Элементы дискретной математики в задачах

Д. Г. Ильинский, А. Б. Купавский, А. М. Райгородский, А. Б. Скопенков

Обновляемая версия части книги:
`http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf`

Научные редакторы: А. В. Шаповалов, И. Д. Шкредов

Все авторы: Московский физико-технический институт.

Д. Ильинский: ЦЭМИ РАН. А. Райгородский: Московский Государственный Университет. А. Скопенков: Независимый Московский Университет.

Личные страницы: `http://dm.fizteh.ru/staff`,
`https://users.mccme.ru/skopenko/`.

Оглавление

Введение

Зачем эта книга?

Мы приводим подборки задач по комбинаторным разделам математики. Эти задачи подобраны так, что в процессе их решения читатель (точнее, решатель) освоит основы важных теорий — как классических, так и современных. Ср. [S06], [ZSS], [Ju]. Книга будет полезна участникам кружков для младшекурсников и старшеклассников (в частности, ориентированных на олимпиады), а также их руководителям. Некоторые приводимые красивые задачи и важные темы малоизвестны в традиции кружков по математике, но полезны как для математического образования, так и для подготовки к олимпиадам.

По нашему мнению, решение этих задач (т. е. изучение соответствующих теорий) также полезно всем, кто хочет стать математиком, специалистом по computer science или программистом, работающим в наукоёмких отраслях информационных технологий. Именно таких специалистов мы готовим на факультете инноваций и высоких технологий (ФИВТ) Московского физико-технического института. Приведенные задачи используются при изучении курсов дискретных структур и дискретного анализа на этом факультете. Эти курсы читают А.Б. Дайняк и А.М. Райгородский, а остальные авторы ведут семинары по этим курсам. Некоторые материалы основаны на занятиях, проведенных А.Б. Скопенковым в Кировской летней математической школе (до 2016), Московской выездной олимпиадной школе (с 2004), а также на кружках «Математический семинар» (1994-2013) и «Олимпиады и математика» (с 2003, в школе «Интеллектуал» с 2015).

Комбинаторика — один из самых красивых разделов современной математики. Постановки задач этого раздела зачастую доступны школьникам. А результаты, тем не менее, носят фундаментальный характер и важны как для развития других разделов математики, так и для приложений в информатике, биологии, экономике и др. Мы постараемся рассказать о тех мощных современных методах, благодаря которым комбинаторика приобретает новый облик, становясь серьезной наукой. Среди этих методов, помимо более или менее стандартных, вероятностный и линейно-алгебраический ме-

тоды. Они лежат в основе самых продвинутых комбинаторных результатов, полученных за последние десятилетия.

Параграфы второй половины книги посвящены активно развивающимся областям математики. Хотя здесь изучаются только самые простые результаты и методы, они дают некоторое представление об основных направлениях научных исследований в соответствующих областях. С этой же целью приводятся *замечания*, которые не используются ни в формулировках, ни в решениях задач. Важные факты выделены словом «теорема» или «следствие».

Используемый материал.

Формулировки большинства задач доступны старшеклассникам, интересующимся математикой; [1] мы приводим все необходимые определения, выходящие за рамки школьной программы и не всегда изучаемые на кружках. Без напоминания используются только простейшие определения и результаты теории чисел [GIM, §8-§9], [Vi, §§1-3], [ZSS, §§2.1-2.6, 3.1 и 3.3]. Если в некотором разделе для понимания условий или для решения задач нужны дополнительные сведения (или консультация специалиста), то в начале соответствующего раздела приводятся ссылки.

При этом многие задачи трудны: для их решения нужно предварительно прорешать другие приведенные задачи на данную тему.

Как устроена книга.

Эту книгу не обязательно читать (точнее, прорешивать) подряд. Параграфы и разделы книги практически независимы друг от друга (кроме разделов в §3 и §4, которые желательно прорешивать подряд). Если в задаче одного из разделов все-таки используется материал другого раздела, то либо эту задачу можно игнорировать, либо посмотреть конкретно указанный материал другого раздела. Основные обозначения приведены в конце введения. Основные понятия и обозначения теории графов введены в §2.1.

При этом параграфы расположены примерно в порядке возрас-

[1] Часть материала (например, §1.1) на некоторых кружках и летних школах изучается даже шестиклассниками. Однако приводимые подсказки, указания и решения рассчитаны на читателей с некоторой математической культурой (необходимой для освоения бóльшей части книги). Разбирать эти решения с шестиклассниками нужно по-другому, см., например, [GIF].

тания сложности материала.

К важнейшим задачам приводятся подсказки, указания и решения. Подсказки и указания расположены в конце каждого параграфа. Однако к ним стоит обращаться после прорешивания каждой задачи.

Общие замечания к формулировкам задач.

Задачи обозначаются жирными цифрами. Если в условии задачи написано «найдите», то нужно дать ответ без знака суммы и многоточия. Если же условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Как правило, мы приводим *формулировку* утверждения перед его *доказательством.* [2] В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться следующие задачи. Это всегда явно оговаривается в подсказках, а иногда и прямо в тексте. (На занятии задача-подсказка выдается только тогда, когда школьник или студент немного подумал над самой задачей.)

Большинство задач не оригинальны, но установить первоисточник не представляется возможным. Многие задачи взяты из [IKRS], [ZSS], [Lo] и из неопубликованных материалов кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ, на которой работают авторы.

О литературе.

В списке литературы мы приводим только те *стандартные учебники* по комбинаторике и теории графов, которые по тем или иным причинам чаще используем в преподавании. Также мы приводим ссылки на всю известную нам более серьезную учебно-научную литературу. Но этот список тоже не претендует на полноту, поскольку мы можем не знать о некоторых публикациях.

В списке литературы [Ga, GKP, Har, Hal, KS, Mk, R15, R14, R10, R08, S05, S13, VS88, 8] и [AM, Ig, JLR, Ju, KZP, CR, Pr, Vi, R12, R13, S15] — базовые учебники и статьи по темам этой книги и

[2] Часто происходит обратное: формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только *после* продолжительного изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это способствует появлению представления о математике как науке, изучающей немотивированные понятия и теории. Такое представление принижает ценность математики.

по связанным темам, [AS, BF, Bo, Gr, Lo, S, S14, So] — более продвинутая литература. Остальное — источники замечаний, основное содержание которых может быть не связано с этой книгой, и опубликованные ранние версии отдельных частей книги.

Благодарности.

Мы благодарим соавторов первого издания А. А. Глибичука, А. Б. Дайняка и А. А. Чернова. Мы благодарим за полезные замечания редакторов книги А.В. Шаповалова и И.Д. Шкредова, а также И.А. Митрофанова, Д.М. Овчинникову, А.А. Полянского, М.Б. Скопенкова, Е.А. Шлыкова, И.Н. Шнурникова и членов редколлегии сборника «Математическое Просвещение». Мы благодарим студентов за каверзные вопросы и указания на неточности. Мы благодарим А.Ю. Веснина за разрешение использовать рис. 9.

А.Б. Купавский поддержан грантом РФФИ 12-01-00683 и грантом Президента РФ МД-6277.2013.1. А.М. Райгородский поддержан грантом РФФИ 12-01-00683, грантом Президента РФ МД-6277.2013.1 и грантом ведущих научных школ НШ-2519.2012.1. А.Б. Скопенков частично поддержан грантом фонда Саймонса.

Основные обозначения

• $[x]$ — (нижняя) целая часть числа x.

• $d \mid n$ — число n делится на число d (для целых d и n).

• $[n] = \mathcal{R}_n$ — множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.

• $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ — множества всех действительных, рациональных и целых чисел соответственно.

• $\mathbb{Z}_2$ — множество $\{0, 1\}$ остатков от деления на 2 с операциями сложения и умножения по модулю 2.

• $\mathbb{Z}_m$ — множество $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ остатков от деления на m с операциями сложения и умножения по модулю m.

• $\binom{n}{k}$ — количество k-элементных подмножеств n-элементного множества (другое обозначение: C_n^k).

• $\binom{X}{k}$ — множество всех k-элементных подмножеств множества X.

• $|X|$ — число элементов во множестве X.

• $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ — разность множеств A и B (не путайте этот знак с /).

• $A \sqcup B$ — дизъюнктное объединение множеств A и B. Результат этой операции совпадает с обычным объединением множеств A и B, но при этом подчеркивается, что $A \cap B = \varnothing$.

• $A \subset B$ — «множество A содержится в множестве B». (В некоторых других книгах это обозначают $A \subseteq B$, а $A \subset B$ означает «множество A содержится в множестве B и не равно B».)

• $x := a$ означает фразу «обозначим $x = a$».

1 Элементы комбинаторики

1.1 Подсчёт и комбинаторные тождества

1.1.1. (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (b) Найдите сумму $\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n}$.

1.1.2. (a) *Правило Паскаля.* $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$, если $0 \leqslant k \leqslant n-1$. (Подсказка приведена после задачи 1.1.4.a.)

(b) $\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = (k+1)\left\{ {n \atop k+1} \right\} + \left\{ {n \atop k} \right\}$. Здесь $\left\{ {n \atop k} \right\}$ — количество разбиений n-элементного множества на k частей (т. е. непустых подмножеств); разбиения считаются неупорядоченными, т. е. разбиение множества $\{1,2,3\}$ на части $\{1,2\}$ и $\{3\}$ и разбиение того же множества на части $\{3\}$ и $\{1,2\}$ считаются одинаковыми. Ср. с задачей 1.4.7.e.

Замечание. Числа $\left\{ {n \atop k} \right\}$ называются *числами Стирлинга второго рода*; подробнее о них см., например, [GKP, с. 287].

1.1.3. (a) Во скольких подмножествах множества $\mathcal{R}_{11}$ не найдётся двух подряд идущих чисел?

(b) То же для *трёх* подряд идущих чисел.

1.1.4. (a) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

(b) *Бином Ньютона.* $(a+b)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$.

Как решать задачи этого раздела? Применяйте явно общие правила комбинаторики, которые Вы явно сформулировали. Вот примеры.

Правило суммы. Для любых двух конечных множеств A, B выполнено $|A \sqcup B| = |A| + |B|$.

Правило произведения. Для любых двух конечных множеств A, B выполнено $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Правило биекции ($1:1$*-отображения).* Если $f : A \to B$ — биекция (т.е. взаимно однозначное соответствие) между конечными множествами, то $|A| = |B|$.

Правило $s:1$*-отображения.* Если $n \in \mathbb{Z}$, $f : A \to B$ — отображение между конечными множествами, и для любого $x \in B$ выполнено $|f^{-1}(x)| = s$, то $|A| = s|B|$.

Правило отображения. Если $f : A \to B$ — отображение между конечными множествами, то $|A| = \sum_{x \in B} |f^{-1}(x)|$.

При применении явно указывайте те множества A, B и отображение f, к которым применяете правило.

Мы предлагаем разные способы, которые продемонстрируем на примере трех доказательств правила Паскаля 1.1.2.а и подсказки к доказательству формулы 1.1.4.а.[3]

Первое доказательство: правило суммы. Неформально говоря, идея в следующем: чтобы выбрать $k+1$ футболистов, нужно либо выбрать $k+1$ полевых, либо вратаря и k полевых. Приведем строгое изложение этой идеи.

Обозначим через A семейство $(k+1)$-элементных подмножеств множества $[n+1]$, содержащих число $n+1$. Обозначим через B семейство $(k+1)$-элементных подмножеств множества $[n+1]$, не содержащих число $n+1$. Тогда

- $|A| = \binom{n}{k}$, так как при удалении числа $n+1$ из подмножества $X \in A$ получается подмножество в $[n]$;
- $|B| = \binom{n}{k+1}$, так как для подмножества $X \in B$ имеем $B \subset [n]$.

Поэтому и по правилу суммы $\binom{n+1}{k+1} = |A| + |B| = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

Другая запись этого решения. Определим отображение

$$f : \binom{[n+1]}{k+1} \to \binom{[n]}{k+1} \sqcup \binom{[n]}{k} \quad \text{формулой} \quad f(A) := A - \{n+1\}.$$

Остаётся доказать, что это — биекция (например, определив явной формулой обратное отображение).

[3] Многие задачи этого раздела решаются несколькими способами из трех предложенных. Но, конечно, не каждый способ применим к каждой задаче. Обычно в указаниях для краткости приводится только один способ решения. См. также сноску 1.

Второе доказательство: использование явной формулы 1.1.4.a. Имеем

$$\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}+\frac{n!}{(n-k)!k!}=$$

$$=\frac{n!}{(n-k-1)!k!}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k}\right)=\frac{n!}{(n-k-1)!k!}\cdot\frac{n+1}{(k+1)(n-k)}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Третье доказательство: использование бинома Ньютона 1.1.4.b. Число $\binom{n+1}{k+1}$ является коэффициентом при x^{k+1} в многочлене

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)=x(1+x)^n+(1+x)^n.$$

Поэтому число $\binom{n+1}{k+1}$ равно сумме коэффициентов при степенях x^k и x^{k+1} у многочлена $(1+x)^n$. Отсюда следует требуемое равенство.

Подсказка к доказательству формулы 1.1.4.a. Обозначим через $A^k_{[n]}$ множество упорядоченных наборов длины k из элементов множества $[n]$, состоящих из попарно различных элементов.

Определим отображение $f: A^k_{[n]}\to A^{k-1}_{[n]}$ формулой $f(a_1,\ldots,a_k)=(a_1,\ldots,a_{k-1})$. Тогда по правилу $s:1$-отображения

$$|A^k_{[n]}|=(n-k+1)|A^{k-1}_{[n]}|$$

(докажите!). Поэтому

$$|A^k_{[n]}|=n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Определим отображение $g: A^k_{[n]}\to\binom{[n]}{k}$ формулой $g(a_1,\ldots,a_k)=\{a_1,\ldots,a_k\}$. Тогда по правилу $s:1$-отображения $|A^k_{[n]}|=k!\binom{n}{k}$ (докажите!).

1.1.5. Найдите суммы: (a) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$;

(b) $\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$;

2 Основы теории графов

2.1 Glossary of Graph Theory

Вероятно, вводимые здесь понятия знакомы читателю, но мы приводим четкие определения, чтобы фиксировать терминологию (которая бывает другой в других книгах).

Графом $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$ вместе с семейством $E = E(G) \subset \binom{V}{2}$ его двухэлементных подмножеств (т. е. неупорядоченных пар различных элементов). (Более точный термин для понятия графа, данного здесь, — *граф без петель и кратных ребер* или *простой граф*.) Элементы множества V называются *вершинами*. Элементы множества E называются *ребрами*. Хотя ребра — неупорядоченные пары, в теории графов их традиционно обозначают круглыми скобками. Вершины a и b называются *концами* или *вершинами* ребра (a, b). Если вершины a и b соединены ребром, они называются *соседними* или *смежными*, а само ребро (a, b) называется *проходящим* через вершину a и вершину b, или *инцидентным* вершине a и вершине b.

При работе с графами удобно пользоваться их изображениями — например, на плоскости или в пространстве (или, выражаясь научно, отображениями их тел в плоскость или в пространство). См. рис. 4, 5, 3, 8, 9 и 18 ниже. Вершины изображаются точками. Каждое ребро изображается ломаной, соединяющей его концы. (При этом только концы каждой ломаной изображают вершины графа.) Ломаные могут пересекаться, но точки пересечения (кроме общих концов ломаных) не являются вершинами. Важно, что граф и его изображение — не одно и то же. Например, на рис. 5 (в центре и справа), 4 приведены разные изображения на плоскости одинаковых графов (точнее, изоморфных графов, см. п. 2.3).

Путем P_n называется граф с вершинами $1, 2, \ldots, n$ и ребрами $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. *Циклом* C_n называется граф с вершинами $1, 2, \ldots, n$ и ребрами $(1, n)$ и $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. (Не путайте эти графы с *путем в графе* и *циклом в графе*, определенными ниже.)

Граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром,

называется *полным* и обозначается K_n. Если вершины графа можно разделить на две части так, что нет ребер, соединяющих вершины из одной и той же части, то граф называется *двудольным*, а части называются *долями*. Через $K_{m,n}$ обозначается двудольный граф с долями из m и из n вершин, в котором имеются все mn ребер между вершинами разных долей. См. рис. 5.

2.1.1. В любом графе есть двудольный подграф, содержащий не менее половины ребер графа.

k-кликой в графе называется его подграф с k вершинами, являющийся полным. *Независимым множеством* или *антикликой* в графе называется набор его вершин, между которыми нет рёбер.

Степенью $\deg v$ вершины v графа называется число выходящих из нее рёбер. *Изолированной вершиной* называется вершина, из которой не выходит ни одного ребра.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально говоря, граф G называется *подграфом* графа H, если каждая вершина графа G является вершиной графа H и каждое ребро графа G является ребром графа H. При этом две вершины подграфа, соединенные ребром в графе, не обязательно соединены ребром в подграфе.

Путем в графе называется последовательность $v_1e_1v_2e_2\dots e_{n-1}v_n$, в которой для любого i ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}. (Ребра $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ не обязательно попарно различны.) Число $n-1$ называется *длиной* пути. *Циклом* в графе называется последовательность $v_1e_1v_2e_2\dots e_{n-1}v_ne_n$, в которой для любого $i < n$ ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}, а ребро e_n соединяет вершины v_n и v_1. Циклы считаются одинаковыми, если они отличаются циклическим сдвигом последовательности. Число n называется *длиной* цикла. *Несамопересекающимся* называется цикл, для которого вершины $v_1, v_2, \dots, v_n$ попарно различны. Стандартный термин (менее удобный для начинающего) — *простой* цикл.

2.1.2. (a) Любой цикл, не проходящий ни по одному ребру дважды, содержит несамопересекающийся цикл.

(b) Любой цикл нечётной длины содержит несамопересекающийся цикл нечётной длины.

(c) Справедливо ли аналогичное утверждение для циклов чётной длины, не проходящих ни по одному ребру дважды?

(d) В графе есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра a и b, а также есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра b и c. Тогда есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра a и c.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём, и *несвязным* иначе.

2.1.3. Если степень каждой из n вершин графа больше $\frac{n}{2} - 1$, то граф связен.

Ясно, что «соединённость некоторым путём» является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. *Связной компонентой* графа называется любой класс этого отношения эквивалентности.

Рис. 2: Удаление ребра $G - e$, стягивание ребра G/e и удаление вершины $G - x$

Определение операций удаления ребра и удаления вершины ясно из рис. 2. Формально, подграф $G - v$ графа G имеет множество $V_F = V_G - \{v\}$ и множество ребер $\{(x, y) \in E_G \ : \ x \neq v, y \neq v\}$. Операция *стягивания ребра* (рис. 2) удаляет из графа это ребро и

заменяет вершины A и B этого ребра на одну вершину D, а все рёбра, выходящие из вершин A и B в некоторые вершины, заменяет на рёбра, выходящие из вершины D в те же вершины. (В отличие от стягивания ребра в мультиграфе, см. §2.5 и задачу 2.2.6.e, каждое получившееся ребро кратности больше 1 заменяется на ребро кратности 1.) Например, если граф — цикл с четырьмя вершинами, то при стягивании любого его ребра получится цикл с тремя вершинами.

Ориентированным графом (без петель и кратных рёбер) $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые *упорядоченные* пары несовпадающих элементов которого выделены. Множество выделенных пар обозначается $E = E(G)$. Таким образом, $E \subset \{(x, y) \in V \times V \mid x \neq y\}$. Если выделены и пара (a, b), и пара (b, a), то это ребро не называется кратным.

Ориентированный путь в ориентированном графе — такая последовательность вершин, что в каждую следующую вершину ведет ориентированное ребро из предыдущей. Аналогично вводится понятие ориентированного цикла.

2.1.4. Пусть дан ориентированный граф G, у которого на каждом ребре u написан вес $f(u)$. (Этот вес можно понимать как работу, которую нужно затратить для того, чтобы пройти по ребру от начала до конца.) Функция $p : V(G) \to \mathbb{R}$ («потенциал») такая, что $f(x, y) = p(x) - p(y)$ для любого ребра $u = (x, y)$, существует тогда и только тогда, когда сумма весов рёбер любого ориентированного цикла равна нулю (при прохождении ребра по циклу в направлении, противоположном ориентации, вес в сумму берётся со знаком «минус»).

Турниром называется ориентированный граф, любые две вершины которого соединены ребром. (Т.е. для любых двух вершин v, w турнира среди его ребер есть (v, w) или (w, v), но не оба ребра сразу.) Например, если проведен чемпионат по волейболу среди нескольких команд, в котором каждая команда сыграла с каждой и нет ничьих, то можно построить ориентированный граф следующим образом. Вершины графа обозначают команды, ребра обозначают матчи, и стрелки направлены от победившей команды к побежденной. Полученный ориентированный граф будет турниром.

2.3.4. Сколько существует попарно неизоморфных графов, имеющих 8 вершин и 25 рёбер?

2.3.5. Количество классов изоморфизма деревьев с n вершинами (т. е. количество различных деревьев с n незанумерованными вершинами) меньше 4^n.

2.3.6. (a) Сколько существует изоморфизмов $K_5 \to K_5$? А $K_{3,3} \to K_{3,3}$?

(b) Изоморфны ли графы G_2 и G_3, вершины каждого из которых занумерованы числами от 1 до 7, вершины графа G_k соединены ребром, если либо $i - j \equiv 1 \mod 7$, либо $i - j \equiv k \mod 7$.

(c) Постройте граф с наименьшим числом $n > 1$ вершин такой, что никакая не тождественная перестановка его вершин не является изоморфизмом.

2.3.7. *Симметричные графы. Эта задача для иследования предложена И.Н. Шнурниковым.* Мы будем работать со связными ориентированными мультиграфами, из каждой вершины графа выходят два ребра и в каждую входят два ребра. Такой ориентированный мультиграф назовем *симметричным*, если для любой пары разлчных ребер a, b существует его изоморфизм на себя при котором ребро a переходит в ребро b и никакое ребро не остается на месте.

(a) Для каждого натурального n придумайте два (неизоморфных) симметричных мультиграфа с n вершинами каждый.

(b) Придумайте симметричные мультиграфы с 6, 12 и 30 вершинами, не изоморфные мультиграфам из (a).

(c) Найдите все симметричные мультиграфы, которые имеют хотя бы одну петлю или хотя бы одно кратное ребро.

(d) Найдите все симметричные мультиграфы с p-вершинами для простого p.

(e) Найдите все симметричные мультиграфы с не более чем 8 вершинами.

(f) Найдите все симметричные мультиграфы, которые можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, что для каждой вершины входящие ребра чередуются с выходящими.

(g)* Найдите все плоские симметричные мультиграфы.

2.3.8. У Васи есть несвязный граф. Он всеми возможными способами удалил из этого графа по одной вершине и каждый из полученных графов нарисовал на отдельном листочке бумаге, после чего все листочки отдал Коле. Докажите, что Коля может восстановить исходный граф.

2.3.9. * *Нерешенные задачи о вершинной и реберной реконструируемости.*

(a) Пусть G и $\tilde{G}$ — связные графы без петель и кратных ребер с $n \geqslant 3$ вершинами $\{1, \dots, n\}$. Пусть для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ графы $G - k$ и $\tilde{G} - k$ изоморфны. Верно ли, что графы G и $\tilde{G}$ изоморфны?

(b) Пусть G и $\tilde{G}$ — графы с $e \geqslant 5$ занумерованными ребрами. Для каждого $k \in \{1, \dots, e\}$ рассмотрим графы G_k и $\tilde{G}_k$, полученные из графов G и $\tilde{G}$ соответственно путем удаления в каждом из них ребра с номером k. Пусть для любого $k \in \{1, \dots, e\}$ графы G_k и $\tilde{G}_k$ изоморфны. Верно ли, что графы G и $\tilde{G}$ изоморфны?

Методическое замечание. Начать знакомство с теорией графов полезно без четкого определения графа, см. сноску 1. Для такого знакомства не нужно различать граф и класс изоморфизма графов. Однако при подсчете количества различных графов уже важно различать эти понятия (см. утверждения 2.2.3.a и 2.3.5). А для этого нужны четкие определения. Увы, они не всегда даются. Приведем характерный пример.

Интересный цикл задач [ВКК] посвящен подсчету деревьев. В [ВКК, второй абзац §1][6] понятие графа используется без четкого определения. Как пояснил К. Кохась, под графом (деревом) в [ВКК, §1] понимается класс изоморфизма графов (деревьев), и чтобы не сделать текст неясным из-за «излишней» формальности, не приводится ни четкого определения этого понятия, ни сравнения используемой терминологии со стандартной. Ввиду этого в определении помеченного дерева слова «вершина дерева [т.е. класса изоморфизма деревьев]» не имеют смысла.[7] Читатель, уверенно работающий

[6] Бóльшая часть этих методических замечаний была высказана авторам [ВКК] перед Конференцией и интернет-публикацией.

[7] Аналогично, в определении реберно помеченного дерева [ВКК, задача 1.4] слова «ребра дерева [т.е. класса изоморфизма деревьев]» не имеют смысла.

с классами эквивалентности, легко придаст смысл этому определению. Но для этого нужны и гораздо большее владение формализмом, чем для понимания определения графа (в общепринятом смысле, см. §2.1), и само определение графа (в общепринятом смысле).

