Оглавление

Введение

Зачем эта книга?

Мы приводим подборки задач по комбинаторным разделам математики. Эти задачи подобраны так, что в процессе их решения читатель (точнее, решатель) освоит основы важных теорий — как классических, так и современных. Ср. [S06], [ZSS], [Ju]. Книга будет полезна участникам кружков для младшекурсников и старшеклассников (в частности, ориентированных на олимпиады), а также их руководителям. Некоторые приводимые красивые задачи и важные темы малоизвестны в традиции кружков по математике, но полезны как для математического образования, так и для подготовки к олимпиадам.

По нашему мнению, решение этих задач (т. е. изучение соответствующих теорий) также полезно всем, кто хочет стать математиком, специалистом по computer science или программистом, работающим в наукоёмких отраслях информационных технологий. Именно таких специалистов мы готовим на факультете инноваций и высоких технологий (ФИВТ) Московского физико-технического института. Приведенные задачи используются при изучении курсов дискретных структур и дискретного анализа на этом факультете. Эти курсы читают А.Б. Дайняк и А.М. Райгородский, а остальные авторы ведут семинары по этим курсам. Некоторые материалы основаны на занятиях, проведенных А.Б. Скопенковым в Кировской летней математической школе (до 2016), Московской выездной олимпиадной школе (с 2004), а также на кружках «Математический семинар» (1994-2013) и «Олимпиады и математика» (с 2003, в школе «Интеллектуал» с 2015).

Комбинаторика — один из самых красивых разделов современной математики. Постановки задач этого раздела зачастую доступны школьникам. А результаты, тем не менее, носят фундаментальный характер и важны как для развития других разделов математики, так и для приложений в информатике, биологии, экономике и др. Мы постараемся рассказать о тех мощных современных методах, благодаря которым комбинаторика приобретает новый облик, становясь серьезной наукой. Среди этих методов, помимо более или менее стандартных, вероятностный и линейно-алгебраический методы. Они лежат в основе самых продвинутых комбинаторных результатов, полученных за последние десятилетия.

Параграфы второй половины книги посвящены активно развивающимся областям математики. Хотя здесь изучаются только самые простые результаты и методы, они дают некоторое представление об основных направлениях научных исследований в соответствующих областях. С этой же целью приводятся *замечания*, которые не используются ни в формулировках, ни в решениях задач. Важные факты выделены словом «теорема» или «следствие».

Используемый материал.

Формулировки большинства задач доступны старшеклассникам, интересующимся математикой; [1] мы приводим все необходимые определения, выходящие за рамки школьной программы и не всегда изучаемые на кружках. Без напоминания используются только простейшие определения и результаты теории чисел [GIM, §8-§9], [Vi, §§1-3], [ZSS, §§2.1-2.6, 3.1 и 3.3]. Если в некотором разделе для понимания условий или для решения задач нужны дополнительные сведения (или консультация специалиста), то в начале соответствующего раздела приводятся ссылки.

При этом многие задачи трудны: для их решения нужно предварительно прорешать другие приведенные задачи на данную тему.

Как устроена книга.

Эту книгу не обязательно читать (точнее, прорешивать) подряд. Параграфы и разделы книги практически независимы друг от друга (кроме разделов в §3 и §4, которые желательно прорешивать подряд). Если в задаче одного из разделов все-таки используется материал другого раздела, то либо эту задачу можно игнорировать, либо посмотреть конеретно указанный материал другого раздела. Основные обозначения приведены в конце введения. Основные понятия и обозначения теории графов введены в §2.1.

При этом параграфы расположены примерно в порядке возрас-

---

[1] Часть материала (например, §1.1) на некоторых кружках и летних школах изучается даже шестиклассниками. Однако приводимые подсказки, указания и решения рассчитаны на читателей с некоторой математической культурой (необходимой для освоения бо́льшей части книги). Разбирать эти решения с шестиклассниками нужно по-другому, см., например, [GIF].

тания сложности материала.

К важнейшим задачам приводятся подсказки, указания и решения. Подсказки и указания расположены в конце каждого параграфа. Однако к ним стоит обращаться после прорешивания каждой задачи.

Общие замечания к формулировкам задач.

Задачи обозначаются жирными цифрами. Если в условии задачи написано «найдите», то нужно дать ответ без знака суммы и многоточия. Если же условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Как правило, мы приводим *формулировку* утверждения перед его *доказательством.* [2] В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться следующие задачи. Это всегда явно оговаривается в подсказках, а иногда и прямо в тексте. (На занятии задача-подсказка выдается только тогда, когда школьник или студент немного подумал над самой задачей.)

Большинство задач не оригинальны, но установить первоисточник не представляется возможным. Многие задачи взяты из [IKRS], [ZSS], [Lo] и из неопубликованных материалов кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ, на которой работают авторы.

О литературе.

В списке литературы мы приводим только те *стандартные учебники* по комбинаторике и теории графов, которые по тем или иным причинам чаще используем в преподавании. Также мы приводим ссылки на всю известную нам более серьезную учебно-научную литературу. Но этот список тоже не претендует на полноту, поскольку мы можем не знать о некоторых публикациях.

