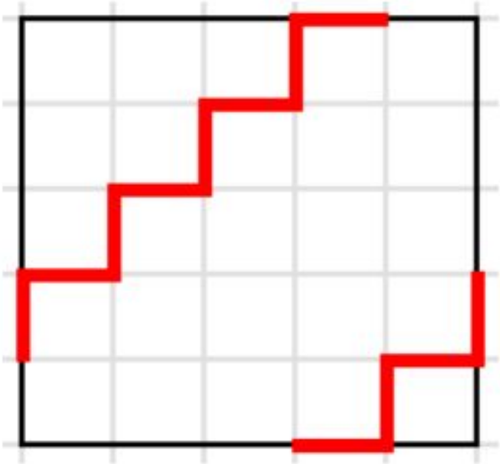
$$(a, c)(a, u)(a, b)(u, b)(c, b)(c, u)\dots$$

в $K^{\square 2}$, где точками обозначена часть, симметричная выписанной части (т. е. полученная заменой (x, y) на (y, x)).

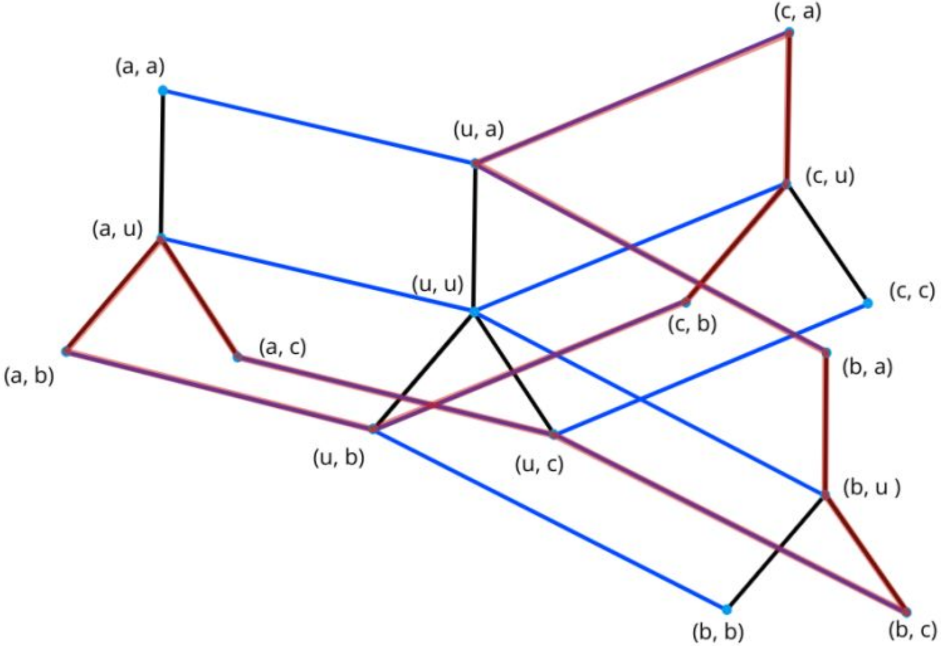


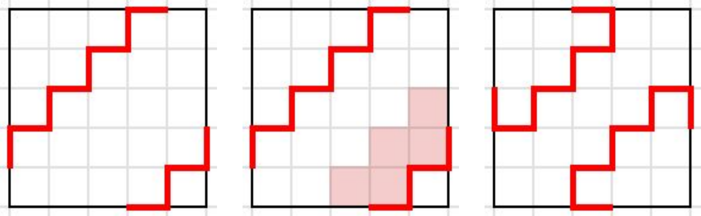
Внедиагональным циклом для непустого простого цикла $v_1 v_2 \ldots v_k$ называется 1-цикл

$$(v_1, v_2)(v_1, v_3)(v_2, v_3) \ldots (v_k, v_1)(v_k, v_2).$$



Рассмотрим симметрию (инволюцию) графа $K^{\square 2}$, переставляющую сомножители (т. е. переставляющую точки (x, y) и (y, x)), и соответствующую симметрию на 1-циклах.





Триодические 1-циклы являются симметричными. Внедиагональный цикл симметричен с точностью до прибавления границ.

Теорема 1. *Любой симметричный 1-цикл в $K^{\underline{\square 2}}$ является суммой внедиагональных циклов, триодических циклов и границ в $K^{\underline{\square 2}}$.*

Лемма 2. *Любой симметричный 1-цикл в $T^{\underline{\square 2}}$, где T – дерево, является суммой триодических циклов и границ.*

Левой проекцией по модулю 2 C_y 1-цикла C в $K \square L$ называется множество всех ребер σ в L таких, что имеется нечетное количество вершин a в K таких, что $(a, \sigma) \in C$.

Лемма 3. *Любой симметричный 1-цикл C в $K^{\underline{\square 2}}$ с $C_x = 0$ является суммой триодических циклов и границ.*

Список литературы

[Ab00] *A.D. Abrams.* Configuration spaces of braid groups of graphs, PhD thesis, UC Berkeley (2000)

[DMNS] *С.Дженжер, А.Мирошников, О.Никитенко, А.Скопенков.* Циклы в графах и в гиперграфах. https://old.mccme.ru//circles//oim/cyclesg-jour.pdf

[FH10] *M. Farber, E. Hanbury.* Topology of Configuration Space of Two Particles on a Graph, II. Algebr. Geom. Topol. 10 (2010) 2203–2227. arXiv:1005.2300.

[Kn18] *B. Knudsen.* CONFIGURATION SPACES IN ALGEBRAIC TOPOLOGY, arXiv:1803.11165.

[MS17] *T. Maciazek, A. Sawicki.* Homology groups for particles on one-connected graphs J. Math. Phys. 58, 062103 (2017). arXiv:1606.03414.

[Sk] *А.Скопенков.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения. https://old.mccme.ru//circles//oim/algor.pdf

[Sk23] *А. Скопенков,* Инварианты изображений графов на плоскости, Мат. Просвещение, 31 (2023), 74-127. arXiv:1805.10237

[SS23] *A. Skopenkov and O. Styrt.* Embeddability of join powers and minimal rank of partial matrices, arXiv:2305.06339.

Спасибо за внимание!