Невнимание к соответствию между уровнем строгости и сложностью излагаемого материала часто приводит к парадоксальному результату: отсутствие нужных четких определений сочетается с попытками дать ненужные (иногда неудачными). Например, определение изоморфизма графов не нужно для [ВКК] (кроме задачи 1.2, не используемой в остальном тексте). Оно более сложно, чем определение графа (в общепринятом смысле), пропущенное из-за «излишней» формальности. Однако изоморфизм определяется в [ВКК, третий абзац §1]. В этом определении слова «вершина и ребра непомеченного графа [т.е. класса изоморфизма графов]» не имеют смысла. В [ВКК, последнее предложение третьего абзаца §1] используется не определенное в тексте понятие изоморфизма помеченных графов и делается вывод об отсутствии их нетождественных изоморфизмов.

2.4 Графы и раскраски карт на плоскости

В этом пункте мы докажем простейшие результаты о графах и раскрасках карт на плоскости — утверждения 2.4.1.ab и 2.4.3. На примере этих доказательств мы продемонстрируем применения формулы Эйлера 2.4.4.c. (Стало быть, решение задач 2.4.1 и 2.4.3 нужно отложить до знакомства с этой формулой.)

2.4.1. (a) Треугольник разбит на конечное число выпуклых многоугольников. Их можно так раскрасить в 6 цветов, что любые два многоугольника, имеющие общий граничный отрезок, окрашены в разные цвета.

(b)* То же для 5 цветов.

(Знаменитая гипотеза четырех красок утверждает, что и 4 цветов хватит, но ее доказательство гораздо более сложно.)

(c) «...Итак, для построения квантового нанобифуркатора остается взять указанный в презентации выпуклый многогранник, у ко-

торого 30 пятиугольных граней, 10 восьмиугольных граней и нет других граней,» — закончил докладчик. Публика рукоплещет. А Вы?

(Более аккуратно, существует ли выпуклый многогранник с такими свойствами?)

(d)* Выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон и из разных вершин выходит одинаковое число ребер. Докажите, что выпуклых правильных многогранников ровно 5, с точностью до изоморфизма их графов.

(Не забудьте доказать, что правильных многогранников не менее 5, т.е. привести их конструкции.)

(e) На плоскости отмечено n точек. Разрешается соединять некоторые две из них ломаной, не проходящей через другие точки. Два игрока по очереди соединяют ломаной какие-то две еще не соединенные точки. При этом требуется, чтобы любые две из этих ломаных пересекались только по их общим концам, если такие концы есть. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для каких n при правильной игре выигрывает тот, кто ходит первым?

Плоским графом называется конечный набор несамопересекающихся ломаных на плоскости, любые две из которых пересекаются только по их общим концам (в частности, если общих концов нет, то не пересекаются). Концы ломаных называются его *вершинами*, а сами ломаные — *ребрами*. Итак, плоскому графу соответствует граф (в смысле п. 2.1), *изображением* которого называется плоский граф. Иногда плоский граф называют просто графом, но это неточно, поскольку один и тот же граф можно изобразить на плоскости (если можно) разными способами, см. рис. 4.

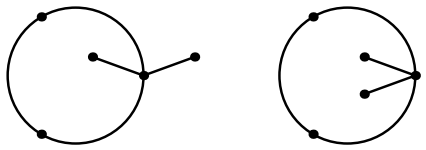

Рис. 4: Различные изображения графа на плоскости

Граф называется *планарным* (или *вложимым в плоскость* или *реализуемым без самопересечений на плоскости*), если его можно

изобразить без самопересечений на плоскости. Более строго, граф называется **планарным**, если некоторый плоский граф является его изображением.

2.4.2. Следующие графы планарны:
(a) граф K_5 без одного из ребер (рис. 15); (b) любое дерево;
(c) граф любого выпуклого многогранника.

Проблема вложимости графов (или графов с дополнительной структурой) в плоскость, тор, ленту Мебиуса и другие поверхности (см. конец этого пункта) — одна из основных в топологической теории графов [MT01].

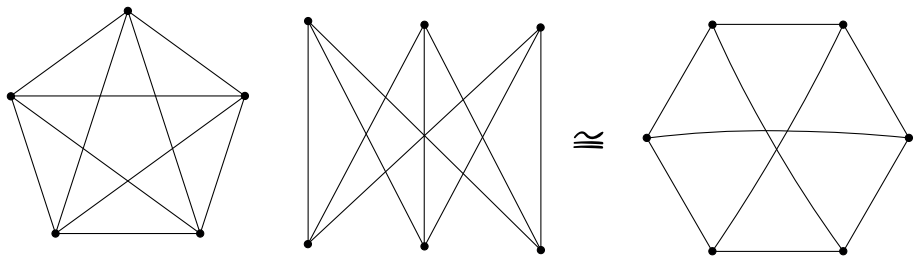

Рис. 5: Непланарные графы K_5 и $K_{3,3}$

2.4.3. (a) Граф K_5 не планарен. (b) Граф $K_{3,3}$ не планарен.
(c) Для любого плоского связного графа с V вершинами и $E > 1$ ребрами выполнено неравенство $E \leqslant 3V - 6$.
(d) В любом плоском графе есть вершина, из которой выходит не более 5 ребер.

Плоский граф делит плоскость на части, называемые *гранями* графа. Приведем строгое определение.

Подмножество плоскости называется **связным**, если любые две его точки можно соединить ломаной, лежащей в этом подмножестве. (Осторожно, для более общих подмножеств, чем рассматриваемые здесь, определение связности другое!)

Гранью плоского графа G называется каждая из связных частей, на которые распадается плоскость $\mathbb{R}^2$ при разрезании по всем ломаным (=ребрам) плоского графа G, т.е. любое максимальное связное подмножество в $\mathbb{R}^2 - G$. Заметим, что одна из таких частей будет «бесконечной».

2.4.4. (a) Нарисуйте плоский граф, в границе некоторой грани которого имеется три попарно непересекающихся цикла.

(b) Для любого плоского графа с $E > 1$ ребрами и F гранями верно неравенство $3F \leqslant 2E$.

(c)* **Формула Эйлера.** *Для любого связного плоского графа с V вершинами, E ребрами и F гранями верно равенство $V - E + F = 2$.*

(d) Найдите аналог формулы Эйлера для плоского графа с s компонентами связности.

Для п. (b) подумайте, скольким граням принадлежит ребро и какое наименьшее число ребер может ограничивать грань.

В этой книге используйте формулу Эйлера без доказательства. Оно приведено, например, в [S15, п. 1.4 «Доказательство формулы Эйлера»].

2.4.5. (a) В любом плоском графе есть грань, имеющая не более 5 соседних граней. (Это аналог утверждения 2.4.3.d для граней.)

(b) Если каждая вершина плоского связного графа с E ребрами имеет степень d, граница каждой грани состоит из ровно $k \geqslant 3$ ребер, и

(*) к каждому ребру с двух разных сторон примыкают две разные грани,

то $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{E}$.

(c)* Верен ли аналог п. (b) без предположения (*)?

(d) Перечислите все связные плоские графы (с точностью до изоморфизма, см. определение в п. 2.3), у которых степени всех вершин равны, «степени» всех граней равны (т. е. граница каждой грани состоит из одного и того же числа ребер) выполнено предположение (*).

Предостережение: не забудьте доказать изоморфность графов с одинаковыми степенями вершин и граней.

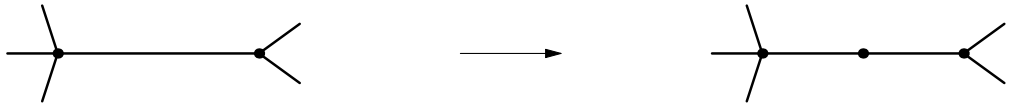

Рис. 6: Подразделение ребра

2.9 Простое доказательство теоремы Куратовского

Формулировка теоремы Куратовского приведена в п. 2.4. Приводимое в этом пункте доказательство в основном принадлежит Ю. Макарычеву (он придумал свое доказательство, еще будучи школьником!) [Ma], ср. [Th, §5]. Некоторые упрощения сделаны А. Заславским, В. Прасоловым, А. Скопенковым и А. Телишевым. По-видимому, это доказательство является наиболее простым.

Необходимость в теореме Куратовского следует из утверждения 2.4.5.а. Приведем доказательство достаточности. Ее достаточно доказать для графов без петель и кратных ребер. Поэтому будем рассматривать только такие графы. Под стягиванием ребра будем понимать стягивание ребра вместе с заменой каждого получившегося ребра кратности больше 1 на ребро кратности 1.

2.9.1. Утверждение. *Если связный граф G не изоморфен ни K_5, ни $K_{3,3}$, и для любого ребра e графа G оба графа $G - e$ и G/e планарны, то G планарен.*

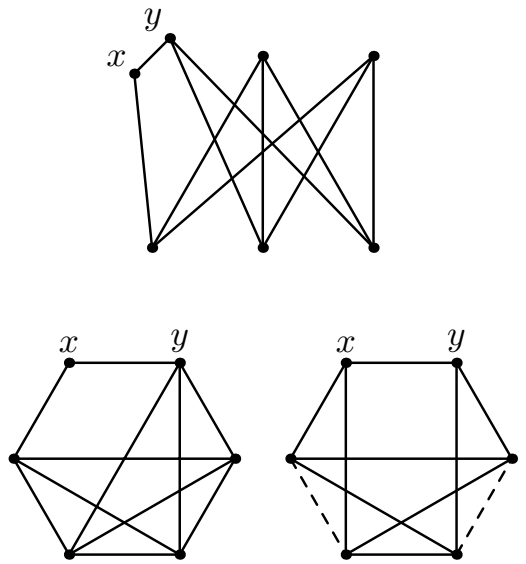

Рис. 10: «Растягивание ребра» в графах Куратовского

Доказательство достаточности в теореме Куратовского с использованием Утверждения. Используем индукцию по количеству ребер в графе. Свойство «*граф G содержит подграф, гомеоморфный графу H*» будем сокращенно записывать в виде «$G \supset H$». Шаг

индукции следует из Утверждения, поскольку если для некоторого ребра e графа G

- $G - e \supset K_5$, то $G \supset K_5$.
- $G - e \supset K_{3,3}$, то то $G \supset K_{3,3}$.
- $G/e \supset K_{3,3}$, то $G \supset K_{3,3}$.
- $G/e \supset K_5$, то $G \supset K_5$ или $G \supset K_{3,3}$ (рис. 10). □

Назовем *θ-подграфом* подграф, гомеоморфный $K_{3,2}$.

2.9.2. Лемма о графах Куратовского. *Для произвольного графа K следующие три условия равносильны:*

(1) Для любого ребра xy графа K граф $K - x - y$ не содержит θ-подграфа, и из каждой вершины графа $K-x-y$ выходит не менее двух ребер.

(2) Для любого ребра xy графа K граф $K-x-y$ является циклом (содержащим $n \geqslant 3$ вершин).

(3) K изоморфен K_5 или $K_{3,3}$.

Импликации (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) в лемме о графах Куратовского очевидны и не используются в доказательстве теоремы Куратовского.

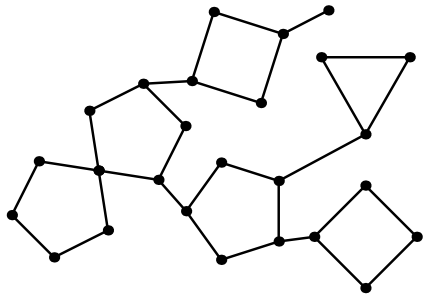

Рис. 11: «Дерево» из циклов

Доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (2) *в лемме о графах Куратовского.* Два цикла, имеющих общее ребро, содержат θ-подграф. Поэтому ввиду (1) в графе $K-x-y$ существует «висячий» цикл, т.е. цикл C, имеющий с остальным графом только одну общую вершину v (ибо граф $K - x - y$ представляет собой одно или несколько «деревьев», «вершинами» которых служат циклы, рис. 11; формально говоря, каждым блоком графа $K - x - y$ является цикл). В этом

цикле C есть еще по крайней мере две вершины p и q. Так как в графе K нет вершин, из которых выходит менее трех ребер, то каждая из этих вершин p и q соединена либо с x, либо с y. Поэтому в объединении цикла C и ребер графа K, соединяющих вершины x, y, p, q, можно выделить θ-подграф. Значит, по (1) каждое ребро графа $K - x - y$ имеет конец на цикле C. Поскольку по (1) граф $K - x - y$ не содержит висячих вершин, то $K - x - y = C$. □

Доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (3) *в лемме о графах Куратовского.* При $n = 3$ для любых двух вершин b и c цикла $K - x - y$ граф $K - b - c$ является циклом, поэтому оставшаяся вершина цикла $K - x - y$ соединена (ребром) в K и с x, и с y. Поэтому $K = K_5$.

При $n \geqslant 4$ возьмем любые четыре последовательные вершины a, b, c, d цикла $K - x - y$. Поскольку граф $K - b - c$ является циклом, то в K одна из вершин a и d соединена с x (и не соединена с y), другая соединена с y (и не соединена с x), а отличные от a, b, c, d вершины цикла $K - x - y$ (которых нет при $n = 4$) не соединены ни с x, ни с y. При $n \geqslant 5$ получаем противоречие. При $n = 4$ получаем, что четыре вершины цикла $K - x - y$ соединены с x и y попеременно, откуда $K = K_{3,3}$. □

Доказательство утверждения. Так как G не изоморфен ни K_5, ни $K_{3,3}$, то по лемме о графах Куратовского существует ребро $e = (xy)$ графа G, для которого в графе $G - x - y$ найдется либо вершина степени меньше 2 (в $G - x - y$), либо θ-подграф.

Если в графе G из некоторой вершины выходит одно или два его ребра, и при стягивании одного из них получается планарный граф, то и граф G планарен. Поэтому далее будем считать, что из каждой вершины графа G выходит не менее трех его ребер.

Поэтому в графе $G - x - y$ нет изолированных вершин, и если есть висячая вершина p, то она соединена и с x, и с y в графе G. Нарисуем граф $G - (xy)$ на плоскости без самопересечений. Так как в графе G из p выходит три ребра, то «с одной стороны» от пути xpy из p не выходит ребер. «Подрисуем» ребро xy вдоль пути xpy «с этой стороны» от пути. Получим изображение графа G на плоскости без самопересечений.

Рассмотрим теперь случай, когда в графе $G - x - y$ найдется θ-подграф.

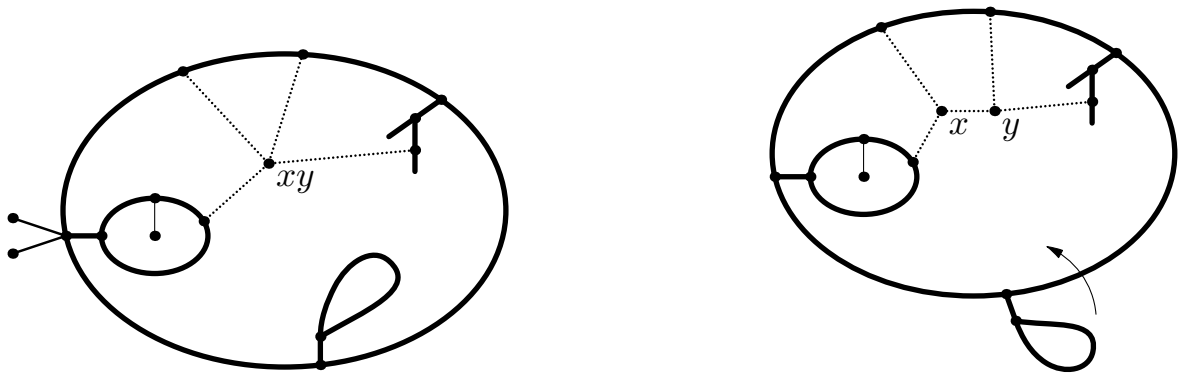

Рис. 12: Изображение на плоскости графов G/xy и G

Нарисуем без самопересечений на плоскости граф G/xy (рис. 12 слева). Отождествим графы $G - x - y$ и $G/xy - xy$. Изображение графа $G - x - y$ на плоскости получается стиранием ребер графа G/xy, выходящих из вершины xy. Обозначим через $\overline{C}$ границу той грани изображения графа $G - x - y$, которая содержит вершину xy графа G/xy. (Определение грани приведено в п. 2.4.)

В следующем абзаце мы докажем, что *граница грани не может содержать θ-подграфа.*

Это утверждение можно вывести из леммы о четности или теоремы Жордана [S, п. 1.3 «Число пересечения для ломаных на плоскости»]. Другое доказательство получается от противного: если граница грани содержит θ-подграф, то возьмем точку внутри этой грани и соединим ее тремя ребрами с тремя точками на трех «дугах» θ-подграфа. Получим изображение графа $K_{3,3}$ на плоскости без самопересечений. Противоречие.

Поэтому $G - x - y \neq \overline{C}$. Тогда ребра графа $G - x - y - \overline{C}$ [8] находятся в грани изображения графа $G - x - y$, не содержащей вершины xy. Значит, граф $\overline{C}$ разбивает плоскость. Поэтому найдется цикл $C \subset \overline{C}$, относительно которого вершина xy лежит, не уменьшая общности, внутри, а некоторое ребро графа $G - x - y - \overline{C}$ — вне.

Обозначим через R подграф в $G - x - y = G/xy - xy$, образо-

[8] Удаление подграфа — удаление всех его ребер и всех вершин, из которых выходят только ребра этого подграфа. Заметим, что удаление вершины — не то же самое, что удаление подграфа из этой вершины.

ванный всеми ребрами графа G/xy, лежащими вне цикла C. (Возможно, $R \neq G - x - y - \overline{C}$.) Так как R — подграф в $G - x - y$, то R — подграф в G.

Граф $G - R$ можно нарисовать на плоскости без самопересечений (сплошные линии на рис. 12 справа). Можно считать, что ребра графа G, выходящие из x или y, на изображении графа $G - R$ лежат *внутри* цикла C.

В следующем абзаце мы докажем, что *каждая компонента связности графа $G - x - y - R - C$ пересекается с C не более чем по одной точке.*

Если это не так, то в $G - x - y - R - C$ есть путь, соединяющий две точки на C. На изображении графа G/xy соответствующий путь лежит внутри цикла C. Значит, этот путь разбивает внутреннюю часть цикла C на две части, одна из которых содержит xy, а другая не лежит в грани, ограниченной $\overline{C}$. Поэтому $C \not\subset \overline{C}$ — противоречие.

Поэтому можно перекинуть внутрь цикла C каждую компоненту связности графа $G - x - y - R - C$ (см. стрелочку на рис. 12 справа). Значит, граф $G - R - C$ можно нарисовать внутри цикла C. Нарисуем R вне C, как для изображения графа G/xy (рис. 12 слева). Получим изображение графа G на плоскости без самопересечений. □

Запрещенные подсистемы

Завершим этот пункт формулировками некоторых версий теоремы Куратовского.

Начнем с неформального изложения идеи. Если некоторая подсистема системы N не реализуема в другой системе M, то и N не реализуема в M. Естественная идея — попытаться найти список «запрещенных» систем, не реализуемых в M, со следующим свойством: *для того, чтобы система N была реализуема в M необходимо и достаточно, чтобы N не содержал ни одной из этих «запрещенных» подсистем.*

Классический пример теоремы такого рода — теорема Куратовского. Аналогично описание графов, вложимых в данную поверхность [RS90], а также других классов графов или более общих обьектов [Cl] (например, графы и даже пеановские континуумы,

базисно вложимые в плоскость [S95, Ku]).[9] Приведем формулировки некоторых результатов такого рода (доказательства оставляем читателю в качестве задач).

2.9.3. Теорема Шартрана-Харари. *Граф G можно нарисовать на плоскости без самопересечений так, чтобы он был границей некоторой* одной *грани тогда и только тогда, когда G не содержит θ-подграфа.*

Назовем несамопересекающийся цикл C в связном графе G *граничным*, если существует изображение без самопересечений графа G на плоскости, при котором цикл C изображается границей некоторой грани.

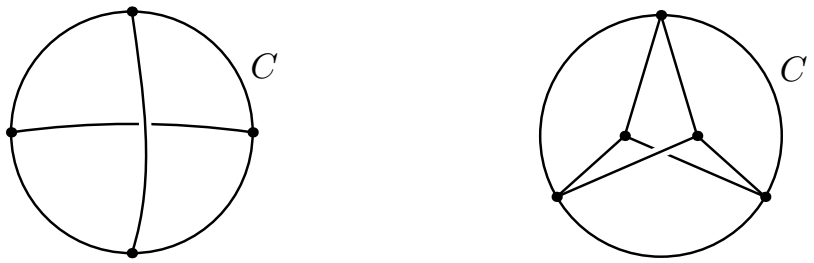

Рис. 13: Цикл C не может быть границей внешней грани

2.9.4. Относительная версия теоремы Куратовского. *Цикл C является граничным тогда и только тогда, когда граф G планарен и цикл C не содержится в подграфе графа G, как на рис. 13.*

Этот результат можно вывести из теоремы Куратовского.

2.9.5. Теорема о 8 и θ. *Граф G с заданными (ориентированными) циклическими порядками ребер, выходящих из каждой вершины,*

[9] Заметим, что список запрещенных подграфов для вложимости графа в лист Мебиуса содержит целых 103 графа [GHW]. Даже *существование* такого конечного списка для произвольной поверхности доказывется сложно [AH, RS90]. Список запрещенных полиэдров бесконечен для вложимости двумерных полиэдров в $\mathbb{R}^3$ или n-мерных полиэдров в $\mathbb{R}^{2n}$, где $n \geqslant 2$ [Sa]. Поэтому интересны другие препятствия к вложимости. Одно из самых полезных препятствий строится с помощью *конфигурационного пространства* упорядоченных пар различных точек данного пространства [S08, §5].

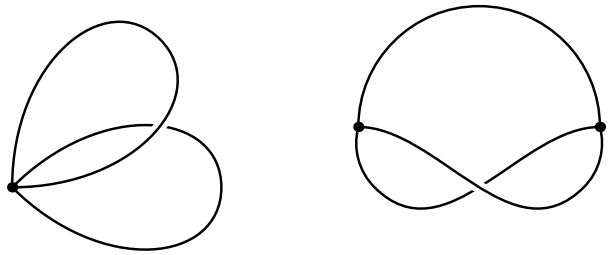

Рис. 14: Графы с циклическими порядками, не реализуемые на плоскости

можно так изобразить без самопересечений на плоскости, чтобы указанные циклические порядки получались бы при обходах по часовой стрелке вокруг вершин, тогда и только тогда, когда G не содержит «восьмерки» или «буквы θ» с циклическими порядками, изображенными на рис. 14.

А этот результат проще доказать, не используя теорему Куратовского (подробнее см. [S15, §2]).

2.10 Метод минимального контрпримера. А.Я. Канель

При решении многих задач используется так называемый *метод минимального контрпримера* (разновидность *принципа крайнего* или *метода спуска*). Он заключается в следующем. Пусть надо доказать, что объекта, удовлетворяющего некоторым свойствам, не существует. Предположим противное — тогда найдется (в некотором смысле) *минимальный* контрпример. После чего строят еще «меньший» контрпример и получают противоречие. Понятие «меньше» подбирается в процессе доказательства.

Особенно распространен такой метод решения в задачах на графы. Простейшие примеры — доказательства теорем Эйлера 2.4.4.c о плоских графах [S15, §1], Куратовского (п. 2.4 и 2.9) и Менгера (п. 2.8). Более содержательный пример — следующая знаменитая теорема Дилуорса о частично упорядоченных множествах.

2.10.1. Множество A с отношением $\prec$ называется *частично упорядоченным*, если отношение $\prec$ удовлетворяет следующим свойствам:

(1) $a \not\prec a$,

(2) $a \not\prec b$ либо $b \not\prec a$,

(3) если $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a \prec c$.

Если $a \prec b$ или $b \prec a$, то элементы a и b называются *сравнимыми*. Если же $a \not\prec b$ и $b \not\prec a$, то они называются *несравнимыми*. *Цепью* называется множество попарно сравнимых элементов, а *антицепью* — попарно несравнимых. *Диаметром* частично упорядоченного множества называется максимальный размер антицепи.

(a) Количество цепей, на которые можно разбить частично упорядоченное множество, не меньше его диаметра.

(b) *Теорема Дилуорса.* Количество цепей, на которые можно разбить частично упорядоченное множество, равно его диаметру.

2.10.2. В каждый город ведет 3 дороги: красная, синяя и белая. В зависимости от цветов входящих дорог, считая по часовой стрелке, города разделяются на два типа КСБ и КБС. Докажите, что разность количеств городов разных типов делится на 4.

2.10.3. (a) С графом разрешается производить следующую операцию: выбрать произвольный цикл длины 4 и выбросить из него произвольное ребро. Какое минимальное число ребер можно оставить с помощью этой операции из полного графа с n вершинами?

(b) Если в графе любые две 3-клики имеют общую вершину и нет 5-клик, то существуют две вершины, удаление которых разрушает все 3-клики.

2.10.4. Для любых $m < n$ любой граф с n вершинами содержит $m+1$ вершин, степени которых отличаются не больше чем на $m-1$.

2.11 Степенны́е последовательности. М.Н. Вялый и А.Б. Скопенков

2.11.1. (a) При каких e и n существует граф с n вершинами и e ребрами, каждая вершина которого имеет степень 3? (Такие графы называют *кубическими* или *правильными степени 3*.)

(b) При каких n и d существует граф с n вершинами, каждая вершина которого имеет степень d?

2.11.2. Последовательность n целых положительных чисел является последовательностью степеней вершин некоторого дерева тогда и только тогда, когда сумма её членов равна $2n-2$.

2.11.3. Даны целые положительные числа $n, d_1, \ldots, d_n$. При каких условиях существует

(a) мультиграф (возможно, имеющий петли и кратные ребра)

(b) мультиграф без петель

(c)* граф

с n вершинами степеней $d_1, \ldots, d_n$, соответственно?

Последовательность целых неотрицательных чисел называется *степенной* (графической), если она является последовательностью степеней вершин некоторого графа. *Основной вопрос*: какие последовательности являются степенными? Это задача 2.11.3.c; неотрицательность введена для удобства индуктивных построений. Здесь мы подведем читателя к ответу и доказательству, которые приводятся в п. 2.12.

2.11.4. Является ли степенной последовательность

(a) $(4^3, 1^6)$, (b) $(6^4, 2^3)$, (c) $(5^3, 3^3)$,

(d) $(18^{10}, 12^3, 6^8)$, (e) $(15^8, 10^6, 3^4)$?

(Мы используем «экспоненциальную» запись невозрастающих целочисленных последовательностей: a^k означает, что k последовательных членов последовательности равны a.)

2.11.5. Для любой степенной последовательности $d_1, \ldots, d_n$

(a) $d_i \leqslant n-1$;

$$(b) \quad \sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i) \text{ для любого } k = 1, \ldots, n-1.$$

2.11.6. (a) Приведите пример числа n и не степенной последовательности из n чисел, лежащих в промежутке $[1000, n/1000]$, сумма которых четна.

(b) Любая последовательность из n чисел, меньших $\sqrt{n}/2$, сумма которых четна — степенная.

2.11.7. Если последовательность целых положительных чисел степенная, то последовательность, полученная из нее каждым из следующих двух преобразований — степенная.

(a) Выкинем максимальное число d и отнимем по единице от следующих по возрастанию d чисел.

(b) Отнимем по единице от наибольшего и наименьшего из чисел.

Каждый из двух пунктов этой задачи (вместе с очевидным обратным утверждением) дает алгоритм распознавания того, является ли данная последовательность степенной. Имеется и «явный» ответ, см. п. 2.12.

2.11.8. Пусть a, b, c, d — различные вершины графа, причем (ab), (cd) — ребра, а $(ac), (bd)$ — не ребра. Назовем *обменом* преобразование графа, состоящее в удалении ребер $(ab), (cd)$ и добавлении ребер $(ac), (bd)$.

Пусть G_1, G_2 — два графа с одинаковыми (упорядоченными по неубыванию) последовательностями степеней вершин. Докажите, что обменами можно перевести граф G_1 в граф G_2.

2.11.9. Пусть для последовательности $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n > 0$ (не обязательно степенной) выполнены неравенства из задачи 2.11.5.b.

(a) Тогда $d_1 \leqslant n - 1$.

(b) Переставим по невозрастанию последовательность, полученную преобразованием из задачи 2.11.7.a. Докажите неравенства из задачи 2.11.5.b с заменой d на полученную последовательность c:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\} \text{ для любого } k = 1, \ldots, n-1.$$

Сделайте это для

(b1) $k \geqslant d_1$; (b2) таких k, что $c_i = d_{i+1} - 1$ при любом $i \leqslant k$;

(b3) остальных случаев.

2.11.10. Пусть для последовательности $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n > 0$ (не обязательно степенной) выполнены неравенства из задачи 2.11.5.b. Переставим в порядке невозрастания последовательность, полученную

преобразованием из задачи 2.11.7.b. Докажите неравенства из задачи 2.11.5.b с заменой d на полученную последовательность c при

(a) $k \geqslant t := \min\{i : d_i > d_{i+1}\}$; (b) $d_k \leqslant k-1 \leqslant t-2$;

(c) $d_k = k \leqslant t-1$; (d) $d_k \geqslant k+1 \leqslant t$.

В заключение приведем несколько задач для исследования.

2.11.11. (a,b,c) То же, что в задаче 2.11.3, для *связных* графов.

(a',b',c') Сформулируйте и решите аналог задачи 2.11.3 для *ориентированных* графов.

(a",b",c") То же, что в задаче 2.11.3 для *планарных* графов.

(a"',b"',c"'*) То же, что в задаче 2.11.3, для графов, реализуемых на торе (рис. 7).

(a"",b"",c""*) То же, что в задаче 2.11.3, для графов, реализуемых на ленте Мебиуса (рис. 7).

Необходимые определения можно найти в п. 2.4. Для тора и ленты Мебиуса будет полезно неравенство Эйлера [S15, §2].

Задачи 2.11.11.(a",b",c") при помощи конструкции *двойственного* графа связаны со следующими задачами. Даны целые положительные числа $n, d_1, \ldots, d_n$. При каких условиях существует

(a) мультиграф (возможно, имеющий петли и кратные ребра)

(b) мультиграф без петель

(c)* граф

нарисованный без самопересечений на плоскости, имеющий n граней, в границе которых $d_1, \ldots, d_n$ ребер, соответственно?

Аналогичное замечание справедливо для реализуемости на торе и на ленте Мебиуса. Все эти задачи интересно обобщить на сферу с g ручками и на диск с m листами Мебиуса [S15, §2].

2.11.12. * (a) Можно ли опустить какие-нибудь неравенства из задачи 2.11.5.b так, чтобы достаточность (т.е. теорема из п. 2.12.c) осталась верной? Если да, то попробуйте найти минимальный набор неравенств.

(b) Если слить две степенные последовательности, то получится степенная последовательность. А какие степенные последовательности нельзя разбить на две степенные последовательности?

2.12 Теорема о степенны́х последовательностях. В.А. Волков и А.Б. Скопенков

Теорема. *Невозрастающая последовательность является степенной тогда и только тогда, когда сумма ее членов четна и выполнены неравенства задачи 2.11.5.b.*

Доказательство С.А. Чоудама. Индукция по $\sum d_i$. Случай, когда все d_i равны, рассмотрен в задаче 2.11.1.b. Пусть теперь не все d_i равны. Можно считать, что $d_n > 0$.

Определим последовательность c, как в задаче 2.11.10. Более формально, обозначим $t = \min\{i : d_i > d_{i+1}\}$ и определим последовательность

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \quad \text{формулой} \quad c_i := \begin{cases} d_i, & i \neq t, n, \\ d_i - 1, & i = t, n. \end{cases}$$

Обозначим $\quad S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i, \quad S'_k = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i$. По задаче 2.11.7.b достаточно доказать неравенства

$$(*) \qquad S'_k \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}.$$

При $k \geqslant t$

$$S'_k = S_k - 1 \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} - 1 \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}.$$

Пусть теперь $k \leqslant t-1$. Тогда $S'_k = S_k = kd_k$.

Для $d_k \leqslant k-1$ неравенство (*) тривиально.

Для $d_k = k$

$$S'_k - k(k-1) = k^2 - k(k-1) = k \overset{(3)}{=} d_{k+1} \overset{(4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant d_{k+1} + \left(\sum_{i=k+2}^{n} d_i - 2 \right) \overset{(5)}{=} \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}, \quad \text{где}$$

- равенство (3) выполнено, поскольку $k \leqslant t-1$;

• неравенство (4) очевидно, если $k+2<n$; если же $k+2=n$, то $d=((n-2)^{(n-1)},d_n)$ и $d_n\geqslant 2$ в силу четности суммы $d_1+d_2+\dots+d_n$.

• равенство (5) выполнено, поскольку $\min\{k,c_i\}=c_i$ при $i\geqslant k+1$.

Случай $d_k\geqslant k+1$. Если $d_n\geqslant k+1$, то $\min\{k,d_i\}=\min\{k,c_i\}=k$ при $i\geqslant k+1$ и неравенство (*) следует из аналогичного для S_k.

Пусть теперь $d_n\leqslant k$. Имеем

$$\min\{k,c_i\}=\begin{cases}\min\{k,d_i\} & k+1\leqslant i<n\\ \min\{k,d_n\}-1 & i=n\end{cases}.$$

В нашем случае $S'_k=S_k$, поэтому достаточно показать, что

$$(**)\qquad S_k\leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}\min\{k,c_i\}=k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}\min\{k,d_i\}-1.$$

Учитывая, что $d_{k+1}=d_k\geqslant k+1$, получаем

$$S_{k+1}=(k+1)d_k=\frac{k+1}{k}S_k\overset{(3)}{\leqslant}(k+1)(k-1)+\frac{k+1}{k}\sum_{i=k+1}^{n}\min\{k,d_i\}=$$

$$=(k+1)(k-1)+(k+1)+\frac{k+1}{k}\sum_{i=k+2}^{n}\min\{k,d_i\}\overset{(5)}{>}$$

$$>(k+1)k+\sum_{i=k+2}^{n}\min\{k+1,d_i\}\geqslant S_{k+1}.$$

Неравенство (5) выполнено, так как при всех $k+2\leqslant i<n$ имеем нестрогое неравенство и при $i=n$ строгое. Значит, в (3) неравенство строгое. Отсюда вытекает (**). □

Набросок другого доказательства. Первый абзац такой же, как в предыдущем доказательстве. Определим последовательность c, как в задаче 2.11.9. По задаче 2.11.7.a достаточно доказать неравенства из задачи 2.11.5.b для последовательности c.

Выполнение этих неравенств несложно проверить для $k\geqslant d_1$.

Докажем неравенства *для тех* k, *для которых* $c_i=d_{i+1}-1$ *при любом* $i\leqslant k$.

(Рассмотрите самостоятельно случай остальных k.)

Обозначим $S := \sum_{j=k+1}^{n-1} \min(k, c_j)$.

Случай 1. Среди чисел $d_{k+2}, d_{k+3}, \ldots, d_n$ более $d_1 - k$ чисел, больших k. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant kd_1 = k(k-1) + k(d_1 - k + 1) \leqslant k(k-1) + S.$$

Первое неравенство выполнено, так как каждое слагаемое в первой сумме не больше d_1. Последнее неравенство выполнено, так как среди чисел $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_{n-1}$ более $d_1 - k$ чисел, не меньших k.

Случай 2. Среди чисел $d_{k+2}, d_{k+3}, \ldots, d_n$ не более $d_1 - k$ чисел, больших k. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i = -d_1 - k + \sum_{i=1}^{k+1} d_i \leqslant k(k+1) - d_1 - k + \sum_{j=k+2}^{n} \min(k+1, d_j) \leqslant$$

$$\leqslant k^2 - d_1 + S + d_1 - k = k(k-1) + S.$$

Первое и четвертое равенства очевидны. Второе неравенство — известное для старой последовательности. Докажем третье неравенство. Среди чисел $d_{k+2}, d_{k+3}, \ldots, d_n$ ровно $d_1 - k$ чисел было уменьшено на 1 при переходе к новой последовательности. Поэтому в сумме $\sum_{j=k+2}^{n} \min(k+1, d_j)$ при переходе к S первые $d_1 - k$ слагаемых уменьшились на 1, а остальные не изменились. □

2.13 Обобщенная гамильтоновость: задачи для исследования. А.Ю. Веснин и А.Б. Скопенков

Пусть H — граф. Граф X называется *H-гамильтоновым,* если в X существует подграф, содержащий все вершины графа X и гомеоморфный графу H.

Например, гамильтоновость равносильна K_3-гамильтоновости.

Следующая задача (кроме (g)) проста и приводится для того, чтобы помочь решателю войти в курс дела. Задачи, отмеченные звездочкой, являются нерешенными. Обычно при решении сложной задачи полезно рассмотреть частные случаи, попытаться решить

близкие задачи. Это позволяет заметить закономерности, которые можно сформулировать в виде гипотез и затем доказать. Мы не будем подсказывать эти гипотезы, а предлагаем вам самим исследовать нерешенные задачи и высказывать ваши предположения.

Обозначим $\theta := K_{3,2}$.

2.13.1. (a) Любой гамильтонов граф, отличный от цикла, является θ-гамильтоновым.

(b) Существует θ-гамильтонов граф, не являющийся гамильтоновым.

(c) Существует ли гамильтонов граф, отличный от цикла, не гомеоморфный графу θ и не являющийся K_4-гамильтоновым?

(d) Существует ли K_4-гамильтонов граф, не являющийся θ-гамильтоновым?

(e) Для любого ли графа G существует граф, не являющийся G-гамильтоновым?

(f) Для любых ли графов G и H существует G-гамильтонов граф, не являющийся H-гамильтоновым?

(g)* Опишите «иерархию» графов по их гамильтоновости: когда H-гамильтонов граф является G-гамильтоновым?

2.13.2. (a) Постройте не гамильтонов граф многогранника.

(b,c*,d*,e*,f*,g*) То же, что в задаче 2.13.1, для графов многогранников.

Граф Погорелова — граф выпуклого многогранника в трехмерном пространстве,

(1) из каждой вершины которого исходит три ребра,

(2) каждая замкнутая несамопересекающаяся ломаная на поверхности многогранника, разделяющая какие-либо две его грани, пересекает по крайней мере пять ребер многогранника.

Из (2) вытекает, что в границе каждой грани не менее пяти ребер.

2.13.3. (a) Правильный додекаэдр является графом Погорелова.

(b) Граф с рис. 9 является графом Погорелова.

(c)* Охарактеризуйте графы Погорелова в теоретико-графовых терминах (подобно характеризации Штейница графов многогранников).

2.11.2. Индукция с откидыванием висячей вершины.

2.11.3. Обозначим $e := (d_1 + \cdots + d_n)/2$.

Ответы: (a) e целое. (b) e целое и $d_i \leqslant e$ для любого i.

(c) См. п. 2.12.

2.11.5. (b) Оцените сверху количество ребер, выходящих из первых k вершин (и снизу количество ребер, выходящих из последних $n-k$ вершин).

2.11.7. Используйте обмены (определенные в задаче 2.11.8).

(b) Удалим ребро между вершиной наибольшей степени и вершиной наименьшей степени, если это возможно.

2.11.8. *Первый способ.* Рассмотрите вершину наибольшей степени и ребра (в графах G_1 и G_2), выходящие из нее.

Второй способ. Рассмотрим граф с теми же вершинами. Его красные ребра — те, которые есть в G_1, но не в G_2. Его синие ребра — те, которые есть в G_2, но не в G_1. Докажите, что в нем есть цветочередующийся цикл.

2.11.11. (a',b',c') См., например, [Ru].

(a",b",c") Используйте формулу Эйлера 2.4.4.c.

(a",b"), (a"' ,b"'), (a"", b"") Следующие ответы для сферы с g ручками (или диска с m листами Мебиуса) получены в [Mo]. Здесь g, m даны вместе с n и $d_1, \ldots, d_n$.

(a) e целое и $e \geqslant n - 1 + 2g$ (или $e \geqslant n - 1 + m$).

(b) e целое, $e \geqslant \max d_i$ и $e \geqslant n - 1 + 2g$ (или $e \geqslant n - 1 + m$).

2.13.2. (a) См. рис. 9.

2.15 Указания

2.4.1. (a) Этот факт выводится по индукции из утверждения 2.4.5.a. Или, иначе, при помощи конструкции *двойственного графа* он сводится к аналогичному факту о раскраске вершин плоского графа. Этот факт следует из утверждения 2.4.3.d.

Другой способ — доказать формулу Эйлера для графа, соответствующего разбиению треугольника на выпуклые многоугольники, при помощи подсчета сумм углов многоугольников.

(b) Докажем аналогичный факт о раскраске вершин плоского графа. Покажем, как раскрасить граф с n вершинами в 5 цветов,

в предположении, что для графов с $n-1$ и $n-2$ вершинами это возможно. По утверждению 2.4.3.d существует вершина a степени не больше 5.

Если $\deg a \leqslant 4$, то удалим вершину a, покрасим остальные, добавим вершину a и покрасим ее в «оставшийся» цвет.

Если $\deg a = 5$, то среди соседей вершины a найдутся две вершины b, c, не соединённые ребром (иначе граф содержит K_5). Удалим a и склеим b и c. Покрасим полученный граф. Потом разделим вершины b и c и добавим a.

Ср. [CR], разбор двух случаев на с. 291 и рассуждение в начале с. 290.

(e) При $n \geqslant 3$ в конце игры все грани треугольные. Поэтому $n - E + \frac{2E}{3} = 2$, откуда $E = 3(n-2)$.

Ответ: первый выигрывает при $n = 2$ или нечётном $n \geqslant 3$, второй — в остальных случаях.

2.4.2. (a) См. рис. 15.

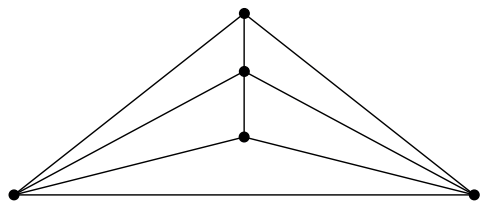

Рис. 15: Граф K_5 без одного из рёбер

2.4.3. (a) Пусть граф K_5 нарисован без самопересечений на плоскости. Тогда по формуле Эйлера $5 - 10 + F = 2$. Значит, $F = 7$. Воспользовавшись утверждением 2.4.4.b, получаем $21 = 3F \leqslant 20$. Противоречие.

Замечание. Полезно разобрать это решение, не ссылаясь на утверждение 2.4.4.b, а доказав его для частного случая.

После разбора этого решения полезно заметить, что оно близко к порочному кругу. Действительно, при доказательстве формулы Эйлера используется утверждение, близкое к непланарности графа K_5 ([S15, лемма о пересечении 1.4.5]). Доказательство непланарности графа K_5, не содержащее «порочного круга», получается из этой леммы или аналогично, см. [S, теорема 1.4.1]. Эту лемму можно и вывести из непланарности графа K_5.

(b) Доказательство аналогично пункту (a). Так как граф $K_{3,3}$ не содержит циклов длины три, то в границе каждой грани не менее четырех стрелок.

(c) По формуле Эйлера и неравенству 2.4.4.b имеем $6 = 3(V - E + F) \leqslant 3V - E$. Следовательно, $E \leqslant 3V - 6$.

(d) Можно считать, что граф связен и $E \geqslant 1$. Если степень каждой вершины не меньше 6, то $2E \geqslant 6V$. Это противоречит п. (c).

2.4.4. (b) *Идея доказательства.* Граница каждой грани состоит не менее чем из трёх рёбер. Следовательно,

• $3 \leqslant$ количества рёбер, ограничивающих первую грань;

• $3 \leqslant$ количества рёбер, ограничивающих вторую грань;

...

• $3 \leqslant$ количества рёбер, ограничивающих F-ю грань.

Просуммируем значения в колонках. Сумма значений левой колонки равна $3F$. В сумме значений из правой колонки каждое ребро посчитано не более двух раз, так как оно принадлежит двум граням. Следовательно, сумма не превосходит $2E$.

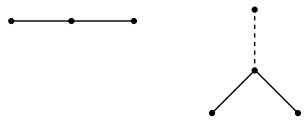

Рис. 16: К контрпримеру и его исправлению

Замечание. Это рассуждение не является строгим, ибо

• каждое из указанных неравенств неверно, например, для графа, указанного на рис. 16 слева, и

• слова «посчитано», «граница грани состоит», «количество рёбер, ограничивающих грань» не имеют строгого смысла.

Однако это рассуждение формализуется следующим методом *подсчёта двумя способами*, см. п. 1.5.

Доказательство. Поставим около каждого ребра плоского графа две стрелки в грани, примыкающие к ребру (даже если эти грани совпадают, стрелок две). Тогда число стрелок (иными словами, «гранерёбер») равно $2E$. В границе каждой грани не менее трех стрелок (этот факт мы не доказываем аккуратно). Поэтому

удалено ребро, соединяющее две из вершин x, y, z, то в мультиграфе G_a меньше рёбер, чем в G. Значит, в G_a есть тройка $a - b'$ путей.

Аналогично определяем мультиграф G_b и находим в нём тройку $a' - b$ путей. Построенные шесть путей дают тройку $a - b$ путей в G.

2.8.6. Утверждение задачи вытекает из следующего факта.

Утверждение. Вершины A и B графа назовем *эквивалентными*, если существуют такие вершины $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$, что любые две соседние вершины A_i и A_{i+1} можно соединить k путями, не имеющими общих рёбер. Любые две эквивалентные вершины можно соединить k путями, не имеющими общих рёбер.

Доказательство утверждения. Если удалить любые $k - 1$ рёбер, то для любого i вершины A_i и A_{i+1} окажутся в одной компоненте связности. Значит, вершины A_0 и A_n также окажутся в одной компоненте связности. Остается применить рёберную теорему Менгера. □

2.10.1. (a) Следует из того, что цепь и антицепь могут пересекаться не более чем по одному элементу.

2.11.1. (a) *Ответ*: такой граф существует при $(V, E) = (2k, 3k)$ для произвольного целого $k > 1$.

Рассмотрим произвольный кубический граф: каждая его вершина имеет степень 3. Сумма степеней всех вершин есть $2E$. Поэтому $3V = 2E$. Тогда пары чисел (V, E) имеют вид $(2k, 3k)$ для некоторого натурального k. Так как нет петель и кратных ребер, то $k = 1$ невозможно.

При $k > 1$ условию удовлетворяют, например, $2k$-угольник с проведенными в нем диагоналями, соединяющими i-тые и $(i + k)$-тые вершины.

(b) *Ответ*: такой граф существует при $d \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ и dn четном.

Для доказательства достаточности расположим вершины графа в вершинах правильного n-угольника. Соединим ребрами вершины, расстояние между которыми по окружности не превосходит $d/2$. Для четного d построение графа закончено. Для нечетного d число n четно, поэтому можно и нужно добавить большие диагонали.

2.11.3. (b) *Доказательство (написано А. Руховичем).* Необходимость целочисленности e вытекает из того, что e равно числу ребер в графе. Второе условие необходимо, поскольку в графе нет петель, а значит степень каждой вершины не больше суммы степеней остальных вершин.

Докажем достаточность индукцией по e. База индукции: утверждение для $e = 0$ очевидно. Докажем шаг индукции. Пусть утверждение для $e < k$. Докажем, что оно верно и для $e = k \geqslant 1$. Из $k \geqslant 1$ и условия $d_i \leqslant e$ следует, что найдутся хотя бы две вершины ненулевой степени. Можно считать, что $d_1 \geqslant d_2 \geqslant ... \geqslant d_n$. Рассмотрим набор $d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, ..., d_n$. Условия теоремы для него выполнены, поскольку сумма степеней вершин уменьшилась на 2, а степень каждой вершины понизилась не более, чем на 1. Поэтому можно воспользоваться предположением индукции: существует граф для набора $d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, ..., d_n$. В этом графе соединим ребром вершины 1 и 2. Поскольку эти вершины различны, то петель не появилось. Следовательно, новый граф не содержит петель. Ясно, что набор степеней его вершин — $d_1, d_2, d_3, ..., d_n$.

2.11.4. *Ответы:* (a,c) да. (b,d,e) нет.

2.11.7. (b) Возьмем граф, реализующий исходную последовательность. Если в нем вершина M наибольшей степени и вершина O наименьшей степени соединены ребром, то удалим это ребро. Иначе имеется ребро OX с $X \neq M$.

Пусть X не соединена с M. Тогда среди вершин, соединенных с M, есть вершина N, не соединенная с X. Добавим ребро NX и удалим ребра MN и OX.

Рассмотрите самостоятельно случай, когда X соединена с M.

2.11.9 и 2.11.10. См. п. 2.12.

2.11.11. (a,b) *Ответы:* то же, что в соответствующих пунктах задачи 2.11.3, с добавлением условия $n - 1 \leqslant e$.

Доказательство п. (b) (предложено А. Руховичем). Для доказательства необходимости обозначим через e количество ребер в графе. Необходимость условий (1), (2) и (3) (т.е. четности, условия на степень и на число ребер) легко проверяется.

Для доказательства достаточности рассмотрим граф, получен-

ный по ответу к задаче 2.11.3.b. Обозначим через c количество компонент связности этого графа.

Докажем, что если $c > 1$, то можно уменьшить количество компонент связности, не меняя степеней вершин. Из условия (3) получаем $e \geqslant n - 1 > n - c$. Поэтому хотя бы в одной компоненте связности есть цикл. Тогда можно взять ребро a_1a_2 этого цикла и ребро b_1b_2 из другой компоненты связности. Удалим эти ребра, и вместо них добавим ребра a_1b_1 и a_2b_2 (ср. с задачей 2.11.8). Тогда степени вершин сохранятся, а количество компонент связности уменьшится на 1.

Такими операциями можно понизить количество компонент связности до 1. Получится связный граф без петель с заданными степенями вершин.

4 Основы теории Рамсея

4.1 Двухцветные числа Рамсея

4.1.1. (33') Среди пяти человек может не найтись ни трёх попарно знакомых, ни трёх попарно незнакомых.

(33) Среди любых шести человек найдётся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(43) Среди любых десяти человек найдётся либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(439) Среди любых девяти человек найдётся либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(43') Среди восьми человек может не найтись ни трёх попарно знакомых, ни четверых попарно незнакомых.

(44) Среди любых 18 человек найдётся либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

(35) Среди любых 14 человек найдётся либо 5 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых.

Пара (m, n) называется *рамсеевской*, если существует целое положительное число x такое, что в любом графе с x вершинами найдётся либо m-клика, либо n-антиклика. Последнее эквивалентно тому, что для любой раскраски рёбер графа K_x в синий и красный цвета найдётся либо синяя m-клика, либо красная n-клика. Для рамсеевской пары (m, n) *числом Рамсея* $R(m, n)$ называется минимальное число x из определения рамсеевости пары (m, n).

Далее утверждение «пара (m, n) рамсеевская и $R(m, n) \leqslant a$» сокращается до «$R(m, n) \leqslant a$». Далее аналогичные более сложные понятия рамсеевости пропускаются, а проблемы с существованием более сложных чисел Рамсея разрешаются аналогично.

Например, очевидно, что $R(1, n) = 1$ и $R(2, n) = n$ для любого n. В задаче 4.1.1 доказано, что $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $R(4, 4) \leqslant 18$ и $R(3, 5) \leqslant 14$. Но не очевидно, что любая пара (m, n) рамсеевская. Это доказывается ро индукции с использованием утверждения 4.1.2.а.

4.1.2. (а) Если пары $(m - 1, n)$ и $(m, n - 1)$ рамсеевские, то пара (m, n) рамсеевская и $R(m, n) \leqslant R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$.

Это утверждение обычно коротко записывают в виде «$R(m,n) \leqslant R(m-1,n) + R(m,n-1)$». *Далее аналогичные утверждения записываются только в кратком виде.*

(b) $R(m,n) \leqslant \binom{m+n-2}{m-1}$.

(c) $R(m,n) \leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1)-1$, если числа $R(m-1,n)$ и $R(m,n-1)$ чётны.

(d) $R(5,5) \leqslant 62$.

4.1.3. (a) Если в графе с 13 вершинами нет ни треугольника, ни 5-антиклики, то степень каждой вершины равна 4.

(b) Если в графе с 18 вершинами нет ни треугольника, ни 6-антиклики, то степень каждой вершины равна 5.

(Во избежание порочного круга, при решении этой и других задач не используйте без доказательства ни равенства $R(3,6) = 18$, ни других фактов, которые не умеете доказывать.)

4.1.4. (a) $R(n,n) > (n-1)^2$. (b) $R(4,4) \geqslant 18$. (c) $R(3,5) \geqslant 14$.

4.1.5. (a) Если $\binom{r}{n} < 2^{(n^2-n-2)/2}$, то существует раскраска ребер графа K_r в два цвета, для которой нет одноцветной n-клики. (Т.е. $R(n,n) > r$.)

(b) $R(n,n) > 2^{(n-2)/2}$.

(c) Существует такая раскраска ребер графа K_r в два цвета, что число одноцветных n-клик не больше $\binom{r}{n}2^{(2+n-n^2)/2}$.

4.1.6. (a) Если $\binom{r}{n} < s2^{(n^2-n-2)/2}$, то $R(n,n) > r-s$.

(b) $R(n,n) > r - \binom{r}{n}2^{(2+n-n^2)/2} - 1$ для любого r.

(c) **Теорема Эрдеша.** $R(n,n) > n2^{(n-4)/2}$, *начиная с некоторого* n. (Более точно, теорема Эрдеша утверждает, что $R(n,n) \gtrsim n2^{n/2}/e$. Знак $\gtrsim$ определен в п. 6.1.)

4.1.7. (a) Каждый мальчик посылает каждой девочке либо стихи, либо рисунки. Если девочек и мальчиков достаточно много, то среди них найдется компания из 10 мальчиков и 10 девочек, в которой

мальчики посылают девочкам один и тот же вид творчества (т.е. либо каждый мальчик посылает каждой девочке стихи, либо каждый мальчик посылает каждой девочке рисунки).

(b) Существует такая раскраска ребер графа $K_{r,s}$ в два цвета, что число одноцветных подграфов $K_{m,n}$, в которых m вершин из первой доли и n из второй, не меньше $\binom{r}{m}\binom{s}{n}2^{1-mn}$.

4.2 Многоцветные числа Рамсея

4.2.1. (a) На плоскости отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: красным, желтым или зеленым. Тогда есть одноцветный треугольник.

(b) Придумайте 9 точек на плоскости и раскраску в 3 цвета всех соединяющих их отрезков, для которой нет одноцветного треугольника.

(c) То же, что в п. (b), для 16 точек.

Числом Рамсея $R(m_1, \ldots, m_k)$ называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что для любой раскраски рёбер графа K_x в k цветов для некоторого i найдётся m_i-клика i-ого цвета (т.е. m_i вершин, попарно соединённых рёбрами цвета i).

Например, очевидно, что $R(1, m, n) = 1$ и $R(2, m, n) = R(m, n)$ для любых m, n. В задаче 4.2.1 доказано, что $R(3, 3, 3) = 17$.

4.2.2. (a) Число $R(m_1, \ldots, m_k)$ существует для любых $m_1, \ldots, m_k$.

(b) $R(m, n, p) \leqslant R(R(m, n), p)$.

(c) $R(m_1, m_2, m_3) \leqslant$
$\leqslant R(m_1 - 1, m_2, m_3) + R(m_1, m_2 - 1, m_3) + R(m_1, m_2, m_3 - 1)$.

(d) Найдите оценку на $R(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ через полиномиальные коэффициенты.

4.2.3. Если рёбра графа K_{31} раскрашены в синий, белый и красный цвета так, что нет ни синей 4-клики, ни белой 3-клики, ни красной 3-клики, то из каждой вершины выходит 14, 15 или 16 синих рёбер.

4.2.4. Теорема. *Для любого целого $m > 0$ существует такое $M > 0$, что для любого простого числа $p > M$ сравнение $x^m + y^m \equiv z^m \pmod p$ имеет ненулевое решение.*

Это доказывается аналогично утверждению 4.2.5.b.

4.2.5. Сравнение $x^3 + y^3 \equiv z^3 \pmod p$ имеет ненулевое решение для (a) $p = 191$; (b) $p = 193$.

4.2.6. Теорема Шура. *Для любой раскраски натурального ряда в конечное число цветов найдётся одноцветное решение уравнения $x + y = z$.*

Более точно, для любого целого $k > 0$ существует такое целое $r > 0$, что для любой раскраски первых r натуральных чисел в k цветов найдётся одноцветное решение уравнения $x + y = z$.

4.2.7. (a,b,c) Найдите нижние оценки на $R(\underbrace{n, \ldots, n}_{k})$, аналогичные утверждениям 4.1.4.a, 4.1.5.b и 4.1.6.c.

4.2.8. Имеется N альпинистов, которые ходят парами в горы. Каждые два альпиниста однажды вместе посетили либо Кавказ, либо Альпы, либо Гималаи. Известно, что среди любых 20 альпинистов найдутся двое, которые вместе посетили Кавказ или Альпы, а среди любых 30 найдутся двое, которые вместе посетили Кавказ или Гималаи. Докажите, что при достаточно большом N найдется 1000 альпинистов, каждая пара из которых посетила Кавказ. [PT]

4.3 Числа Рамсея для гиперграфов

4.3.1. Среди любых четырёх из 8000 студентов имеется слаженная тройка (т. е. тройка, составляющая слаженную команду на олимпиаду по программированию). Докажите, что можно выбрать 5 студентов, любая тройка из которых является слаженной.

4.3.2. (a) Для любых 5 точек на плоскости найдутся два пересекающихся отрезка с концами в этих точках, не имеющие общих вершин.

Т.е. среди любых 5 точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 4-угольник.

(b) Найдётся 8 точек общего положения на плоскости, среди которых нет выпуклого 5-угольника.

(c) Среди любых 9 точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 5-угольник.

(d) **Теорема Эрдеша-Секереша.** *Для некоторого n среди любых n точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 10-угольник.* (Ср. с задачей 4.4.4.)

Числом Рамсея для гиперграфов $R_l(m_1, \dots, m_k)$, $m_1, \dots, m_k \geqslant l$, называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что для любой раскраски всех l-элементных подмножеств x-элементного множества в k цветов найдутся i и подмножество размера m_i, у которого все l-элементные подмножества покрашены в i-й цвет. («Число Рамсея для гиперграфов» — единый термин, определённый выше; знание термина «гиперграф» не нужно для его понимания.)

Например, очевидно, что $R_2(m_1, \dots, m_k) = R(m_1, \dots, m_k)$ и $R_3(3, n) = n$. В задаче 4.3.1 требуется доказать, что $R_3(5, 4) \leqslant 8000$. А при решении задачи 4.3.2.d требуется доказать, что $R_3(10, 10)$ или $R_4(5, 10)$ существует.

4.3.3. (a) Число $R_l(m_1, \dots, m_k)$ существует для любых $m_1, \dots, m_k$.

(b) $R_l(m, n, p) \leqslant R_l(R_l(m, n), p)$.

(c) $R_l(m, n) \leqslant R_{l-1}(R_l(m-1, n), R_l(m, n-1)) + 1$.

(d) $R_l(m, n, p) \leqslant$
$\leqslant R_{l-1}(R_l(m-1, n, p), R_l(m, n-1, p), R_l(m, n, p-1)) + 1$.

4.3.4. (a) Найдите нижнюю оценку на $R_l(n; k) := R_l(\underbrace{n, \dots, n}_{k})$, аналогичную утверждению 4.1.4.a.

(b) Если $\binom{r}{n} < 2^{\binom{n}{3}-1}$, то $R_3(n, n) = R_3(n; 2) > r$.

(c) Найдётся такое число $c > 0$, что $R_3(n, n) \geqslant 2^{cn^2}$.

(d,e) Найдите нижние оценки на $R_l(n; k)$, аналогичные утверждениям 4.1.5.b и 4.1.6.c (ср. с задачей 4.2.7).

Заметим, что $R_l(n; r^{2r} + 1) \geqslant (l-1)r^{r^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{r}}}}}$ (степенная башня высотой n). Доказательство этого факта выходит за рамки этой книги.

4.4 Результаты рамсеевского типа

4.4.1. Верно ли, что для любой раскраски точек плоскости в два цвета найдётся

(a) одноцветный равносторонний треугольник со стороной 1 или $\sqrt{3}$?

(b) одноцветный равносторонний треугольник со стороной 1?

(c) одноцветный треугольник со сторонами $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \pi$?

4.4.2. При любой раскраске точек плоскости в три цвета найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1.

4.4.3. (a) Найдётся такое n, что для любой раскраски пространства $\mathbb{R}^n$ (определение см. в §7) в 9 цветов найдётся прямоугольник с одноцветными вершинами и сторонами 1 и 2.

(b) Верно ли, что для любого параллелограмма P с неперпендикулярными сторонами найдётся такое n, что для любой раскраски точек пространства $\mathbb{R}^n$ в 4 цвета найдётся равный P параллелограмм с одноцветными вершинами?

4.4.4. Назовем *m-чашкой* (*m-шапкой*) подмножество из m точек графика выпуклой вниз (вверх) функции. Обозначим через $f(k,l)$ минимальное число n, такое что среди любых n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на прямой, есть либо k-чашка, либо l-шапка. (Не очевидно, что такое число существует. Поэтому о формулах из этой задачи справедливо замечание, аналогичное сделанному в задаче 4.1.2.a.)

(a) Среди любых $f(m,m)$ точек на плоскости найдётся выпуклый m-угольник. (Ср. с задачей 4.3.2.)

(b) $f(k,l) \leqslant f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$ при $k \geqslant 3$ или $l \geqslant 3$.

(c) $f(k,l) \leqslant \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

(d) $f(k,l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

4.4.5. (a) При любой раскраске чисел $1, \ldots, 9$ в 2 цвета найдётся одноцветная трёхчленная арифметическая прогрессия.

(b) Аналог предыдущего пункта для чисел $1, \ldots, 8$ неверен.

(c) Существует такое целое W, что при любой раскраске чисел $1, \ldots, W$ в 2 цвета найдётся либо трёхчленная арифметическая прогрессия первого цвета, либо четырёхчленная — второго.

(d) Существует такое целое W, что при любой раскраске чисел $1, \ldots, W$ в 3 цвета найдётся одноцветная трёхчленная арифметическая прогрессия.

(e) То же, что в предыдущем пункте, для r цветов.

(f)* **Теорема Ван дер Вардена.** *Для любых k, r при любой раскраске натурального ряда в r цветов найдётся одноцветная k-членная арифметическая прогрессия.* (Ср. с теоремой Шура 4.2.6.)

4.4.6. (a) Если из 5 точек на плоскости никакие 3 не лежат на одной прямой, то количество пересечений внутренностей отрезков, соединяющих данные точки, нечетно. Ср. с утверждением 4.3.2.a.

(b) Никакие 4 из данных 6 точек в пространстве не лежат в одной плоскости. Тогда найдутся два зацепленных треугольника с вершинами в данных 6 точках (т.е. два таких треугольника, не имеющих общих вершин, что объединение сторон первого пересекает второй двумерный треугольник в единственной точке.)

(c) Для любых 7 точек в четырехмерном пространстве найдутся два пересекающихся треугольника с вершинами в этих точках, не имеющие общих вершин. (Здесь под треугольником понимается выпуклая оболочка вершин.)

4.4.7. В любом турнире с 4^n вершинами найдутся вершины $A_1, \ldots, A_n$ такие, что каждое ребро A_iA_j при $i > j$ направлено от A_i к A_j.

4.4.8. При любой раскраске рёбер графа K_n в два цвета в нём найдётся гамильтонов цикл, состоящий из двух одноцветных путей (цвета путей могут быть и одинаковы, и различны).

Подробнее см. [Gr].

4.5 Числа Рамсея для подграфов

4.5.1. Для любых графов G и H существует целое положительное число x, для которого при любой раскраске рёбер графа K_x в два цвета найдётся либо подграф первого цвета, изоморфный G, либо подграф второго цвета, изоморфный H.

5 Системы множеств (гиперграфы)

5.1 Пересечения подмножеств

Когда речь идет о множестве подмножеств, употребляют синонимы «система», «семейство» или «набор» подмножеств.

5.1.1. В любом семействе попарно пересекающихся подмножеств n-элементного множества не более 2^{n-1} подмножеств.

5.1.2. Пусть $2 \leqslant t \leqslant n-2$.
(a) Постройте семейство из 2^{n-t} подмножеств n-элементного множества, любые два из которых пересекаются не менее, чем по t элементам.
(b) Существует ли такое семейство из $2^{n-t}+1$ подмножеств?

5.1.3. *Теорема Эрдеша—Ко—Радо.* Пусть $\mathcal{F}$ — любое семейство k-элементных подмножеств n-элементного множества.
(a) Если $2k \leqslant n$ и любые два подмножества из $\mathcal{F}$ пересекаются, то $|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k-1}$.
(b) Если $2k \geqslant n$ и объединение никаких двух подмножеств из $\mathcal{F}$ не есть все n-элементное множество, то $|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k}$.
(c) Если $n, k \geqslant t$, то существует $\binom{n-t}{k-t}$ подмножеств n-элементного множества, в каждом из которых ровно k элементов и любые два из которых пересекаются не менее чем по t элементам.

5.1.4. (a) Любое семейство из двадцати 5-элементных подмножеств 15-элементного множества можно так разбить на 6 подсемейств, чтобы любые два непересекающихся подмножества лежали бы в разных подсемействах.

Замечание. В таких ситуациях (см. п. 7.1) обычно вместо разбиении на подсемейства говорят о раскраске в разные цвета. Тогда вопреки наглядному представлению о раскраске красятся множества, но при этом не красятся их элементы.

(b) На кружок пришло 20 школьников. Каждой (неупорядоченной) пятерке из них нужно дать одну из 12 задач по комбинаторике.

(Задачу получает именно пятерка, а не школьник.) Как это сделать, чтобы непересекающиеся пятерки получили разные задачи?

(c) В условиях п. (b) 11 задач недостаточно.

5.1.5. Для $l < k$ обозначим через $M(n,k,l)$ минимальное количество таких k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, что любое l-элементное подмножество множества $\mathcal{R}_n$ целиком содержится хотя бы в одном из них. Например, задача 1.5.2.a утверждает, что $M(n,k,l) \geqslant \binom{n}{l}/\binom{k}{l}$.

(a) Найдите $M(n,k,1)$.

(b) Найдите $M(6k+3,3,2)$.

(c)* Найдите $M(n,3,2)$.

(d) Докажите, что $M(n,k,l) \geqslant nM(n-1,k-1,l-1)/k$.

5.1.6. Существует k подмножеств R-элементного множества по n элементов в каждом, никакие два из которых имеют не более s общих элементов, для

(a) $k = 2^a = R$, $n = 2^{a-1}$, $s = 2^{a-2}$;

(b) $k = 60$, $R = 1600$, $n = 80$, $s = 4$;

(c) p простое, $k = p^2 + p$, $R = ps^2$, $n = ps$.

Ср. с п. 5.7 и 7.1.

5.2 Системы общих представителей

5.2.1. В группе студентов Яндекса 20 человек. Из них ровно 5 человек — специалисты по поиску в интернете, 5 — по борьбе со спамом и т.д., всего 18 проблем (так что, очевидно, некоторые студенты являются специалистами по разным проблемам). Требуется составить из этих студентов сильную команду разработчиков. При этом хочется, чтобы для каждой проблемы в команде нашелся специалист по ней и чтобы размер команды был как можно меньше (для экономии зарплаты).

(a) При любом раскладе получится набрать такую команду из семи человек.

(b) При некотором раскладе не получится набрать такую команду из пяти человек.

Системой общих представителей (сокращённо с.о.п.) для набора $\mathcal{M}$ множеств называется такое множество A, что $M \cap A \neq \varnothing$ для любого $M \in \mathcal{M}$.

5.2.2. Для набора $\{\{1,6\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\}\}$ множеств найдите

(a) некоторую с.о.п.; (b) с.о.п. наименьшего размера.

5.2.3. (a) Найдите наименьший размер с.о.п. для набора всех k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$.

(b) Сколько для него имеется с.о.п. наименьшего размера?

Минимальная с.о.п. — с.о.п. наименьшего размера для данного набора $\mathcal{M}$. Назовем (n,s,k)-*набором* элемент из $\binom{\binom{\mathcal{R}_n}{k}}{s}$, т.е. набор k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, в котором s множеств. (Этот термин не общепринят.)

5.2.4. (a) Для любых $k < n$ постройте $(2n, 2\binom{n-1}{k-1}, k)$-набор, для которой минимальная с.о.п. состоит из двух элементов и единственна.

(b) При данных n, k найдите наибольшее s, для которого найдётся (n,s,k)-набор, имеющий ровно две минимальные с.о.п.

5.2.5. *Жадным алгоритмом* называется следующий. Возьмем любой элемент, лежащий в максимальном количестве множеств данного набора. Добавим его в «пред-с.о.п» и выкинем множества, которые его содержат. Аналогично возьмем элемент, лежащий в максимальном количестве оставшихся множеств, и т.д.

Постройте набор множеств, наименьший размер с.о.п. которого на k меньше размера любой из с.о.п., которые могут быть получены жадным алгоритмом, если (a) $k = 1$; (b) $k = 2$; (c) k произвольно.

5.2.6. * (a) Для любого (n,s,k)-набора найдется с.о.п. размера меньше

$$G(n,s,k) := \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right\} + \frac{n}{k} + 1.$$

(b) Если $n \geqslant 32k$ и $60 \leqslant \dfrac{sk}{n} < e^k$, то найдется (n, s, k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше $\dfrac{n}{64k} \ln \dfrac{sk}{n}$.

(c) Если

$$k \leqslant n - l \quad \text{и} \quad G\left(\binom{n}{k}, \binom{n}{l}, \binom{n-l}{k}\right) \leqslant s,$$

то найдется (n, s, k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше l.

(d) Для всех достаточно больших k, l если $n^2 > k^2 l$ и $n^2 > kl^2$, то $n > k + l$ и $\binom{n}{k} / \binom{n-l}{k} < e^{\frac{kl}{n}+6}$.

(d') Имеем $\binom{n}{l} < (en/l)^l$.

(e) Для всех достаточно больших n и k если $101 \ln \ln k < \ln \frac{sk}{n} < \sqrt{k} < \sqrt[4]{n}$, то найдется (n, s, k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше $0,99 \dfrac{n}{k} \ln \dfrac{sk}{n}$.

(f) Если

$$l \leqslant n - k \quad \text{и} \quad \binom{n}{l} \binom{\binom{n}{k} - \binom{n-l}{k}}{s} < \binom{\binom{n}{k}}{s},$$

то найдется (n, s, k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше l.

5.3 Системы различных представителей

5.3.1. (a) *Лемма о паросочетаниях.* Пусть есть несколько (конечное число) юношей и девушек. Каждый юноша любит некоторое (вполне возможно, нулевое) число девушек. Тогда всех юношей можно женить на любимых ими девушках (так, чтобы брачные пары не пересекались) тогда и только тогда, когда для любого множества юношей число девушек, которых любит хотя бы один из них, не меньше числа этих юношей.

(b) *Теорема Холла.* Пусть $S_1, \ldots, S_m$ — конечные множества. В каждом из них можно выбрать по элементу $x_i \in S_i$ так, чтобы все x_i были различны, тогда и только тогда, когда для каждого $k \in \{1, \ldots, m\}$ объединение любых k из этих множеств имеет не менее k элементов.

5.3.2. Какое минимальное количество рёбер можно удалить из графа $K_{n,n}$, чтобы не осталось паросочетаний (т. е. подграфа из n непересекающихся отрезков)?

Системой различных представителей (сокращенно с.р.п.) упорядоченного набора $(S_1, \ldots, S_m)$ множеств называется упорядоченный набор $(x_1, \ldots, x_m)$ их различных элементов, для которого $x_j \in S_j$ при любом $j = 1, \ldots, m$.

(Упорядоченность набора важна, чтобы правильно определить с.р.п. набора множеств, некоторые из которых совпадают, а также для подсчёта количества с.р.п. в задаче 5.3.5.)

Например, теорема Холла утверждает, что у набора $(S_1, \ldots, S_m)$ конечных множеств есть система различных представителей тогда и только тогда, когда $|\cup_{i\in I} S_i| \geqslant |I|$ для любого $I \subset \{1, \ldots, m\}$.

5.3.3. Пусть для системы m-элементных множеств каждый элемент, входящий хотя бы в одно из них, входит ровно в l из них. Тогда при $m \geqslant l$ у этой системы множеств есть с.р.п.

5.3.4. С.р.п. поднабора можно дополнить до с.р.п. всего набора. Вот более подробная формулировка. Из набора $\mathcal{M}$ множеств выбрано несколько подмножеств $S_1, \ldots, S_k$. Допустим, что $(x_1, \ldots, x_k)$ — это с.р.п. набора $(S_1, \ldots, S_k)$. Если у всего набора $\mathcal{M}$ есть с.р.п., то существует его с.р.п., «содержащая» элементы $x_1, \ldots, x_k$ (не обязательно на первых k местах).

5.3.5. Обозначим через $F(S_1, \ldots, S_m)$ количество с.р.п. у системы $\{S_1, \ldots, S_m\}$. (a) Для любого ли k существует система $S_1, \ldots, S_m$ такая, что $F(S_1, \ldots, S_m) = k$?

(b) Найдите все возможные значения $F(S_1, S_2)$ при условии $|S_1| = |S_2| = 5$.

(c)* Найдите все возможные значения $F(S_1, S_2, S_3)$ при условии $|S_1| = |S_2| = |S_3| = 5$.

5.3.6. Пусть даны два разбиения множества S на m подмножеств: $S = \bigsqcup_{i=1}^m A_i = \bigsqcup_{i=1}^m B_i$, $m \leqslant |S|$. Пусть выполнено одно из следующих условий.

(a) Для любого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$ множество $A_{i_1} \sqcup \ldots \sqcup A_{i_k}$ содержит не более k из множеств $B_1, \ldots, B_m$.

(b) $|A_1| = \ldots = |A_m| = |B_1| = \ldots = |B_m|$.

Тогда можно перенумеровать множества $A_1, \ldots, A_m$ так, чтобы после перенумерации $A_i \cap B_i \neq \varnothing$ для любого $i = 1, \ldots, m$.

5.3.7.* Пусть даны два разбиения множества S на m подмножеств: $S = \bigsqcup_{i=1}^m A_i = \bigsqcup_{i=1}^m B_i$, $m \leqslant |S|$. Пусть для любых подмножеств $I, J \subset \{1, \ldots, m\}$ выполнено неравенство:

$$\left| \left(\bigsqcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigsqcup_{j \in J} B_j \right) \right| \geqslant |I| + |J| - m.$$

Тогда можно перенумеровать множества $A_1, \ldots, A_m$ так, чтобы после перенумерации нашлись попарно различные элементы $x_i \in A_i \cap B_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Такой набор $x_1, \ldots, x_m$ называются *общей системой различных представителей* наборов множеств $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_m$.

5.3.8. (a) При каком условии на любовь юношей и девушек можно распределить всех девушек по непересекающимся гаремам, в каждом из которых ровно по две жены?

Или, формально, найдите необходимое и достаточное условие на двудольный граф, при котором вершины можно занумеровать $A_1, \ldots, A_n$ (в первой доле) и $B_1, C_1, \ldots, B_n, C_n$ (во второй доле) так, что есть рёбра $A_1B_1, A_1C_1, \ldots, A_nB_n, A_nC_n$.

(b) Пусть есть m юношей и несколько девушек, каждый юноша любит не менее t девушек, причем всех юношей можно женить на любимых ими девушках (так, чтобы брачные пары не пересекались), т. е. есть паросочетание. Тогда имеется не менее

$$\begin{cases} t!, & t \leqslant m \\ t!/(t-m)!, & t > m \end{cases}$$

способов переженить юношей на любимых ими девушках.

5.4 Перманент

Перманент квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ определяется формулой

$$\mathrm{Per}(A) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

где Σ_n есть множество всех перестановок n-элементного множества.

5.4.1. Найдите перманент матрицы

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

(k) 4×4, у которой $k = 0, 1, 2, 3, 4$ диагональных элементов — нули, а все остальные (в т.ч. не диагональные) элементы — единицы;

(n) $n \times n$, у которой на диагонали нули, а вне диагонали — единицы.

Подматрицей данной матрицы называется матрица, полученная из данной вычеркиванием некоторого количества строк и столбцов. *Перманент* прямоугольной матрицы A определяется как сумма перманентов всех квадратных подматриц максимального размера. Или, формулой, при $m < n$

$$\mathrm{Per}(A) := \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{m} a_{i,\sigma(i)},$$

где сумма берётся по всем m-элементным размещениям чисел от 1 до n. При $m > n$ положим $\mathrm{Per}(A) := \mathrm{Per}(A^T)$.

5.4.2. Найдите перманент матрицы $m \times n$, состоящей из одних единиц.

5.4.3. (a) Перманент не меняется при перестановке строк.

(b) *Формула разложения по строке.* Если $m \leqslant n$, то для любого i

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{Per}(A_{ij}),$$

где A_{ij} — матрица, получаемая из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

5.4.4. (a) Перманент матрицы $n \times n$ из нулей и единиц равен нулю тогда и только тогда, когда есть нулевая подматрица $s \times t$, где $s+t = n+1$.

(b) Для любых $m \leqslant n$ перманент прямоугольной матрицы $m \times n$ из нулей и единиц равен количеству с.р.п. (§5.3) для системы из m подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$, определяемых строками.

5.5 Размерность Вапника-Червоненкиса

5.5.1. (a) Математики Вася и Чарли играют. Сначала Чарли отмечает на плоскости k точек. Затем Вася красит некоторые из этих точек. Если теперь Чарли сможет провести прямую, отделяющую покрашенные точки от непокрашенных, то он выиграл, иначе — проиграл. При каком наибольшем k Чарли может выиграть независимо от действий Васи?

(b) То же, но точки отмечаются в пространстве, и Чарли проводит полуплоскость.

Пусть $\mathcal{R} \subset 2^X$ — семейство подмножеств произвольного множества X. *Размерностью Вапника-Червоненкиса* $VC(X, \mathcal{R})$ (или VC-размерностью) пары $(X, \mathcal{R})$ называется максимальное n такое, что существует n-элементное подмножество $A \subset X$, для которого любое подмножество в A является пересечением A и некоторого подмножества, лежащего в $\mathcal{R}$. Такое подмножество A называется *дробящимся* системой $\mathcal{R}$. Если такого n не существует, то полагают $VC(X, \mathcal{R}) := \infty$.

Естественные примеры, в том числе пример с бесконечностью, приведены в следующих задачах.

5.5.2. (a) Найдите VC-размерность семейства всех (двумерных замкнутых) прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат.

(b) *Теорема.* VC-размерность семейства всех полупространств в $\mathbb{R}^n$ равна $n+1$.

(c) *Теорема Радона.* Любые $n+2$ точки в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

5.5.3. Найдите VC-размерность следующих семейств множеств:

(a) $\{\{1, \ldots, k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
(b) $\{\{k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
(c) $\{\{k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
(d) $\{\{k,\ k^2,\ k^3,\ \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$.

5.5.4. Найдите VC-размерность следующих конечных семейств:

(a) $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{1,2,4\}$ $\{1,2,5\}$, $\{2,3,6\}$, $\{3,4,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{2,4,5,6\}$;

(b) $\{1,2,3\}$, $\{3,4,5\}$, $\{1,2,4\}$ $\{1,2,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,6,7\}$, $\{3,4,6,7\}$;

(c) $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8,9\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$, $\{1,6,9\}$;

(d) Можно ли добавить ещё одно множество к системам из предыдущих пунктов так, чтобы VC-размерность увеличилась на 1?

5.5.5. (a) Возможно ли равенство $VC(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) = \infty$ для некоторого набора $\mathcal{R} \subset 2^{\mathbb{R}^2}$?

(b) То же для некоторого счётного набора $\mathcal{R} \subset 2^{\mathbb{R}^2}$ ограниченных множеств.

5.5.6. В любом семействе VC-размерности d, в каждом множестве которого не более r элементов, найдутся такие подмножества X и Y, что

(a) $|X \cap Y| \leqslant r - d$; (b) $|X \cap Y| \geqslant d - 1$.

5.5.7. Если $\mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ и $|\mathcal{R}| = n$, то для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ найдётся такое множество A, что $|\{R \cap A \mid R \in \mathcal{R}\}| \geqslant k = |A| + 1$.

5.5.8. Если $\mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ — семейство VC-размерности d, то существует *наследственное* (т. е. содержащее с каждым множеством все его подмножества) семейство $\mathcal{R}' \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ VC-размерности d, для которого

(a) $|\mathcal{R}'| \leqslant |\mathcal{R}|$; (b) $|\mathcal{R}'| \geqslant |\mathcal{R}|$.

5.5.9. Если $\mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{R}_n}$, то

$$|\mathcal{R}| \leqslant \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{VC(\mathcal{R}_n, \mathcal{R})}.$$

5.7 Лемма Виссера и теоремы о возвращении

5.7.1. В парламенте из 100 000 депутатов образовано k комиссий по 2 000 человек в каждой.

(a) Если $k \geqslant 100$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 21 общего члена.

(b) Если $k \geqslant 5\,000$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 29 общих членов.

(c) Если $k \geqslant 250\,000$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 32 общих члена.

(d) Если $k \geqslant 2 \cdot 50^{30}$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 40 общих членов.

Подмножество отрезка $[0,1]$ называется *хорошим*, если оно является объединением конечного количества попарно непересекающихся интервалов. *Длиной* $|E|$ хорошего множества E называется сумма длин его интервалов.

5.7.2. (a) Пересечение и объединение хороших множеств — хорошее множество.

(b) Если $E_1, \ldots, E_k$ — попарно непересекающиеся хорошие множества длины $1/k$ каждое и E_0 — хорошее множество длины $1/k$, то $|E_0 \cap E_j| \geqslant 1/k^2$ для некоторого $j \geqslant 1$.

(c) Придумайте пример бесконечного семейства хороших множеств длины $1/2$ каждое, длина пересечения любых двух из которых не превосходит $1/4$.

(d) То же для длины $1/k$ и длины пересечения не более $1/k^2$.

5.7.3. Дана бесконечная последовательность хороших подмножеств отрезка $[0,1]$ длины m каждое.

(a) Длина пересечения некоторых двух из них не меньше $m^2/2$.

(b) *Лемма Виссера.* То же для $0,99m^2$.

(Задача 5.7.2 поясняет роль множителя m^2 и то, что заменить $0,99$ на 1 нельзя.)

(c)* Для любого r при предположениях п. (a) найдутся r множеств с длиной пересечения более $0,99m^r$.

5.7.4. (a) Если $r > 1$ целое и $E_1, \ldots, E_N \subset [n] := \{1, \ldots, n\}$, то

$$n^{r-1} \sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{N} |E_{j_1} \cap \ldots \cap E_{j_r}| \geqslant \left(\sum_{j=1}^{N} |E_j| \right)^r .$$

(b) Если $r > 1$ целое и множества $E_1, \ldots, E_N \subset [0,1]$ хорошие, то

$$\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{N} |E_{j_1} \cap \ldots \cap E_{j_r}| \geqslant \left(\sum_{j=1}^{N} |E_j| \right)^r .$$

Пусть заданы числа $0 = \alpha_0 < \ldots < \alpha_{k-1} < \alpha_k = 1$. *Перекладыванием отрезков* называется отображение $f\colon [0,1) \to [0,1)$, определенное некоторой перестановкой отрезков $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$. Более аккуратно, возьмем перестановку $\sigma : [k] \to [k]$. Для любых $j \leqslant k$ и $x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ определим $f(x) := x - \alpha_{j-1} + \sum\limits_{i \in [k]\ :\ \sigma(i) < \sigma(j)} (\alpha_i - \alpha_{i-1})$.

Через f^n обозначим n-ю итерацию отображения $f\colon [0,1) \to [0,1)$: $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n раз).

5.7.5. (a) (Загадка) Найдите n-ю итерацию нетривиального перекладывания двух отрезков, если дано α_1.

(b) Если длины всех отрезков рациональны, то некоторая итерация перекладывания отрезков — тождественное отображение.

(c) Придумайте перекладывание отрезков, один из которых имеет иррациональную длину, причем квадрат перекладывания — тождественное отображение.

(d) Придумайте перекладывание отрезков, никакая итерация которого не является тождественным отображением.

5.7.6. Пусть $E \subset [0,1)$ — хорошее непустое множество и f — перекладывание отрезков.

(a) Множество $f(E)$ хорошее.

(b) *Теорема Пуанкаре-Каратеодори о возвращении множеств.* Существует сколь угодно большое n, для которого $|E \cap f^n(E)| > 0$.

(c) *Теорема Хинчина о возвращении множеств.* Существует сколь угодно большое n, для которого $|E \cap f^n(E)| \geqslant 0,99|E|^2$.

(d) Число n из п. (b,c) найдется на любом достаточно большом интервале (т.е. существует такое L, что для любого целого M число n из п. (b,c) найдется среди чисел $M, M+1, \ldots, M+L$).

(e) *Теорема о многократном возвращении.* При любом целом $r > 0$ существуют сколь угодно большие $n_1, \ldots, n_r$, для которых $|f^{n_1}(E) \cap f^{n_2}(E) \cap \ldots \cap f^{n_r}(E)| > 0$.

(f) *Теорема о многократном возвращении.* При любом целом $r > 0$ существуют сколь угодно большие $n_1, \ldots, n_r$, для которых $|f^{n_1}(E) \cap f^{n_2}(E) \cap \ldots \cap f^{n_r}(E)| \geqslant 0,99|E|^r$.

5.7.7. Назовем *хорошим* объединение конечного количества многоугольников (лежащих на одной плоскости) без границы с непересекающимися внутренностями. Сформулируйте и докажите аналоги

(a) теоремы Пуанкаре-Каратеодори; (b) теоремы Хинчина

для взаимно-однозначного отображения единичного квадрата в себя, сохраняющего хорошие подмножества и их площади.

Ср. с п. 5.1 и 7.1.

5.8 Структуры на конечном множестве

Ранее рассмотрены некоторые классические комбинаторные задачи 1.1.1, 1.1.2, 1.1.4, 1.4.3.b, 1.4.4, 1.4.5, 1.4.6, 1.4.7.efg. В этом пункте мы поясним связь между различными объектами, возникающими в этих задачах.

Алгеброй на множестве $[n]$ называется семейство его подмножеств, которое вместе с любыми подмножествами A и B содержит также их объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и дополнение $\overline{A} := [n] - A$.

Например, $2^{[n]}$ — алгебра на $[n]$, а $\{\varnothing, [3]\}$ и $\{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, [3]\}$ — алгебры на $[3]$.

5.8.1. (a) Найдите все алгебры на $[n]$ для $n = 1, 2, 3$.

(b) Количество элементов произвольной алгебры есть степень двойки.

(c) Количество алгебр на $[n]$ равно количеству разбиений множества $[n]$. (*Разбиением* (неупорядоченным) множества $[n]$ называется

неупорядоченный набор $\{X_1, X_2, \dots X_k\}$ подмножеств $X_i \subset [n]$, для которого $[n] = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$ при любых $i \neq j$.)

(d) (Загадка) Найдите рекуррентную формулу для числа $N_A(n)$ всех алгебр на $[n]$ (*числа Белла*).

Базисом алгебры называется наименьшее (по включению) её подсемейство $\{X_1, \dots, X_k\}$ такое, что любой элемент алгебры можно выразить через $X_1 \dots X_k$ с помощью операций пересечения, объединения и дополнения. Задача 1.4.2.a равносильна нахождению наименьшего числа множеств в базисе алгебры $2^{[n]}$.

5.8.2. Существует алгебра и два ее базиса, в которых разное число множеств.

Линейным пространством на множестве $[n]$ называется семейство его подмножеств, которое вместе с любыми подмножествами A и B содержит также их симметрическую разность $A \oplus B$. Например, любая алгебра является линейным пространством;

$$\{\varnothing\}, \quad \{\varnothing, [2]\}, \quad \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, [2]\} \quad \text{и} \quad \{\varnothing, \{1,3\}, \{2,3\}, [2]\}$$

— линейные пространства на [3]. Определение *базиса* линейного пространства аналогично случаю алгебр. Линейные пространства изучаются в задачах 1.4.4, 1.4.6, 1.4.7.efg и 1.4.8 (на другом языке).

Топологией на множестве $[n]$ называется семейство его подмножеств, которое содержит $\varnothing$, $[n]$ и вместе с любыми подмножествами A и B содержит также $A \cap B$, $A \cup B$. Например, любая алгебра является топологией;

$$\{\varnothing, \{1\}, [3]\} \quad \text{и} \quad \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, [3]\}$$

— топологии на [3].

5.8.3. (a) Найдите все топологии на $[n]$ для $n = 1, 2, 3$.

(b) Любая ли топология является линейным пространством? Можно ли симметрическую разность выразить через пересечение и объединение?

Решение задачи 5.8.3.a показывает, что существует топология, число подмножеств в которой не является степенью двойки. Найти количество топологий на $[n]$ — нерешенная задача.

Определение *базиса* топологии аналогично случаю алгебр.

5.8.4. (a) Существует топология и два ее базиса, в которых разное число множеств.

(b) Найдите наименьшее число множеств в базисе топологии $2^{[n]}$.

(c) Для каждого n найдите наибольший (по все топологиям на $[n]$) минимальный размер базиса топологии.

5.8.5. *Цепью топологий* называется последовательность различных топологий

$$\{\varnothing, [n]\} = T_0 \subset T_1 \subset T_2 \ldots \subset T_k = 2^{[n]},$$

между любыми двумя соседними членами которой нельзя вставить ещё одну топологию (т.е. для любого i не существует топологии T, для которой $T_i \subsetneq T \subsetneq T_{i+1}$). Аналогично определяются *цепи* алгебр и линейных пространств.

(a) Все цепи алгебр (линейных пространств) на $[n]$ имеют одинаковую длину (какую?).

(b) Приведите пример цепей топологий различной длины.

(c)* Найдите наибольшую длину цепи топологий на $[n]$.

(d) Найдите наименьшую длину цепи топологий на $[n]$.

5.8.6. (a) Найдите максимальное количество линейных пространств на $[n]$, ни одно из которых не содержится (собственно) в другом.

(Это число называется *шириной* $W_L(n)$ семейства всех линейных пространств на $[n]$.)

(b)* $W_L(2n) \sim C \cdot 2^{n^2}$ для некоторого числа C.

(c) Найдите максимальное количество алгебр на $[n]$, ни одна из которых не содержится в другой.

По-видимому, найти максимальное количество топологий на $[n]$, ни одна из которых не содержится в другой — нерешенная задача.

Нарисуем все алгебры («на $[n]$» — эти слова мы дальше опускаем). Проведем стрелку от алгебры A к алгебре B, если $A \subsetneq B$ и между ними нельзя вставить никакую другую алгебру. Полученный граф называют *решёткой алгебр*.

Разбиение $H = H_0 \sqcup H_1 \sqcup \ldots \sqcup H_m$ множества всех алгебр называется *разбиением на этажи*, если для любых двух соединенных

В решении пунктов (d,e) пропускаются слова «для всех достаточно больших k, n».

(d) Имеем

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-l}{k}} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{k!}{(n-l)(n-l-1)\dots(n-l-k+1)} =$$

$$= \frac{n}{n-l} \cdot \frac{n-1}{n-l-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n-l-k+1} =$$

$$= \left(\left(1-\frac{l}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{l}{n-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{l}{n-k+1}\right)\right)^{-1} <$$

$$< \left(1-\frac{l}{n-k}\right)^{-k} \overset{(5)}{<} \exp\left(\frac{kl}{n-k} + k\left(\frac{l}{n-k}\right)^2\right) \overset{(6)}{<}$$

$$\overset{(6)}{<} \exp\left(\frac{kl}{n} + 2\frac{k^2 l}{n^2} + 4\frac{kl^2}{n^2}\right) \overset{(7)}{<} \exp\left(\frac{kl}{n} + 6\right), \quad \text{где}$$

• неравенство (5) справедливо, поскольку $\frac{l}{n-k} < \frac{2l}{n} < \frac{2}{\sqrt{k}}$ и $(1-x)^{-1} < e^{x+x^2}$ для малых $x > 0$;

• неравенство (6) справедливо, поскольку $k < n/2$, значит

$$\frac{1}{n-k} < \frac{n+2k}{n^2} = \frac{1}{n} + 2\frac{k}{n^2} < \frac{2}{n};$$

• неравенство (7) справедливо, поскольку $k^2 l < n^2$ и $kl^2 < n^2$.

(e) Обозначим

$$l := [0.99\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}] \leqslant 0.99\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n} < \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n} < \frac{n}{k}\sqrt{k} = \frac{n}{\sqrt{k}}.$$

Имеем $k + l < \sqrt{n} + \dfrac{n}{\sqrt{k}} < n$ для $k > 1$. Поэтому

$$\frac{\binom{n}{l}\binom{n-l}{k}}{\binom{n}{k}} = \binom{n-k}{l} > n-k > n-\sqrt{n} > e^2.$$

Значит,

$$G\left(\binom{n}{k}, \binom{n}{l}, \binom{n-l}{k}\right) < 2\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-l}{k}} \ln\frac{\binom{n}{l}\binom{n-l}{k}}{\binom{n}{k}} \overset{(2)}{<} 2\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-l}{k}} l \ln k \overset{(3)}{<}$$

$$\overset{(3)}{<} 4e^{\frac{kl}{n}+6} l \ln k \overset{(4)}{<} 4e^6 \left(\frac{sk}{n}\right)^{0.99} \frac{n \ln k}{k} \ln \frac{sk}{n} \overset{(5)}{<} 4e^6 s \left(\frac{sk}{n}\right)^{\frac{1}{101}-\frac{1}{100}} \ln \frac{sk}{n} \overset{(6)}{<} s.$$

Здесь

• неравенство (2) выполнено ввиду

$$\frac{\binom{n}{l}\binom{n-l}{k}}{\binom{n}{k}} < \binom{n}{l} < \frac{n^l}{l!} \overset{(*)}{<} \left(\frac{en}{l}\right)^l \overset{(**)}{<} k^l.$$

Здесь неравенства (*) и (**) выполнены по утверждению 6.1.6.b и ввиду

$$\frac{l}{n} > \frac{1}{2k} \ln \frac{sk}{n} > \frac{101 \ln \ln k}{2k} > \frac{e}{k} \quad \text{для} \quad k \geqslant e^{e^{2e/101}},$$

соответственно;

• неравенство (3) выполнено ввиду п. (d), который применим, поскольку $k^2 l < k^{3/2} n < n^2$ и $kl^2 < n^2$;

• неравенство (4) выполнено по определению числа l;

• неравенство (5) выполнено ввиду $101 \ln \ln k < \ln \dfrac{sk}{n}$, откуда $(\ln k)^{101} < \dfrac{sk}{n}$;

• неравенство (6) выполнено для всех достаточно больших k ввиду $\lim_{x\to\infty} x^{-1/100\cdot 101} \ln x = 0$ и $\dfrac{sk}{n} > (\ln k)^{101}$.

Значит, по п. (c) найдется (n, s, k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше l. Ср. [R13, §4.6].

5.3.1. (b) Индукция по m. База очевидна. Предположим, что для всех систем с меньшим количеством элементов утверждение верно.

Пусть найдётся такое множество $I \subsetneq \mathcal{R}_m$, что $|\cup_{i\in I} S_i| = |I|$. Применим предположение индукции для $S_I := \{S_i \mid i \in I\}$. Далее, пересечения множеств из $S_{\mathcal{R}_m \setminus I}$ со множеством $(\cup_{i=1}^m S_i) \setminus (\cup_{i\in I} S_i)$ «непокрытых» элементов образуют систему, для которой выполнено условие леммы Холла. Значит, можно применить предположение индукции.

Если же такого множества I не найдётся, возьмём произвольный элемент x произвольного множества S_k. Дополнения оставшихся

5.7.1. (a) Пусть любые две комиссии имеют не более 20 общих членов. Дадим по конфете каждому участнику первой комиссии. Конфеты получат 2000 человек. Дадим по конфете каждому участнику второй, но не первой, комиссии. Конфеты получат не менее 1980 человек. Дадим по конфете каждому участнику третьей, но не первой и не второй, комиссий. Конфеты получат не менее 1960 человек. И так далее. Каждый парламентарий получит не более одной конфеты. В итоге количество парламентариев не меньше количества конфет, т.е. числа $100\cdot 2000-(100\cdot 99/2)\cdot 20 = 101\,000 > 100\,000$. Противоречие.

Это же решение можно изложить так. Пусть любые две комиссии имеют не более 20 общих членов. Тогда число всех парламентариев не меньше $100\cdot 2000-(100\cdot 99/2)\cdot 20 = 101\,000 > 100\,000$ (это неравенство Бонферрони 1.2.3.c, т.е. версия формулы включений-исключений). Полученное противоречие доказывает нужное утверждение.

(b) Примените рассуждение из п. (a) к декартову квадрату парламента, т.е. парламентом будет множество пар депутатов, а комиссиями множество пар депутатов из одной комиссии.

(c) То же для декартова куба.

(d) Найдите N такое, что $\dfrac{40}{\sqrt[N]{2}} > 39$.

Идея другого решения: использовать версию теоремы Ковари-Шош-Турана 2.7.2.d для $s = 2$ и двудольного графа, в одной доле которого — парламентарии, а в другой — комиссии. Оно дает сильную оценку 40 даже для $k = 5000$.

Ср. [VS97].

5.7.2. (b) В противном случае

$$1 \geqslant |E_0\cup E_1\cup\ldots\cup E_k| \geqslant \sum_{j=0}^{k}|E_j| - \sum_{0\leqslant i<j\leqslant k}|E_i\cap E_j| > 1+\frac{1}{k}-\frac{k}{k^2} = 1.$$

Противоречие.

(c) В j-е множество запишем все числа, в двоичной записи которых на j-м место стоит 0.

5.7.3. Аналогично задаче 5.7.1.

(c) *Другое доказательство.* Возьмем достаточно большое целое N. Докажем, что r требуемых множеств можно выбрать среди произвольных N из данных подмножеств: $E_1, E_2, \ldots, E_N$. Предположим противное. Тогда по утверждению 5.7.4.b

$$N^r m^r = (|E_1|+\ldots+|E_N|)^r \leqslant \sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{N} |E_{j_1}\cap\ldots\cap E_{j_r}| \leqslant 0.99m^r A+(N^r-A).$$

Здесь $A = A_N^r := N(N-1)\ldots(N-r+1)$ и последнее неравенство получается разбиением суммы на две: по наборам r попарно различных чисел и по остальным наборам. Последнее выражение — многочлен от N степени r со старшим коэффициентом $0.99m^r$. Поэтому при достаточно большом N он меньше, чем $N^r m^r$. Противоречие.

5.7.4. (a) *Краткое доказательство.* Рассмотрим разбиение множества $[n]$ подмножествами E_j и их дополнениями. Множества этого разбиения соответствуют подмножествам множества $[N]$. Обозначим через μ_A количество элементов в множестве разбиения, соответствующем A.

Каждой паре (A, j) из подмножества $A \subset [N]$ и числа $j \in [N]$ поставим в соответствие 0, если $j \notin A$, и μ_A, если $j \in A$. Посчитаем двумя способами сумму S полученных $2^N \cdot N$ чисел. Получим

$$\sum_{j=1}^{N} |E_j| = S = \sum_{A\subset[N]} |A|\mu_A.$$

Каждой паре $(A, (j_1, \ldots, j_r))$ из подмножества $A \subset [N]$ и вектора $(j_1, \ldots, j_r) \in [N]^r$ поставим в соответствие 0, если $\{j_1, \ldots, j_r\} \not\subset A$, и μ_A, если $\{j_1, \ldots, j_r\} \subset A$. Посчитаем двумя способами сумму S_r полученных $2^N \cdot N^r$ чисел. Получим

$$\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{N} |E_{j_1} \cap \ldots \cap E_{j_r}| = S_r = \sum_{A\subset[N]} |A|^r \mu_A.$$

Значит, по весовому неравенству о средних степенных ввиду $\sum_{A\subset[m]} \mu_A = n$

$$S_r \geqslant n^{1-r} \left(\sum_{A\subset[N]} |A|\mu_A \right)^r = n^{1-r} \left(\sum_{j=1}^{N} |E_j| \right)^r.$$

Доказательство с деталями. Для элемента $j \in [N]$ и подмножества $A \subset [N]$ обозначим

$$(j \in A) = \begin{cases} 1 & j \in A \\ 0 & j \notin A \end{cases} \quad \text{и} \quad \mu_A := \left| \left(\bigcap_{k \in A} E_k \right) \cap \left(\bigcap_{k \in [N]-A} \overline{E}_k \right) \right|.$$

Тогда

$$|A| = \sum_{j=1}^{N} (j \in A) \quad \text{и} \quad |E_j| = \sum_{A \subset N} (j \in A) \mu_A.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{N} |E_j| = \sum_{j=1}^{N} \sum_{A \subset N} (j \in A) \mu_A = \sum_{A \subset N} \sum_{j=1}^{N} (j \in A) \mu_A = \sum_{A \subset N} |A| \mu_A.$$

Так как $\sum_{A \subset N} \mu_A = n$, то по весовому неравенству о средних степенных

$$n^{1-r} \left(\sum_{A \subset N} |A| \mu_A \right)^r \leqslant \sum_{A \subset N} |A|^r \mu_A = \sum_{A \subset N} \mu_A \left(\sum_{j=1}^{N} (j \in A) \right)^r =$$

$$= \sum_{A \subset N} \mu_A \sum_{j_1, \ldots, j_r = 1}^{N} (j_1 \in A) \cdot \ldots \cdot (j_r \in A) =$$

$$= \sum_{j_1, \ldots, j_r = 1}^{N} \sum_{A \subset N} (j_1 \in A) \cdot \ldots \cdot (j_r \in A) \mu_A = \sum_{j_1, \ldots, j_r = 1}^{N} |E_{j_1} \cap \ldots \cap E_{j_r}|.$$

(b) Аналогично п. (a).

Другая запись вышеприведенного доказательства для п. (b). Определим функцию $I_j : [0,1] \to \mathbb{R}$ формулой

$$I_j(x) = \begin{cases} 1 & x \in E_j \\ 0 & x \notin E_j \end{cases}.$$

Тогда нужное неравенство получается применением к $f(x) := I_1(x) + \ldots + I_N(x)$ следующего весового неравенства о средних степенных:

$$\int_0^1 f^r(x) dx \geqslant \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^r.$$

(Для нужных нам кусочно-постоянных функций f это неравенство можно переписать со знаком суммы вместо интеграла, см. выше.)

5.7.6. Перекладывание отрезков сохраняет хорошие подмножества и их длины.

Перекладывание отрезков является взаимно-однозначным соответствием. Итерация f^n с $n < 0$ определена для взаимно-однозначных соответствий f: $f^n = f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}$ ($|n|$ раз).

(b)-(f) Используйте утверждения 5.7.3.bc.

(d) *При написании этого решения использован текст А. Пахарева.* Для п. (b) утверждение очевидно. Приведем доказательство для п. (c). Пусть, напротив, существуют сколь угодно большие интервалы из целых чисел n, для которых $|E \cap f^n(E)| < 0.99|E|^2$. Назовем такие n и интервалы *плохими.* Обозначим через l_1 середину одного из плохих интервалов четной длины. Далее, обозначим через l_2 — середину плохого интервала четной длины, большей $|2l_1|$, и т.д. Тогда при любых $n > m$ число $l_n - l_m$ содержится в плохом интервале с серединой l_n, поэтому оно плохое. Значит, $|f^{l_n}(E) \cap f^{l_m}(E)| < 0,99|E|^2$ для любых целых $n, m > 0$. Это противоречит лемме Виссера 5.7.3.b.

5.8.1. (c) Разбиению $[n] = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$ поставьте в соответствие семейство всех множеств, полученных объединением некоторых из $X_1, \ldots, X_k$. Получится взаимно-однозначное соответствие между алгебрами на $[n]$ и разбиениями множества $[n]$.

(b) Следует из (c).

5.8.2. Рассмотрите алгебру $2^{[4]}$ и два базиса, один из множеств $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$, другой из множеств $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.

5.8.5. Ответы: (a) $n + 1$; (c) $2n + 2$; (d) $2^n + 1$.

ния задач 6.2.1, 6.2.18 и 6.2.19; не бойтесь, они формулируются и решаются без слова «гиперграф»). Однако очень быстро стало ясно, насколько это мощный и плодотворный инструмент. Например, почти сразу же с его помощью Дж. Спенсер улучшил нижнюю оценку *числа Рамсея* (см. определение в п. 4.1 и задачу 6.2.23), которая не поддавалась улучшению в течение сорока лет. Сейчас диапазон применения леммы становится все шире. Здесь теория графов и гиперграфов, здесь экстремальные задачи комбинаторики, теория алгоритмов и даже комбинаторная геометрия и теория диофантовых приближений.

За прошедшие десятилетия появились разнообразные усовершенствования Локальной леммы, многие из которых уже лишь отдаленно напоминают первоначальный вариант. И это еще одно свидетельство исключительной плодотворности идеи Ловаса.

Как устроено изложение в этом разделе. Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. Мы показываем, *как можно придумать* лемму Ловаса. Путь к ее доказательству и применениям намечен в виде задач (всех задач этого и следующего подразделов, кроме задач 6.2.6 и 6.2.7, которые просто поясняют понятие независимости). Обучение путем решения задач не только характерно для серьезного изучения математики, но и продолжает древнюю культурную традицию.[10] К важнейшим задачам приводятся указания и решения.

Обычно лемму Ловаса излагают на вероятностном языке. Однако, по нашему мнению, приводимое комбинаторное изложение более доступно и полезно для начинающего. Действительно, излагать вероятностные идеи (например, независимости) и развивать вероятностную интуицию, но при этом сохранять строгость изложения, разумнее, не вводя понятия вероятностного пространства, а на комбинаторном языке, ср. п. 1.5.[11] Это как раз подготовит на-

[10]Например, послушники дзенских монастырей обучаются, размышляя над загадками, данными им наставниками. Впрочем, эти загадки являются скорее парадоксами, а не задачами. См. подробнее [Su].

[11]Отличие элементарной теории вероятностей от перечислительной комби-

чинающего к введению этого довольно абстрактного понятия, ср. с [ZSS, философски-методическое отступление]. Кроме того, вероятностной интуиции начинающего противоречит получение вероятностными методами абсолютно (а не с некоторой вероятностью) верного результата.[12] (Впрочем, для человека, уже владеющего понятием вероятностного пространства, изложение на вероятностном языке не сложнее комбинаторного.)

Приведем интересные факты, которые можно доказать при помощи леммы Ловаса и вряд ли можно доказать без нее. Видимо, из задач 6.2.1-6.2.4 вы сможете решить сейчас только пункты (a). К пунктам (b) разумно вернуться после изучения следующих подразделов. Более того, задача 6.2.2.b естественнее по формулировке, но сложнее двух следующих.

6.2.1. (a) По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему. (Сотрудник может быть специалистом по нескольким видам работ; распределение специалистов по видам работ известно тому, кто назначает выходные. Это задача 1.5.7.)

(b) По каждому из нескольких видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. (Теперь видов работ не обязательно 100.) Каждый вид работ имеет общих специалистов не более чем с 30 другими видами. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему.

Замечание. Для каждого вида работ x обозначим через A_x множество всех распределений выходных, при которых и в субботу, и в воскресенье присутствует специалист по x. Нужно доказать, что

наторики скорее в том, что речь идет о *долях* вместо чисел, и интерес часто представляют *оценки*, а не равенства.

[12] Объяснять, как с помощью вероятностных методов можно получить абсолютно верный результат, лучше на более простых примерах. См., например, задачи 6.2.5, 6.2.12, 6.2.16 и 6.3.3.ab. Мы хотели бы сделать этот текст доступным даже для тех, кто не разбирал таких примеров.

$\cap_x A_x \neq \varnothing$. В п. (a) это делается путем подсчета количества элементов. В п. (b) этого уже не хватает, нужна идея из следующего подраздела. Там мы покажем, как *независимость* (определенную там) можно применять для оценки количества элементов в пересечении множеств.

Описанную идею можно сформулировать так. Нужное условие мы представляем в виде пересечения некоторого числа условий. При этом ясно, что для каждого из них есть конструкция, ему удовлетворяющая. Иногда отсюда можно вывести, что есть конструкция, удовлетворяющая всем этим условиям одновременно! Эта идея часто применяется в математике. (Для читателя, знакомого с соответствующими понятиями, напомним, что в анализе так доказывается существование решения дифференциального уравнения, в топологии — вложимость n-мерного компакта в $\mathbb{R}^{2n+1}$, ср. [S12, §2].) Число условий может быть бесконечно, поэтому идея пересечения «равносильна» идее итерационного процесса. А мы покажем, как применять эту идею в комбинаторике. Несмотря на конечность числа условий, ее применение весьма нетривиально.

6.2.2. (a) По кругу стоит 200 студентов из 10 групп, в каждой из которых 20 студентов. Тогда можно в каждой группе выбрать старосту так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.

(b) То же для 1600 студентов из 100 групп, в каждой из которых 16 студентов.

6.2.3. (a) Можно раскрасить первые 8 натуральных чисел в 2 цвета так, чтобы не было одноцветной арифметической прогрессии длины 3. (Это задача 4.4.5.b.)

(b) Можно раскрасить первые 15 миллионов натуральных чисел в 2 цвета так, чтобы не было одноцветной арифметической прогрессии длины 32.

6.2.4. (a) Для любого $M > 0$ можно раскрасить все вещественные числа в 2 цвета так, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ числа x и $x + M$ были не одного цвета.

(b) Для любых попарно различных 25 чисел $M_1, \ldots, M_{25} > 0$ и конечного множества $X \subset \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные

числа в 3 цвета так, чтобы для любого $x \in X$ среди чисел $x, x + M_1, \ldots, x + M_{25}$ были числа каждого из трех цветов.

(c) Для любых попарно различных 25 чисел $M_1, \ldots, M_{25} > 0$ можно раскрасить все вещественные числа в 3 цвета так, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ среди чисел $x, x + M_1, \ldots, x + M_{25}$ были числа каждого из трех цветов.

Решения пунктов (b) вышеприведенных задач основаны на идее, аналогичной решению задачи 6.2.1.b.

Для удобства читателя этот раздел структурирован более тонко, чем остальные. В частности, некоторые указания и решения приведены прямо в нем (а не в конце параграфа).

Независимость

В этом подразделе мы введем и обсудим понятие независимости. Оно и важно само по себе, и необходимо для леммы Ловаса 6.2.15 (почему она интересна, написано в предыдущем разделе). Впрочем, формально, далее из этого подраздела используются только утверждения 6.2.8 и 6.2.11.

6.2.5. Каждый житель города либо здоров, либо болен, а также либо богат, либо беден. Богатство и здоровье *независимы*, т.е. доля богатых здоровых среди богатых равна доле здоровых среди всех жителей. Известно, что есть богатый горожанин и есть здоровый горожанин. Обязательно ли найдется богатый здоровый горожанин?

Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если

$$|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|.$$

При $B \neq \varnothing$ это равносильно тому, что доля множества $A \cap B$ в B равна доле множества A в M.

6.2.6. Зависимы ли следующие подмножества? (Мы называем *зависимыми* подмножества, не являющиеся независимыми.)

(a) В множестве всех клеток шахматной доски подмножество клеток в первых трех ее строках и подмножество клеток в последних четырех ее столбцах.

(b) Подмножества $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$ и $\{1,3\} \subset \{1,2,3,4\}$.

(c) Подмножества $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$ и $\{1,3\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$.

6.2.7. Зависимы ли следующие подмножества множества целых чисел от 1 до 105?

(a) Подмножество чисел, делящихся на 5, и подмножество чисел, делящихся на 7.

(b) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 21.

(c) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 5.

(d) Подмножество чисел, делящихся на 10, и подмножество чисел, делящихся на 7.

6.2.8. Подмножества A и B конечного множества независимы тогда и только тогда, когда A и $\overline{B}$ независимы.

6.2.9. Существуют подмножества A, B_1, B_2 конечного множества,

(a) попарно независимые, но для которых A зависимо от $B_1 \cap B_2$;

(b) не являющиеся попарно независимыми, но для которых A независимо и от B_1, и от B_2, и от $B_1 \cap B_2$.

6.2.10. (Ср. с замечанием после задачи 6.2.1.b.) Зависимы ли следующие подмножества множества всех раскрасок чисел $1, 2, \ldots, 400$ в два цвета?

(a) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ одноцветно.

(b) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ неодноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ неодноцветно.

(c) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{6, 7, \ldots, 13\}$ одноцветно.

6.2.11. (Ср. с замечанием после задачи 6.2.1.b.) Обозначим через $2^{[400]}$ семейство всех раскрасок множества $[400] := \{1, 2, \ldots, 400\}$ в два цвета. Для подмножества $\alpha \subset [400]$ обозначим через $A_\alpha \subset 2^{[400]}$

подмножество тех раскрасок, для которых α одноцветно. Тогда для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \subset [400] - [8]$ подмножество $A_{[8]}$ не зависит от пересечения $A_{\alpha_1} \cap \ldots \cap A_{\alpha_n}$.

Подробнее о независимости см. [KZP].

Лемма Ловаса

Приведем задачи, которые подведут нас к лемме Ловаса 6.2.15.

6.2.12. (a) В городе доля богатых горожан больше 2/3, доля здоровых больше 2/3 и доля умных больше 2/3. Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин?

(b) В городе доля богатых горожан больше 3/4, доля здоровых больше 3/4 и доля умных больше 3/4. Обязательно ли среди здоровых умных большинство богаты?

(c) В городе есть богатый горожанин, есть здоровый горожанин и есть умный горожанин. Богатство, здоровье и ум попарно независимы (т.е., например, доля богатых здоровых среди богатых такая же, как и доля здоровых среди всех жителей). Доля богатых здоровых умных среди богатых здоровых такая же, как и доля умных среди всех жителей. (Вместе с условием попарной независимости последнее условие называется *независимостью в совокупности.*) Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин?

(d) Тот же вопрос, если в городе богатых горожан больше половины, здоровых больше половины, умных больше половины, богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы.

(e) В городе доля богатых горожан больше 2/3, доля здоровых больше 2/3 и доля умных больше 2/3. Богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы. Может ли доля богатых здоровых умных быть меньше 1/5?

(f) В городе доля богатых горожан больше 5/8, доля здоровых больше 5/8 и доля умных больше 5/8. Богатство и здоровье независимы. Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин?

Задача 6.2.12 показывает, что чем сильнее условие, характеризующее независимость нескольких множеств, тем меньшей доли каж-

дого множества достаточно, чтобы гарантировать непустоту пересечения. Причем наиболее интересные результаты (6.2.12.def) получаются «посередине» между крайними условиями — полного отсутствия независимости (6.2.12.ab) и независимости в совокупности (6.2.12.c). Так часто бывает: наиболее полезные соображения находятся между «крайними» точками зрения.

Для леммы Ловаса нужно еще более «хитрое» условие независимости на несколько множеств, чем рассмотренные ранее.

6.2.13. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше $3/4$.

(a) Пусть A_1 независимо с $A_3 \cap A_4$. Тогда $2|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| > |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

(b) Пусть A_1 независимо с $A_3 \cap A_4 \cap A_5$ и A_2 независимо с $A_4 \cap A_5$. Тогда $2|A_1 \cap \ldots \cap A_5| > |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$.

(c) Пусть A_k независимо с $A_{k+2} \cap \ldots \cap A_n$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-3$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

6.2.14. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше $7/8$.

(a) Тогда $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| > \frac{4}{5}|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

(b) Пусть A_1 независимо с $A_4 \cap A_5$. Тогда $|A_1 \cap \ldots \cap A_5| > \frac{13}{16}|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$.

(c) Пусть A_k независимо с $A_{k+3} \cap \ldots \cap A_n$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-4$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

6.2.15. Локальная лемма Ловаса в симметричной форме. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества. Пусть для некоторого d и любого k*

- *доля подмножества A_k не меньше $1 - \dfrac{1}{4d}$, и*
- *из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно вычеркнуть не более d множеств и еще A_k, так что пересечение любого набора из оставшихся множеств будет независимо с A_k.*

Тогда $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.[13]

[13] Вот формулировка на вероятностном языке, которая не используется в дальнейшем. *Пусть дано вероятностное пространство и $A_1, \ldots, A_n$ — события. Пусть для некоторого d и любого k вероятность события A_k не меньше*

Читатель может перед доказательством этой леммы применить ее к решению задачи 6.2.1.b. Доказательство леммы нетривиально обобщает идеи решения задач 6.2.12–6.2.14. Из этих задач ясно, что нужно оценивать снизу количество элементов в пересечении s из данных множеств, начиная с $s = 1$ и заканчивая $s = n$, при помощи индукции по s. Как часто бывает, наиболее трудная часть — догадаться, какое конкретно утверждение нужно доказывать по индукции. Вот это утверждение. Обозначим $X_k := A_k \cap A_{k+1} \cap \ldots \cap A_n$.

$$(I) \qquad |X_1| \geqslant \left(1 - \frac{1}{2d}\right) |X_2| \quad \text{для любого} \quad n \geqslant 1.$$

Из этого будет вытекать, что $|X_1| \geqslant \left(1 - \frac{1}{2d}\right)^{n-1} |X_n| > 0$.

Подсказки к задачам 6.2.1-6.2.15

6.2.1. (a) См. указание к задаче 1.5.7.

(b) Обозначим через A множество распределений выходных. (Имеем $|A| = 2^n$, где n — число специалистов.) Для каждого вида работ x обозначим через $\widehat{x}$ множество специалистов по нему, а через A_x — множество распределений выходных, при которых и в субботу, и в воскресенье на работе есть специалист по x. Тогда $|A_x|/|A| = 1 - 2^{-7}$. В утверждении 6.2.11 говорится, что подмножество A_x не зависит от пересечения любого поднабора множеств из набора $\{A_y \ : \ \widehat{y} \cap \widehat{x} = \varnothing\}$. Так как каждый вид работ имеет общих специалистов не более чем с 30 другими видами, то вне этого набора не более 30 подмножеств. Применим локальную лемму Ловаса 6.2.15 к множествам A_x и $d = 2^5$. Это возможно ввиду утверждения 6.2.8 и неравенства $30 < 2^5$. Получим $\cap_x A_x \neq \varnothing$.

6.2.2. (a) (При написании этого решения использован текст А. Кора.) Будем выбирать старост по очереди. Назовем студента *хулиганом*, если он является соседом одного из уже выбранных старост или состоит в его группе. Каждым ходом мы выбираем старосту

$1 - \frac{1}{4d}$, *и из* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *можно вычеркнуть не более* d *событий и еще* A_k, *так что пересечение любого набора из оставшихся событий будет независимо с* A_k *Тогда вероятность события* $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ *положительна.*

6.2.15. *Это решение по сути принадлежит Ловасу [RS18].* Так как $|X_1| = |X_2| - |\overline{A_1} \cap X_2|$, то утверждение (I) (из подсказки) равносильно утверждению

$$|\overline{A_1} \cap X_2| \leqslant \frac{1}{2d}|X_2| \quad \text{для любого} \quad n.$$

Докажем последнее утверждение при помощи индукции по n.

База индукции $n = 1$ вытекает из

$$|\overline{A_1}| = |X_2| - |A_1| \leqslant \frac{1}{4d}|X_2| \leqslant \frac{1}{2d}|X_2|.$$

Докажем шаг индукции. Без ограничения общности, будем считать, что A_1 не зависит от X_{d+2}. Тогда и $\overline{A_1}$ не зависит от X_{d+2}. Для каждого $j \in \{2, 3, \ldots, d+1\}$ применим предположение индукции к системе подмножеств $A_j, A_{d+2}, A_{d+3}, \ldots, A_n$. Получим $|\overline{A_j} \cap X_{d+2}| \leqslant \frac{1}{2d}|X_{d+2}|$. Значит,

$$|X_2| = |X_{d+2}| - |(\overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_{d+1}}) \cap X_{d+2}| \geqslant |X_{d+2}| - \sum_{j=2}^{d+1} |\overline{A_j} \cap X_{d+2}| \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 - \frac{d}{2d}\right)|X_{d+1}| = \frac{1}{2}|X_{d+1}| \geqslant 2d|\overline{A_1} \cap X_{d+1}| \geqslant 2d|\overline{A_1} \cap X_2|.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.2.16. (a) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше $2/3$. Пусть A_k и A_{k+1} независимы для любого $k = 1, 2, 3$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \neq \varnothing$.

(b)* Пусть $n \geqslant 2$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше $1 - \dfrac{1}{n-1}$. Пусть A_k и A_{k+1} независимы для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$.

6.2.17. (a) При $d > 2$ в локальной лемме Ловаса 6.2.15 можно заменить $1 - \dfrac{1}{4d}$ на $1 - \dfrac{1}{e(d+1)}$, где e — основание натуральных логарифмов.

(b) Если $a_k = 1$ при любом $k \leqslant 0$ и для некоторого d выполнено $a_{k+1} \geqslant a_k - \dfrac{a_{k-d}}{4d}$ при любом $k \geqslant 0$, то $a_k > 0$ при любом k.

6.2.18. Даны число

(a) $k \geqslant 10$; (b) $k = 9$

и семейство k-элементных подмножеств конечного множества M. Если каждый элемент множества M содержится ровно в k подмножествах семейства, то существует раскраска множества M в два цвета, для которой каждое подмножество семейства содержит элементы обоих цветов.

(Т.е. хроматическое число любого k-однородного k-регулярного гиперграфа равно двум при $k \geqslant 9$. Ср. с задачей 6.2.1.b.)

6.2.19. В конечном множестве выбрано несколько подмножеств. В каждом из них не менее 3 элементов. Каждое из них пересекается не более чем с a_i выбранными i-элементными подмножествами. Если $\sum_i a_i 2^{-i} \leqslant 1/8$, то можно покрасить элементы данного множества в два цвета так, чтобы каждое выбранное подмножество содержало элементы обоих цветов.

6.2.20. (a) Для любой раскраски множества вершин цикла длины $16n$ в n цветов по 16 вершин каждого цвета можно выбрать по вершине каждого цвета так, что никакие две выбранные вершины не соседние.

(b) То же для $11n$ вершин.

(c) В графе степень каждой вершины не превосходит Δ. Все вершины раскрашены в n цветов. Вершин каждого цвета не менее 8Δ. Тогда можно выбрать n вершин разных цветов, никакие две из которых не соединены ребром.

6.2.21. (a) Через каждое число в множестве $[n]$ проходит менее n арифметических прогрессий, лежащих в $[n]$ и состоящих из k элементов.

(b) Каждую k-элементную арифметическую прогрессию в множестве $[n]$ пересекает менее nk других таких прогрессий.

(c) Для любого целого $k > 0$ существует раскраска первых $\lfloor 2^{k-3}/k \rfloor$ целых положительных чисел в два цвета, для которой нет одноцветной k-элементной арифметической прогрессии.

6.2.22. (a) Если $X \subset \mathbb{R}$ — конечное множество и $m, r > 1$ — целые числа, для которых $4rm(m-1)\left(1-\dfrac{1}{r}\right)^m < 1$, то для любого m-элементного подмножества $M \subset \mathbb{R}$ существует раскраска множества $\mathbb{R}$ в r цветов такая, что для любого $x \in X$ множество $x + M := \{x + a \ : \ a \in M\}$ содержит точки каждого из r цветов.

(b) То же для $X = \mathbb{Z}$.

(c) То же для $X = \mathbb{R}$.

6.2.23. (a) Если $\dbinom{n}{2}\dbinom{r}{n-2} + 1 < 2^{\binom{n}{2}-1}/e$, то $R(n,n) > r$. Здесь $R(n,n)$ — *число Рамсея*, см. п. 4.1.

(b) $R(n,n) \gtrsim \sqrt{2}e^{-1}n2^{n/2}$. (Ср. с задачей 4.1.6.)

6.2.24. Имеется несколько цветов. Каждой вершине некоторого графа сопоставлен список из не менее чем $10d$ этих цветов, где $d > 1$. Для любых вершины v и цвета из ее списка имеется не более d соседей вершины v, в списке которых есть этот цвет. Тогда можно так раскрасить каждую вершину графа в некоторый цвет из ее списка, чтобы концы любого ребра были разного цвета.

6.2.25. В ориентированном графе в каждую вершину входит не больше Δ ребер и из каждой вершины выходит не меньше δ ребер.

7 Алгебраические методы

Напомним, что для множества F

$$F^n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ : \ a_1, a_2, \ldots, a_n \in F\}.$$

Элементы этого множества называются *векторами* (или *упорядоченными наборами*, или *точками*). Если $F \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, то векторы можно покомпонентно складывать:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Если $F \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, то вектор можно покомпонентно умножить на число $\lambda \in F$:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

(Это можно делать и для $F = \mathbb{Z}_2$, но не интересно.)

Расстояние между точками пространства $\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$|(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Для $F \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ *скалярное произведение* $F^n \times F^n \to F$ определяется формулой

$$x \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Векторы $x, y \in F^n$ называются *ортогональными*, если $x \cdot y = 0$.

7.1 Линейно-алгебраический метод в комбинаторике

7.1.1. *Теорема о линейной зависимости.*

($\mathbb{Z}_2$) Среди любых $n + 1$ наборов длины n из нулей и единиц найдется несколько (не ноль) наборов, покомпонентная сумма по модулю два которых есть нулевой набор.

($\mathbb{Q}$) Для любых $n + 1$ векторов $v_1, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{Q}^n$ найдутся рациональные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$, не все равные нулю, для которых $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+1} v_{n+1} = (0, \ldots, 0)$.

($\mathbb{R}$) Аналог теоремы ($\mathbb{Q}$) справедлив для вещественных, комплексных и целых чисел.

Наборы из задач 7.1.1.($\mathbb{Z}_2$),($\mathbb{Q}$) называются *линейно зависимыми* — над $\mathbb{Z}_2$ и над $\mathbb{Q}$ соответственно. *Линейная независимость* — отрицание *линейной зависимости.* Аналогично определяется линейная (не)зависимость многочленов над $\mathbb{Z}_2$ и над $\mathbb{Q}$ соответственно. (Эти и следующие понятия, а также определение многочлена, используются в формулировках задач 7.1.4.c, 7.1.5.c и в решениях некоторых задач.)

Линейным подпространством называется подмножество $L \subset \mathbb{Q}^n$, замкнутое относительно сложения векторов и умножения на рациональные числа.

Линейное подпространство L называется *n-мерным*, если найдутся такие линейно независимые векторы $v_1, \ldots, v_n \in L$, что любой вектор $v \in L$ линейно выражается через данные векторы, т. е. найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$, для которых $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Число n называют *размерностью* пространства L. Ср. с определением перед задачей 1.4.7.

Замечание. Аналогичные определения можно дать и в более общей ситуации — это приводит к понятию *кольца* и *модуля* над ним. Попытка доказать (и использовать!) аналог теоремы о линейной зависимости (задачи 7.1.1) приводит к понятиям *поля* и *линейного пространства* над ним. (Для случая целых чисел уже не все обобщения проходят.) Подробности можно найти в учебнике по линейной алгебре.

Фраза «N элементов» (в частности, подмножеств) означает «N попарно различных элементов» (в частности, подмножеств).

7.1.2. Дано семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества $\mathcal{R}_n$.

(a) Если в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ нечётное число элементов, а в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ чётное число элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(b) Постройте пример, когда эта оценка достигается.

(c) Если в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно q элементов и в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ более q элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(d) Если $q > 0$ и в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно q элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

7.1.3. (a) Существуют 2^k подмножеств $2k$-элементного множества, в каждом из которых чётное число элементов и в пересечении любых двух из которых чётное число элементов.

(b) Больше чем 2^k подмножеств в условиях п. (a) быть не может.

7.1.4. (a) Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n$ с равными попарными расстояниями равно $n+1$.

(b) Постройте $n(n-1)/2$ точек в $\mathbb{R}^n$, попарные расстояния между которыми принимают только два различных значения.

(c) Для $a \in \mathbb{R}$ и точек $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $P_v(x) := |x - v|^2 - a^2$. Если попарные расстояния между k точками $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ равны a, то многочлены $P_{u_1}, \ldots, P_{u_k}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

(d) Если попарные расстояния между k точками в $\mathbb{R}^n$ принимают только два различных значения, то $k \leqslant (n+1)(n+4)/2$.

7.1.5. (a) Среди любых 327 попарно пересекающихся 9-элементных подмножеств 25-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 3 или ровно 6 элементов.

(b) Для $n, k \in \mathbb{Z}$ обозначим

$$V_{n,k} := \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n \ : \ \sum_s a_s = k \right\}.$$

Среди любых 327 точек в $V_{25,9}$ есть две, скалярное произведение которых делится на 3.

(c) Для любого $\vec{a} \in V_{25,9}$ раскроем скобки в произведении

$$(\vec{a} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{25}))^2 - 1,$$

считая $a_j \in \{0,1\}$ вычетами по модулю 3, а $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ — переменными. Полученный многочлен с коэффициентами в $\mathbb{Z}_3$ обозначим $P_{\vec{a}}$. Укажите 326 многочленов, линейными комбинациями которых с коэффициентами в $\mathbb{Z}_3$ можно получить каждый многочлен $P_{\vec{a}}$, $\vec{a} \in V_{25,9}$.

(d) Если скалярное произведение никаких двух векторов среди $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \in V_{25,9}$ не делится на 3, то многочлены $P_{\vec{a}_1}, \ldots, P_{\vec{a}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}_3$.

(a',b') То же, что в (a,b), с заменой 327 на 302.

(c') Заменим в $P_{\vec{a}}$ переменную x_{25} на $-x_1 - \ldots - x_{24}$. Полученный многочлен с коэффициентами в $\mathbb{Z}_3$ обозначим $G_{\vec{a}}$. Укажите 301 многочлен, линейными комбинациями которых с коэффициентами в $\mathbb{Z}_3$ можно получить каждый многочлен $G_{\vec{a}}$, $\vec{a} \in V_{25,9}$.

(d') То же, что в (d), с заменой P на G.

(c") Заменим в $P_{\vec{a}}$ каждый одночлен λx_i^2, $i = 1, \ldots, 25$, на λx_i. Полученный многочлен с коэффициентами в $\mathbb{Z}_3$ обозначим $F_{\vec{a}}$. Укажите 301 многочлен, линейными комбинациями которых с коэффициентами в $\mathbb{Z}_3$ можно получить каждый многочлен $F_{\vec{a}}$, $\vec{a} \in V_{25,9}$.

(d") То же, что в (d), с заменой P на F.

7.1.6. (a) Среди любых 107 пятиэлементных подмножеств 14-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 2 элемента.

(b) То же для 93 подмножеств.

(c) То же для 92 подмножеств.

(d) Невозможно раскрасить в 21 цвет все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества так, чтобы любые два пятиэлементные подмножества, пересекающиеся ровно по двум элементам, были разноцветны.

(Ср. с замечанием в задаче 5.1.4. Вот эквивалентная формулировка. Вершинами графа являются все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества. Его ребрами являются пары подмножеств, пересекающиеся ровно по двум элементам. Докажите, что этот граф нельзя правильно раскрасить в 21 цвет.)

7.1.7. (a) *Теорема Франкла-Уилсона.* Если p простое и $n > k$ целые, то среди любых $1+\sum\limits_{j=0}^{p-1}\binom{n}{j}$ подмножеств n-элементного множества, в каждом из которых k элементов, найдутся два подмножества, число элементов в пересечении которых делится на p.

(b) То же, только задано целое a и «делится на p» заменено на «сравнимо с a по модулю p».

7.1.8. *Теорема Фрэнкла-Уилсона.* Пусть $p > 2$ простое и в множестве из $n = 4p^\alpha$ элементов выбрано $2\binom{n-1}{n/4-1}$ подмножеств по $n/2$

элементов в каждом. Тогда найдутся два множества, имеющие ровно $n/4$ общих элементов.

7.1.9. (a) Если множество рёбер графа K_n является объединением множеств рёбер s полных двудольных графов, не пересекающихся по рёбрам, то $s \geqslant n-1$.

(b) Постройте набор двудольных графов, на котором эта оценка достигается.

Ср. с п. 5.1, 5.7 и 7.3. Более подробное и развернутое изложение можно найти в [Mk, R15], а более продвинутое — в [BF].

7.2 Матрицы Адамара

7.2.1. *Теорема Адамара.* Если у матрицы A размера $n \times n$ каждый элемент по модулю не превосходит 1, то $|\det A| \leqslant n^{n/2}$.

Квадратная матрица H называется *матрицей Адамара*, если все её элементы равны ± 1 и $H \cdot H^T = nE_n$, где n — порядок матрицы H и E_n — единичная матрица.

7.2.2. (2,4,8,16,12) Постройте матрицу Адамара $n \times n$ для $n = 2, 4, 8, 16, 12$.

7.2.3. (a) У матрицы Адамара любые два столбца ортогональны.

(b) Матрица является матрицей Адамара тогда и только тогда, когда её элементы равны ± 1 и любые две строки ортогональны.

(c) Для матриц Адамара достигается верхняя оценка в теореме Адамара. (Название матрицы Адамара получили благодаря этому результату.)

(d) Если существует матрица Адамара $n \times n$ и $n > 2$, то n делится на 4.

Гипотеза. Матрица Адамара $n \times n$ существует для любого числа n, делящегося на 4.

Гипотеза не доказана даже для некоторых чисел, меньших 1000; а именно, для 668, 716, 892.

Для решения двух следующих задач потребуются простейшие свойства квадратичных вычетов; см. [GIM, §9], [Vi, §5], [ZSS, 3.3].

7.2.4. Для простого числа p обозначим $S_d = S_{p,d} := \sum\limits_{j=1}^{p-1} \left(\dfrac{j(j+d)}{p}\right)$ (это сумма символов Лежандра).

(a) Докажите, что S_d не зависит от $d \in \{1, \ldots, p-1\}$.

(b) Найдите S_d для каждого $d = 1, \ldots, p-1$.

7.2.5. Постройте матрицу Адамара $n \times n$ для

(2a) $n = 2a$, если существует матрица Адамара $a \times a$;

(ab) $n = ab$, если существуют матрицы Адамара $a \times a$ и $b \times b$;

(4k) $n = p + 1$, где p — простое число вида $4k - 1$;

(8k+4) $n = 2p + 2$, где p — простое число вида $4k + 1$.

Матрица Адамара называется *нормализованной*, если у неё первая строчка и первый столбец состоят из одних единиц.

7.2.6. Нарисуйте все нормализованные матрицы Адамара порядков 1; 2; 4.

7.2.7. Адамаровость матрицы сохраняется при следующих преобразованиях:

(1) умножение строки или столбца на -1;

(2) перестановка строк или столбцов местами.

Матрицы Адамара, получаемые друг их друга применением некоторого числа преобразований (1) и (2), называются *эквивалентными*.

7.2.8. (a) Какие из матриц из задачи 7.2.6 эквивалентны?

(b) Любая матрица Адамара эквивалентна некоторой нормализованной.

Количество классов эквивалентности: для порядков 1,2,4,8,12 — 1, 16 — 5, 20 — 3, 24 — 60, 28 — 487, 32 — больше миллиона.

Определим *тензорное произведение* $A \otimes B$ матриц A и B размеров $a \times a$ и $b \times b$ как матрицу размера $ab \times ab$, заданную формулой

$$(A \otimes B)_{(k-1)a+l,(p-1)a+q} := A_{lq} B_{kp}, \quad 1 \leqslant l, q \leqslant a, \quad 1 \leqslant k, p \leqslant b.$$

7.2.9. Для любых матриц A и B матрицы $A \otimes B$ и $B \otimes A$ получаются друг из друга перестановкой строк и столбцов.

7.2.10. Матрица Адамара H, построенная при помощи конструкции (Пэйли) из задачи 7.2.5.$(8k+4)$, эквивалентна матрице H^T.

7.2.11.* Существует ли матрица Адамара H, не эквивалентная матрице H^T?

7.3 Короткое опровержение гипотезы Борсука

В этом пункте приводится простейшее из известных опровержений следующей гипотезы Борсука: *любое ограниченное подмножество n-мерного евклидова пространства, содержащее более n точек, можно разбить на $n+1$ непустых частей меньшего диаметра.* Доказательство принадлежит Н. Алону и является замечательным приложением комбинаторики и алгебры к геометрии.

Диаметром непустого подмножества плоскости называется наибольшее расстояние между его точками (точнее, супремум таких расстояний). Подмножество плоскости называется *ограниченным*, если его диаметр конечен.

Теорема 7.3.1 (Борсук)**.** *Любое ограниченное подмножество плоскости, в котором более двух точек, можно разбить на три непустые части меньшего диаметра.* [16]

Борсук предложил следующее обобщение своего результата, которое долгие годы было одной из наиболее интригующих проблем комбинаторной геометрии.

Диаметр и *ограниченность* подмножества d-мерного евклидова пространства определяется точно так же, как и в случае плоскости.

Гипотеза Борсука утверждает, что любое ограниченное подмножество d-мерного евклидова пространства, содержащее более d точек, можно разбить на $d+1$ непустых частей меньшего диаметра.

(Нетрудно придумать подмножество d-мерного евклидова пространства, которое нельзя разбить на d частей меньшего диаметра.

[16] *Указание к доказательству.* Сначала, используя «соображения непрерывности», докажите, что любую плоскую фигуру диаметра 1 можно заключить в правильный шестиугольник, диаметр вписанной окружности которого равен 1. Затем докажите, что хотя диаметр полученного правильного шестиугольника больше 1, его можно разрезать на три части диаметра меньше 1. Ср. [Y10].

Для $d = 3$ годится правильный тетраэдр, для произвольного d годится d-мерный симплекс.)

В 1993 Д. Кан и Дж. Калаи, следуя идеям Болтянского, Эрдеша и Лармана о применении комбинаторики для построения контрпримера, нашли контрпример к гипотезе Борсука [KK93]. Подробно история вопроса описана в [AZ04], [R14].

Теорема 7.3.2. *Существует $d > 0$ и ограниченное подмножество d-мерного евклидова пространства, содержащее более d точек, которое невозможно разбить на $d + 1$ часть меньшего диаметра.*

Мы приведем (ср. [S13]) простейшее из известных доказательств, принадлежащее Н. Алону, ср. [N94, S96, G99, R04, AZ04], [R14]. (При этом другие доказательства дают более сильные результаты.) Это удивительный пример важного результата в современной математике, не требующего для полного понимания полугодового специального университетского курса (после двухгодового обязательного курса). Более простые применения аналогичных алгебраических соображений в комбинаторике можно найти в п. 7.1.

Доказательство теоремы 7.3.2. Обозначим

$$M_n \;=\; \{(1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \{1, -1\}^n \;:\; x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1\}.$$

Вершина n^2-мерного куба — набор длины n^2 из плюс или минус единиц. Его удобно представлять себе как таблицу $n \times n$. (Впрочем, если Вам удобнее работать с набором длины n^2, то можно и так!) Поставим в соответствие каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M_n$ таблицу $f(x) = x^T \otimes x$, определенную формулой $f(x)_{ij} := x_i x_j$. Например,

$$f(1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= (1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1).$$

Искомым множеством (контрпримером к гипотезе Борсука) для $d = n^2$ является множество $f(M_n)$ всех таблиц $f(x)$, $x \in M_n$, при достаточно большом простом числе p и $n = 4p$. Так как $|M_n| = 2^{n-2}$, то это вытекает из нижеприведенных лемм 7.3.3, 7.3.4.abc (для $n = 4p = 4k$) и 7.3.5 (для $q = p$). QED

Лемма 7.3.3. *Если n четно и $x, y \in M_n$, то условие $|f(x), f(y)| = \operatorname{diam} f(M_n)$ равносильно условию $x \cdot y = 0$.*

Предлагаем читателю самостоятельно подумать над доказательствами лемм перед тем, как читать эти доказательства.

При формулировке и доказательстве следующих лемм можно забыть про конструкцию отображения f.

Далее p — любое простое число.

Линейной комбинацией многочленов $F_1, \ldots, F_s$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ называется любой многочлен $\lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_s F_s$ с $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{Z}_p$. Например, многочлен x_2 является рациональной линейной комбинацией многочленов $2x_1$, 1 и $x_1 + x_2$.

Многочлены с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ называются *линейно независимыми*, если любая их линейная комбинация, в которой не все λ_k нулевые, не равна нулю. Например, n многочленов $1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ являются линейно независимыми.

Многочлен с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ от $n-1$ переменной $x_2, \ldots, x_n$ *имеет степень менее k*, если он является линейной комбинацией многочленов

(*) $x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — целые неотрицательные числа, сумма которых меньше k.

Лемма 7.3.4. *(a) Если $p > 2$ простое и среди некоторых s векторов из M_{4p} не найдется двух ортогональных, то существует s многочленов с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ от $x_2, \ldots, x_{4p}$, которые имеют степени менее p и линейно независимы.*

(b) Если существует s линейно независимых многочленов с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ от $x_2, \ldots, x_n$ степени менее k, то s не превосходит количества многочленов (*).

(c) Количество многочленов (*) равно $\binom{n+k-2}{k-1}$.

Лемма 7.3.5. *Для любого достаточно большого q выполнено* $\dfrac{\binom{5q-2}{q-1}}{2^{4q-2}} < \dfrac{1}{16q^2+1}$.

Доказательство леммы 7.3.3. Обозначим через $a = a(x, y)$ количество индексов i, для которых $x_i = y_i$. Тогда $x_i y_i = 1$ для a индексов i и $x_i y_i = -1$ для $n - a$ индексов i. Имеем $(x_i x_j - y_i y_j)^2 =$

$(1 - x_i y_i x_j y_j)^2$. Поэтому $|f(x), f(y)|^2 = 4a(n-a)$. Для данного n это число максимально при $a = n/2$. Значит, условие $|f(x), f(y)| = \operatorname{diam} f(M_n)$ равносильно условию $a = n/2$ и равносильно условию $x \cdot y = 0$. QED

Доказательство леммы 7.3.5. Имеем

$$\binom{5q-2}{q-1} < \frac{(4+1)^{5q-2}}{4^{4q-1}} < \frac{2^{4q-2}}{16q^2+1}.$$

Здесь первое неравенство получается из бинома Ньютона для $(4+1)^{5q-2}$ (ср. с доказательством утверждения 6.1.1.e), а второе (для достаточно больших q) вытекает из $5^5 = 125 \cdot 25 < 2^7 \cdot 2^5 = 4^4 \cdot 2^4$. QED

Доказательство леммы 7.3.4.c. Количество многочленов (*) равно количеству упорядоченных решений $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ неравенства $\alpha_2 + \ldots + \alpha_n < k$ в целых неотрицательных числах. Такие решения есть сочетания с повторениями из n по $k-1$. Поэтому их количество равно $\binom{n+k-2}{k-1}$. QED

Доказательство леммы 7.3.4.b. Обозначим через $Q_1, \ldots, Q_r$ семейство многочленов (*), а через $F_1, \ldots, F_s$ данное линейно независимое семейство многочленов. Возьмем таблицу $s \times r$ вычетов $\lambda_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$, для которых $F_i = \sum_j \lambda_{i,j} Q_j$ при любом $i = 1, \ldots, s$. Семейство многочленов, полученное из семейства $F_1, \ldots, F_s$ заменой F_i на $F_i + \lambda F_j$, $j \neq i$, линейно независимо. Такими заменами и перестановками многочленов $Q_1, \ldots, Q_s$ (т.е. методом Гаусса исключения неизвестных) можно провести рассматриваемую таблицу $k \times s$ к «верхнетреугольному» виду. Так как многочлены $F_1, \ldots, F_s$ линейно независимы, то в полученной таблице нет нулевой строки. Поэтому $s \leqslant r$. QED

Доказательство леммы 7.3.4.a. Обозначим

$$G(t) := (t-1)(t-2)\ldots(t-p+1)$$

Ясно, что

(**) для любого целого t число $G(t)$ делится на p тогда и только тогда, когда t не делится на p.

Обозначим через $a_1, \ldots, a_s$ данное семейство векторов. Здесь $a_1, \ldots, a_s$ — векторы, а не координаты. Обозначим $n = 4p$. Для каждого $j = 1, \ldots, s$ определим многочлен F_j с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ от $x_2, \ldots, x_n$ формулой

$$F_j(x_2, \ldots, x_n) := \rho_p G(a_j \cdot (1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Здесь $\rho_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ — приведение по модулю p.

Ясно, что каждый многочлен F_j имеет степень менее p.

Докажем линейную независимость многочленов $F_1, \ldots, F_s$. Пусть $\lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_s F_s = 0$ для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{Z}_p$. Подставим в полученное равенство $x = a_1$, или, более аккуратно, подставим значения $x_2 = (a_1)_2, \ldots, x_n = (a_1)_n$.

Напомним, что здесь скалярное произведение векторов — целое число (а не вычет по модулю p).

Из $a_1 \cdot a_1 = n = 4p$ и утверждения (**) вытекает, что $F_1(a_1) \neq 0$.

Так как n делится на 4 и для любого $a \in M_n$ число минус единиц в a четно, то для любых $a, b \in M_n$ число $a \cdot b$ делится на 4. Поэтому $a \cdot b \notin \{\pm p, \pm 2p, \pm 3p\}$.

Пусть $k > 1$. Так как $a_1 \neq a_k$, то $a_1 \cdot a_k \neq n$. Кроме того, $a_1 \cdot a_k \neq 0$. Поэтому $a_1 \cdot a_k$ не делится на p. Значит, по утверждению (**) $F_k(a_1) = 0$ при любом $k > 1$.

Поэтому $\lambda_1 = 0$. Аналогично $\lambda_j = 0$ для любого $j = 1, \ldots, s$. Поэтому многочлены $F_1, \ldots, F_s$ линейно независимы. QED

7.4 Подсказки

7.1.2. (a) Если подмножеств больше n, то по теореме о линейной зависимости 7.1.1.$\mathbb{Z}_2$ одно из них равно симметрической разности некоторых других: $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s$.

(c) Возьмём векторы $v_1, \ldots, v_s \in \{0, 1\}^n$, соответствующие подмножествам $\{A_1, \ldots, A_s\} = \mathcal{F}$. По теореме о линейной зависимости 7.1.1.$\mathbb{Q}$ достаточно показать линейную независимость этих векторов над $\mathbb{Q}$.

Литература

[AH] *D. Archdeacon and P. Huneke*, A Kuratowski theorem for non-orientable surfaces, J. Comb. Th., Ser. B, 46 (1989) 173–231.

[AM] *Акопян А. В. , Мусин О. Р.* О множествах с двумя расстояниями. Мат. Просвещение, 17 (2013), 136–151.

[AS] *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: Бином, 2011.

[AZ] *M. Aigner, G. Ziegler,* Proofs from the Book, Springer, 2004.

[BF] *Babai L., Frankl P.* Linear algebra methods in combinatorics, Part 1. Department of Computer Science, The University of Chicago, 1992.

[BKK] *О. Бурсиан, Д. Кохась, К. Кохась,* Вокруг теоремы Кэли, `https://www.turgor.ru/lktg/2018/3/index.html`

[BM] *I. Bogdanov and A. Matushkin.* Algebraic proofs of linear versions of the Conway–Gordon–Sachs and the van Kampen–Flores theorems, `http://arxiv.org/abs/1508.03185`

[Bo] *Bollobás B.* Random Graphs. Cambridge studies in advanced mathematics, 2001.

[BS] *А. Бучаев и А. Скопенков.* Простые доказательства оценок чисел Рамсея и уклонения. `http://arxiv.org/abs/2107.13831`

[Cl] *S. Claytor*, Peanian continua not embeddable in a spherical surface, Ann. of Math. 38 (1937) 631–646.

[EL] *P. Erdős, L. Lovász*, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions, *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, Amsterdam: North Holland, 1973, 609–627.

[Ga] *Гарднер М.* Рамсеевская теория графов. // Квант, 1988, N4, с. 15–20, 82. `http://kvant.mccme.ru/1988/04/ramseevskaya_teoriya_grafov.htm`

[Ge] *М. Л. Гервер,* О разбиении множеств на части меньшего диаметра: теоремы и контрпримеры, Мат. Просвещение, 3 (1999), 168-183.

[GHW] *H. H. Glover, J. P. Huneke and C. S. Wang*, 103 graphs that are irreducible for the projective plane, J. Comb. Th., 27:3 (1979) 332–370.

[GIF] *С. А. Генкин, И. В. Итенберг и Д. В. Фомин*, Ленинградские математические кружки, Киров, 1994.

[GIM] Основы комбинаторики и теории чисел. Сборник задач. А.А. Глибичук, Д.Г. Ильинский, Д.В. Мусатов и др. ИД «Интеллект», Долгопрудный, 2015.

[GKP] *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник А.* Конкретная математика. М.: Мир, 1998.

[Gr] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.

[Har] *Харари Ф.* Теория графов. М.: УРСС, 2003.

[Hal] *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[IRS] *Ильинский Д., Райгородский А., Скопенков А.* Независимость и доказательства существования в комбинаторике. Мат. Просвещение, 19 (2015). `http://arxiv.org/abs/1411.3171`

[IKRS] *Ильинский Д., Купавский А., Райгородский А., Скопенков А.* Дискретный анализ для математиков и программистов (подборка задач). Мат. Просвещение, 17 (2013), с. 162–181.

[Ig] *Игнатьев М.В.* Квантовая комбинаторика. Мат. Просвещение. 18 (2014), с. 66–111.

[JLR] *Janson S., Luczak T., Rucinski A.* Random Graphs. John Wiley, 2000.

[Ju] *Jukna S.* Extremal Combinatorics With Applications in Computer Science. Springer-Verlag, XVII (2001).

[KK] *J. Kahn and G. Kalai*, A counterexample to Borsuk's conjecture, Bull. AMS, 29:1 (1993) 60–62.

[CR] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2001. `http://ilib.mccme.ru/pdf/kurant.htm`

[KS] *Калужнин Л. А., Сущанский В. И.* Преобразования и перестановки. М.: Физматлит, 1985. http://lib.mexmat.ru/books/3692.

[Ku] *V. A. Kurlin*, Basic embeddings into products of graphs, Topol. Appl. 102 (2000) 113–137.

[KZP] *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.,* Введение в теорию вероятностей. Серия «Библиотечка «Квант» », выпуск 23. М.: Наука, 1982.
`http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/teorver.htm`

[Lo] *Lovász L.* Combinatorial Problems and Exercises. North-Holland, Amsterdam, 1979.

[Ma] *Yu. Makarychev*, A short proof of Kuratowski's graph planarity criterion, J. of Graph Theory, 25 (1997) 129–131.

[Mk] *J. Matoušek.* Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra, Amer. Math. Soc., 2010

[Mn] *А. Матушкин,* Непустота пересечения цепочки множеств, Мат. Просвещение, 20 (2016), 247–248.

[Mo] *B. Mohar,* 2-cell embeddings with prescribed face lengths and genus, Ann. Combin. 14 (2010) 525-532. `http://www.fmf.uni-lj.si/~mohar/Reprints/Inprint/BM06_AC_Mohar_2cellEmbeddings.pdf`.

[MS] *Медников Л. Э., Шаповалов А.В.* Турнир городов: мир математики в задачах. МЦНМО, 2012.

[MT01] *B. Mohar*, *C. Thomassen.* Graphs on Surfaces. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 2001.

[Ni] *A. Nilli*, On Borsuk's problem, Contemp. Math., 178 (1994) 209–210.

[NPP] *Ф.К. Нилов, А.А.Полянский, Н.А. Полянский.* Теорема Семереди - Троттера Мат. Просвещение, 21 (2017).

[Pr] *В. Прасолов.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. `http://www.mccme.ru/prasolov/`.

[PS] *В.В. Прасолов и М.Б. Скопенков.* Рамсеевская теория зацеплений // Мат. Просвещение. 2005. 9. С. 108-115.

[PT] *А.А.Полянский, П.Б.Тарасов.* Избранные задачи экзамена по дискретному анализу, Мат. Просвещение, 21 (2017).

[R04] *A. M. Raigorodskii*, The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary, Math. Intelligencer, 26:3 (2004) 4–12.

[R08] *Райгородский А.М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2008. `http://www.mccme.ru/free-books/dubna/raigor-4.pdf`

[R10] *Райгородский А.М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2010.

[R12] *Райгородский А.М.*, Комбинаторика и теория вероятностей. М.: Изд-во МФТИ, 2012.

[R13] *Райгородский А.М.*, Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии. М.: МЦНМО, 2013. `http://www.mccme.ru/free-books/dubna/raigor-2.pdf`

[R14] *Райгородский А.М.* Проблема Борсука. М.: МЦНМО, 2014.

[R15] *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.

[RS18] *А. Ремизова и А. Скопенков.* Простое доказательство локальной леммы Ловаса, Мат. Просвещение 22 (2018) 164-169.

[RS90] *N. Robertson and P. D. Seymour*, Graph minors VIII, A Kuratowski graph theorem for general surfaces, J. Comb. Theory, 48B (1990) 255–288.

[Ru] *Рухович А.* Степенные последовательности ориентированных графов, `http://www.mccme.ru/mmks/dec09/ruhovich.pdf`

[S] *Скопенков А.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения. `http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`

[S05] *Skopenkov A.* On the Kuratowski graph planarity criterion. `http://arxiv.org/abs/0802.3820`

Русскоязычная версия: *Скопенков А.* Вокруг критерия Куратовского планарности графов, Мат. Просвещение, 9 (2005), 116–128 и 10 (2006), 276–277.

[S06] *Скопенков А.* Олимпиады и математика. Мат. Просвещение, 10 (2006), с. 57–63.

[S08] *A. Skopenkov*, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, in: Surveys in Contemporary Mathematics, Ed. N. Young and Y. Choi, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342. arXiv:math/0604045

[S12] *Скопенков А.* Объемлемая однородность, МЦНМО, Москва, 2012. `http://arxiv.org/abs/1003.5278`

[S13] *Skopenkov A.* A two-page disproof of the Borsuk partition conjecture. `http://arxiv.org/abs/0712.4009`, v2.

Русскоязычная версия: *Скопенков А.* Короткое опровержение гипотезы Борсука. Мат. Просвещение, 17 (2013), с. 88–92.

[S14] *A. Skopenkov.* Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory, `http://arxiv.org/abs/1402.0658`

[S15] *Скопенков А.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. М.: МЦНМО, 2020. `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf`

[S95] *A. Skopenkov*, A description of continua basically embeddable in $\mathbb{R}^2$, Topol. Appl. 65 (1995) 29–48.

[S96] *A. Skopenkov*, The Borsuk problem, Quantum, 7:1 (1996) 16–21, 63.

[Sa] *K. S. Sarkaria*, Kuratowski complexes, Topology, 30 (1991) 67–76.

[So] *Соловьева Ф. И.* Введение в теорию кодирования. Новосибирск, 2006. `http://tc.nsu.ru/uploads/codingtheory.pdf`

[Su] *Д. Судзуки, Основы дзэн-буддизма.* Наука дзэн — ум дзэн. Киев: Преса України. 1992.

[SVY] *А. Волостнов, А. Скопенков и Ю. Яровиков,* Этюд о рекуррентных соотношениях, Мат. Просвещение 21 (2017), 213-218.

[Ta] Handbook of Graph Drawing and Visualization. Ed. R. Tamassia, CRC Press. `https://cs.brown.edu/~rt/gdhandbook/`.

[Th] *C. Thomassen, Kuratowski's theorem*, J. Graph. Theory, 5 (1981) 225–242.

[Ve] *Веснин А.Ю.* Гамильтоновы графы и остовные подграфы: задачи для исследования, материалы Московской математической конференции школьников. `http://www.mccme.ru/mmks/mar08/vesnin3.pdf`

[Vi] *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.

[VS88] *Волков М., Силкин Н.* Кого послать на Марс? // Квант (1988) N8, с. 51–57. `http://kvant.mccme.ru/1988/08/kogo_poslat_na_mars.htm`

[VS97] *Н.Б. Васильев и А.Б. Скопенков.* Решение задачи М1566. // Квант (1997) N2, с. 24.

[Ya] *Dian Yang*, An elementary proof of Borsuk theorem, `http://arxiv.org/abs/1010.1990`.

[ZSS] Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. Изд-во МЦНМО, 2017. `http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf`

[1] `https://www.dpmms.cam.ac.uk/~dc340/EGT3.pdf`

[2] `http://www.cs.rit.edu/~spr/ElJC/ejcram14.pdf`

[3] `http://www.math.upenn.edu/~wilf/website/Three\%20problems.pdf`

[4] `http://www.unn.ru/math/no/5/_nom5_001_ilyin.pdf`

[5] `http://www.sosmath.com/calculus/sequence/stirling/stirling.html`

[6] `http://www.spbstu.ru/publications/m_v/n_002/Polischook/Stirling.pdf`

[7] `http://arxiv.org/pdf/1109.2546.pdf`

[8] `http://dainiak.blogspot.ru`

Мат. Просвещение: `http://www.mccme.ru/free-books/matpros`

10 Программа курса ДА 2014-19 уч. годов

Нужно уметь решать задачи, аналогичные пп. 2.1-2.7, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.5, 5.1, 5.2, 5.5, 6.1-6.3, 7.1, 7.2 книги

Элементы дискретной математики в задачах, А.А. Глибичук, А.Б. Дайняк, Д.Г. Ильинский, А.Б. Купавский, А.М. Райгородский, А.Б. Скопенков, А.А. Чернов, Изд-во МЦНМО, 2016, `http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf`

В скобках указана ориентировочная сложность пункта программы. Формального смысла эти баллы не имеют (ср. со сценарием экзамена на `https://www.mccme.ru/circles/oim/home/bally.pdf`). Но мы надеемся, что они помогут студентам разумно организовать подготовку к экзамену: не изучать «сложных» пунктов программы, пока не изучены «простые». Пункты «на 5 и меньше» могут использоваться в дальнейших курсах без повторения материала.

«Без доказательства» сокращается до «б/д». В пунктах программы приводятся ссылки на вышеуказанную книгу (или на имеющийся в ней список литературы или на другую литературу).

Образцы вопросов приведены после программы и в [PT].

Спасибо студентам за вопросы, благодаря которым появились мелкие уточнения.

Глава 2. Графы (1-й семестр)

1. *(3) Определение графа, графов с петлями и кратными ребрами. Ориентированые графы. Соотношение между числом вершин и ребер дерева. (П. 2.1 и задачи 2.2.1.)*

2. *(5) Код Прюфера. Формула Кэли.(Задачи 2.2.3.a и 2.2.4.c.)*

3. *(6) Точная формула для числа унициклических графов. (Задача 2.2.5.b.)*

4. *(5) Определение плоских и планарных графов. Формула Эйлера (б/д). Примеры непланарных графов. Критерий Понтрягина–Куратовского планарности графов (б/д).(П. 2.4 и задачи 2.4.4.c.)*

5. (только в 2014-2016) *(6) Классификация правильных многогранников с точностью до изоморфизма их графов.* 6*-раскрашиваемость любой карты на плоскости. (Задачи 2.4.5.cdefg и 2.4.1.a.)*

6. *(3) Пути и циклы. Простые пути и циклы. Критерии эйлеровости графа и ориентированного графа. (Задачи 2.5.3.ac.)*

7. *(5) Последовательности и графы де Брёйна.*
(только в 2014-2016) *Правило «ноль лучше единицы». (Задачи 2.5.5–2.5.8.)*

8. *(5) Гамильтоновы пути и циклы. Достаточное условие Дирака гамильтоновости графа. (Задача 2.6.2.b.)*

9. *(7) Вершинная связность и число независимости графа. Достаточное условие гамильтоновости в их терминах. Гамильтоновость графа* 1*-пересечений* 3*-элементных подмножеств* n*-элементного множества. (Задачи 2.6.3, 2.6.4 и 2.6.5.c.)*

10. *(3) Гамильтоновы цепи в турнирах. Нижняя оценка с доказательством, верхняя — без. (Задача 2.6.7.)*

11. *(5) Теорема Турана о числе ребер в графе с данным числом вершин и числом независимости. Асимптотика наибольшего числа ребер в графе с* n *вершинами без* k*-клик. (Задачи 2.7.1 и 2.7.6.)*

12. *(6) Оценка числа ребер у дистанционного графа на плоскости и в пространстве произвольной размерности. Сравнение с теоремой Турана. (Задачи 2.7.2, 2.7.4, 2.7.5.)*

Глава 3. Раскраски графов (1-й семестр)

13. *(4) Соотношения между хроматическим числом, числом независимости и кликовым числом. (Задача 3.1.3 из главы 3.)*

Глава 4. Основы теории Рамсея (2-й семестр)

14. *(3) Числа Рамсея* $R(s,t)$*: точные значения для* $s+t \leqslant 7$*. Рекуррентная верхняя оценка Эрдеша–Секереша. (Задачи 4.1.1, 4.1.2.ac.)*

15. *(4) Следствие рекуррентной верхней оценки Эрдеша–Секереша для недиагональных и диагональных чисел Рамсея. Уточнение Конлона (б/д). Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея с помощью простого вероятностного метода. (Задачи 4.1.2.b, 4.1.5, 4.1.6.)*

16. *(5) Многоцветные числа Рамсея $R_k(l_1, \ldots, l_r)$ и их рекуррентная верхняя оценка. Следствие для $R_3(s,t)$. Нижняя вероятностная оценка для $R_3(s,s)$. (Задачи 4.2.2.c, 4.2.7, 4.3.3, 4.3.4.)*

17. *(9) Верхняя оценка Конлона для двудольных чисел Рамсея: лемма с конкретными l, m, r, s и ее аналог с последовательностями (б/д); доказательство оценки с использованием леммы. (Есть оригинальная статья Conlon'a, скачивается с его домашней страницы.)*

18. *(8) Конструктивная нижняя оценка Франкла–Уилсона для $R(s,s)$. Доказательство лемм для кликового числа и для числа независимости. [R10]*

Глава 5. Системы множеств (гиперграфы) (19-26 1-й семестр, 21-30 2-й семестр)

19. *(7) Гиперграфы. Гиперграфы t-пересечений. Теорема Эрдеша–Ко–Радо (о максимальном числе ребер в гиперграфе 1-пересечений). (Задача 5.1.3.)*

20. *(6) История последовательных продвижений: теорема Эрдеша–Ко–Радо (общий случай), теорема Франкла, теорема Уилсона, теорема Алсведе–Хачатряна. (Все б/д, но с подробными комментариями. Нужно продемонстрировать четкое понимание, что за параметры выбираются в теореме АХ: когда эта теорема превращается в ЭКР; когда оценка становится тривиальной ($\binom{n}{k}$); примеры конструкций, в которых можно явно посчитать, что оценка ЭКР не самая лучшая и АХ ее превосходит.) (Задачи 5.1.2, 5.1.3.)*

21. *(3) Системы общих представителей (с.о.п.). «Тривиальные» нижние и верхние оценки.*

22. *(5) Верхняя оценка размера минимальной с.о.п. с помощью жадного алгоритма. (Задачи 5.2.1, 5.2.5, 5.2.6.a.)*

23. *(8) Конструктивная нижняя оценка размера минимальной с.о.п. (Задача 5.2.6.b.)*

24. *(7) Нижняя оценка размера минимальной с.о.п. с помощью обобщенных с.о.п. (Задача 5.2.6.c.)*

25. *(9) Вероятностная нижняя оценка размера минимальной с.о.п. Следствие из нее. (Задача 5.2.6.def.)*

26. *(5) Системы различных представителей. Теорема Холла.*

27. *(5) Перманент. Формула разложения по строке. Связь с количеством систем различных представителей.*

28. *(6) С.о.п. в геометрии (теорема о треугольниках на плоскости, б/д). Размерность Вапника–Червоненкиса. Теорема Радона (б/д). Подсчет размерности семейства полупространств. Лемма о числе областей в пространстве заданной мощности и размерности. Лемма о размерности измельчения (достаточно доказать существование верхней оценки, не обязательно такой, как на лекции) (Задачи 5.5.1 и 5.5.2.bc.)*

(только в 2014-16) Оценка числа подмножеств в семействе заданной размерности на n-элементном множестве. (Задача 5.5.9.)

29. *(8) Эпсилон-сети. Теорема Вапника–Червоненкиса об эпсилон-сетях и теорема о треугольниках как частный случай.*

30. (только в 2014-18) *(4) Теорема Вапника–Червоненкиса (б/д). Приложения в статистике: равномерная сходимость в ЗБЧ (УЗБЧ) и теорема Гливенко–Кантелли как частный случай.*

Глава 6. Аналитические и вероятностные методы (31-35 1-й семестр, 36-48 2-й семестр)

31. *(3) Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Оценки для $\binom{n}{n/2}$ с помощью тождества. (Задачи 6.1.3.b и 6.1.1.ab.)*

32. *(5) Асимптотика $\ln n!$ и $\sqrt[n]{n!}$ с доказательством без использования формулы Стирлинга. Формула Стирлинга (б/д). (Задача 6.1.6.)*

33. *(5) Оценки биномиальных коэффициентов вида $\binom{n}{[an]}$, $a \in (0,1)$. Аналогичный результат для полиномиальных коэффициентов. (Задача 6.1.1.)*

34. *(5) Асимптотика для* $\binom{n}{k}$ *при* $k^2 = o(n)$. *Оценки той же величины при больших* k. *Асимптотики для* $\binom{n}{n/2}/\binom{n}{n/2-x}$. *(Задачи 6.1.3 и 6.1.4.)*

35. *(8) Асимптотика числа унициклических графов. (Задача 2.2.5.c.)*

36. *(5) Симметричный случай ЛЛЛ (б/д). Вывод оценки диагонального числа Рамсея (теорема Спенсера). (Задачи 6.2.15, 6.2.23.b и 6.2.28.a.)*

37. *(8) Симметричный и несимметричный случай ЛЛЛ (с доказательством симметричного либо напрямую, либо с доказательством несимметричного и выводом из него). (Задачи 6.2.15 и 6.2.28.a.)*

38. *(10+) Вывод из несимметричного случая ЛЛЛ нижней оценки для* $R(3,t)$ *(с выписыванием неравенств, требуемых для применения ЛЛЛ, но без их доказательства). Самые точные известные оценки для* $R(3,t)$ *(б/д). (Задача 6.2.28.b и замечание после нее.)*

39. *(5) Двудольные числа Рамсея: нижние оценки простым вероятностным методом и с помощью ЛЛЛ. Отличие нижних оценок для двудольных чисел Рамсея от аналогичных нижних оценок для* $R(s,t)$. *(Литературы нет; делается совершенно аналогично тому, как то же самое делается для обычных чисел Рамсея.)*

40. *(6) Случайные графы. Неравенства Маркова и Чебышёва. Неравенство для случайного блуждания. (п. 6.3, [R08, п. 1.11 и 1.12])*

41. *(7) Связность случайного графа: случай* $p = c\ln n/n$ *при* $c < 1$. *Теоремы о* $\dfrac{\ln n + \gamma + o(1)}{n}$ *и о гигантской компоненте (б/д). [R08, п. 2.5]*

42. *(8) Связность случайного графа: случай* $p = c\ln n/n$ *при* $c > 1$. *[R08, п. 2.5]*

43. *(4) Теоремы Боллобаша о хроматическом числе случайного графа (б/д). Оценки хроматического числа случайного графа при* $p = o(1/n^2)$ *и* $p = o(1/n)$. *[R08, п. 2.6]*

44. (только в 2017-18) *(9) Теоремы Боллобаша о хроматическом числе случайного графа (б/д). Оценки хроматического числа случайного графа при $p = c/n$, $c < 1$. Случай, когда функция из второй теоремы Боллобаша может стремиться к бесконечности.[R08, п. 2.6]*

45. (только в 2017-19) *(8) Оценка отклонения для липшицевой по вершинам случайной величины (б/д). Теорема Боллобаша о концентрации в четырех значениях.*

46. *(7) Сравнение оценок хроматического числа через кликовое число и число независимости в терминах случайных графов: одна «почти всегда» значительно лучше другой (распределение кликового числа и числа независимости). [R08, п. 2.7]*

47. *(10) Теорема о том, что почти наверное жадный алгоритм найдет множество, размер которого лишь, как максимум, в 2 раза отличается от реального. Теорема Кучеры о слабости жадного алгоритма на специальных графах (б/д). (А. Райгородский, "Экстремальные задачи теории графов и Интернет" , Интеллект.)*

48. *(8) Теорема Эрдеша о графе с большим обхватом и большим хроматическим числом. (Задача 6.3.3.с.)*

Глава 7. Алгебраические методы (49-56 1-й семестр, 57-61 2-й семестр)

49. *(5) Кнезеровский граф. Верхняя оценка его хроматического числа. Простые нижние оценки. Примеры конкретных кнезеровских графов. Кликовое число и число независимости кнезеровского графа. ([R7] := А. Райгородский, "Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике" , МЦНМО.)*

50. *(6) Верхняя оценка хроматического числа кнезеровского графа. Теорема Ловаса о хроматическом числе кнезеровского графа (б/д). [R7] (8) Формулировка теоремы Борсука–Улама и ее применение к доказательству теоремы Ловаса. [R7]*

51. (только в 2014-16) *(7) Теорема Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана в разных формулировках, но с доказательством только в случае плоскости и трехмерного пространства. [R7]*

52. *(6) Максимальное число $m(n,k,t)$ подмножеств n-элементного множества, в каждом из которых ровно k элементов и среди которых любые два множества пересекаются не по t элементам. Точное значение для $m(n,3,1)$: явная конструкция и оценка по индукции. Линейно-алгебраическая оценка для $m(n,3,1)$. Аналогичная оценка для $m(n,5,2)$ и ее асимптотическая неулучшаемость. [R15]*

53. *(7) Общая теорема Франкла–Уилсона для $m(n,k,k-p)$ при $k<2p$. (Задача 7.1.7 и [R15].)*

54. (только в 2015 и 2019) *(9) Теорема Франкла–Уилсона об $m(n,k,k-p)$ при $k \geqslant 2p$. [R15]*

55. (только в 2015 и 2019) *(7) Точность обеих теорем Франкла–Уилсона при постоянных k, t. Максимальное число k-элементных подмножеств n-элементного множества, из которых любые два множества пересекаются не более чем по t элементам. Связь с теорией кодирования, теорема Редля (б/д). [R15]*

56. *(6) Хроматические числа пространств. Интерпретация величины $m(n,k,t)$ как числа независимости дистанционного графа. Нижняя оценка хроматического числа пространства с помощью результатов для $m(n,k,t)$. Возможные улучшения. ([R15] и А. Райгородский, "Хроматические числа".)*

57. *(7) Теорема Адамара о максимальном значении определителя. Комбинаторное определение матрицы Адамара. Перестановка строк/столбцов. Нормализованная матрица. Размер матрицы Адамара кратен четырем. Гипотеза о существовании. Пример для степеней двойки. Кронекерево (тензорное) произведение матриц Адамара. Конструкция Пэйли матриц Адамара $4k \times 4k$ для простого числа $4k-1$ с использованием символа Лежандра. Теорема о плотности порядков матрицы Адамара в натуральном ряде (б/д).(Задачи 7.2.1-7.2.3, определения и гипотеза в §7.2, [Hal, AS].)*

58. *(6) Задача о раскраске гиперграфа: верхняя оценка уклонения величиной $\sqrt{2n\ln(2s)}$ с доказательством и величиной $6\sqrt{n}$ б/д. [R10]*

59. *(8) Задача о раскраске гиперграфа: нижняя оценка уклонения величиной* $\sqrt{n}/2$ *с помощью матриц Адамара.[R10]*

60. (только в 2014-2018) *(4) Интерпретация матриц Адамара в терминах дистанционного графа, возникающего в теореме Франкла–Уилсона (клики).*

61. (только в 2014, 2018 и 2019) *(9) Проблема Борсука. Нижняя оценка числа Борсука. (п. 7.3 и [R14])*

ОБРАЗЦЫ ВОПРОСОВ НА ЭКЗАМЕНЕ

Предварительная часть (вариант 2014 года). *Нужен только ответ/формулировка; доказательства приводить не нужно.*

1. Найдите асимптотику биномиального коэффициента $\binom{n}{k}$ при $k^2 = o(n)$.

2. Найдите количество деревьев с данными n вершинами, с точностью до изоморфизма.

3. Дайте определение гамильтонова цикла в графе. (Можно использовать только определение графа. Если Вы используете другие определения — например, цикла — то их тоже нужно дать.)

4. Сформулируйте теорему о хроматическом числе случайного графа в модели $G(n,p)$ при $p = o(1/n)$ и $n \to \infty$.

5. У дистанционного графа на плоскости $4n$ вершин, и среди любых $n+1$ вершин есть ребро. Сформулируйте наилучшую оценку на количество ребер такого графа, доказанную в курсе.

6. Найдите кликовое число графа, вершины которого — все 5-элементные подмножества 20-элементного множества, и ребро между вершинами проводится в том и только в том случае, когда множества не пересекаются?

7. Найдите $R_4(15,4,4,4)$.

8. Найдите максимальную VC-размерность семейства подмножеств множества $\{1,\ldots,10\}$ в каждом подмножестве которого более 5 элементов.

Основная часть (точно таких вопросов на экзамене не будет). *Здесь главное — не ответы, а доказательства. В частности, формулировки и доказательства всех используемых студентом результатов из курса ДА (в частности, всех результатов из курса ДА, используемых для доказательства других результатов из курса ДА). При этом можно пользоваться без доказательства результатами из других курсов.*

Вопрос из билета. Существует ли 57 подмножеств 60-элементного множества, в каждом из которых 30 элементов, и любые два из которых пересекаются по 15 элементам?

Критерии. Максимальное количество очков 7.

Конструкция с использованием задачи 7.2.4 без ее доказательства — 2 очка.

За подсказку ‘вспомните матрицы Адамара’ снимается 2 очка.

Доп. вопрос попроще. Каково наибольшее число ребер в графе с 52 вершинами, в котором среди любых 5 вершин есть 2, не соединенные ребром?

Критерии. Максимальное количество очков 6.

Правильный ответ без доказательства — 1 очко.

Правильный ответ с выводом из теоремы Турана без ее доказательства — 2 очка.

Правильный ответ с выводом из теоремы Турана плюс конструкция ‘максимального графа’ без доказательства верхней оценки — 3 очка.

За подсказку ‘вспомните теорему Турана’ снимается 2 очка.

Доп. вопрос посложней. Укажите функцию $f(n)$, для которой $R(n,n) \gtrsim f(n)$. (Чем больше функция, тем выше Ваша оценка.)

Критерии. Максимальное количество очков 9.

За оценку типа $R(n,n) \gtrsim n^2$ ставится 1 очко.

За оценку типа 4.1.5.b ставится 6 очков.

За оценку типа 6.2.21.b ставится 9 очков.

Если при этом не доказывается неравенство $n! \geqslant (n/e)^n$ (6.1.6.c), то снимается 2 очка (это неравенство несложно доказывается без использования формулы Стирлинга; его вывод из формулы Стирлинга, не доказанной в курсе, не считается доказательством).

Если при этом не доказывается ЛЛЛ в симметричной форме (6.2.15.b), то снимается 5 очков (ЛЛЛ в симметричной форме студент может либо напрямую, либо *доказав* ЛЛЛ в несимметричной форме и выведя ЛЛЛ в симметричной форме; вывод симметричной формы из несимметричной в этом месте не считается доказательством симметричной, хотя и входит в программу).

За подсказку — формулировку 4.1.5.c — снимается 2 очка. За подсказку — формулировку каждого следующего пункта этой задачи — снимается еще по 1.

Призовой вопрос. Существуют ли хотя бы одно k и подмножество k-мерного пространства, которое невозможно разбить на $2k^2$ частей меньшего диаметра?