В списке литературы [Ga, GKP, Har, Hal, KS, **?**, R15, R14, R10, R08, S05, S13, VS88, 8] и [AM, Ig, JLR, Ju, KZP, KR, **?**, Pr, Vi, R12, R13, S15] — базовые учебники и статьи по темам этой книги и по

[2] Часто происходит обратное: формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только *после* продолжительного изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это способствует появлению представления о математике как науке, изучающей немотивированные понятия и теории. Такое представление принижает ценность математики.

Основные обозначения

• $[x]$ — (нижняя) целая часть числа x.

• $d \mid n$ — число n делится на число d (для целых d и n).

• $\mathcal{R}_n$ — множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.

• $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ — множества всех действительных, рациональных и целых чисел соответственно.

• $\mathbb{Z}_2$ — множество $\{0, 1\}$ остатков от деления на 2 с операциями сложения и умножения по модулю 2.

• $\mathbb{Z}_m$ — множество $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ остатков от деления на m с операциями сложения и умножения по модулю m.

• $\binom{n}{k}$ — количество k-элементных подмножеств n-элементного множества (другое обозначение: C_n^k).

• $\binom{X}{k}$ — множество всех k-элементных подмножеств множества X.

• $|X|$ — число элементов во множестве X.

• $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ — разность множеств A и B (не путайте этот знак с $/$).

• $A \sqcup B$ — дизъюнктное объединение множеств A и B. Результат этой операции совпадает с обычным объединением множеств A и B, но при этом подчеркивается, что $A \cap B = \varnothing$.

• $A \subset B$ — «множество A содержится в множестве B». (В некоторых других книгах это обозначают $A \subseteq B$, а $A \subset B$ означает «множество A содержится в множестве B и не равно B».)

• $x := a$ означает фразу «обозначим $x = a$».

1 Элементы комбинаторики

1.1 Подсчёт и комбинаторные тождества

1.1.1. (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (b) Найдите сумму $\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n}$.

1.1.2. (a) *Правило Паскаля.* $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$, если $0 \leqslant k \leqslant n-1$. (Подсказка приведена после задачи 1.1.4.a.)
(b) $\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = (k+1)\left\{ {n \atop k+1} \right\} + \left\{ {n \atop k} \right\}$. Здесь $\left\{ {n \atop k} \right\}$ — количество разбиений n-элементного множества на k частей (т. е. непустых подмножеств); разбиения считаются неупорядоченными, т. е. разбиение множества $\{1, 2, 3\}$ на части $\{1, 2\}$ и $\{3\}$ и разбиение того же множества на части $\{3\}$ и $\{1, 2\}$ считаются одинаковыми. Ср. с задачей 1.4.7.e.

Замечание. Числа $\left\{ {n \atop k} \right\}$ называются *числами Стирлинга второго рода*; подробнее о них см., например, [GKP, с. 287].

1.1.3. (a) Во скольких подмножествах множества $\mathcal{R}_{11}$ не найдётся двух подряд идущих чисел?
(b) То же для *трёх* подряд идущих чисел.

1.1.4. (a) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.
(b) *Бином Ньютона.* $(a+b)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$.

Как решать задачи этого раздела? Мы предлагаем три метода, которые продемонстрируем на примере трех доказательств правила Паскаля 1.1.2.a. (Большинство задач этого раздела решаются несколькими методами из трех предложенных Но, конечно, не каждый метод применим к каждой задаче. Обычно в указаниях для краткости приводится только один способ решения.)

Первое доказательство: комбинаторные рассуждения. Неформально говоря, идея в следующем: чтобы выбрать $k+1$ футболистов, нужно либо выбрать $k+1$ полевых, либо вратаря и k полевых. Приведем строгое изложение этой идеи.

Количество $(k+1)$-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_{n+1}$,

• содержащих число $n+1$, равно $\binom{n}{k}$, так как такие подмножества при выкидывании числа $n+1$ становятся подмножествами в $\mathcal{R}_n$;

• не содержащих число $n+1$, равно $\binom{n}{k+1}$, так как такие подмножества являются также подмножествами в $\mathcal{R}_n$.

Другая запись этого решения. Определим отображение

$$f : \binom{\mathcal{R}_{n+1}}{k+1} \to \binom{\mathcal{R}_n}{k+1} \bigsqcup \binom{\mathcal{R}_n}{k} \quad \text{формулой} \quad f(A) := A \backslash \{n+1\}.$$

Остаётся доказать, что это — биекция, т.е. взаимно однозначное соответствие (например, определив явной формулой обратное отображение).

Второе доказательство: использование явной формулы 1.1.4.a. Имеем

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k-1)!k!}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{n!}{(n-k-1)!k!} \cdot \frac{n+1}{(k+1)(n-k)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Третье доказательство: использование бинома Ньютона 1.1.4.b. Число $\binom{n+1}{k+1}$ является коэффициентом при x^{k+1} в многочлене

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = x(1+x)^n + (1+x)^n.$$

Поэтому число $\binom{n+1}{k+1}$ равно сумме коэффициентов при степенях x^k и x^{k+1} у многочлена $(1+x)^n$. Отсюда следует требуемое равенство.

1.1.5. Найдите суммы:

2 Основы теории графов

2.1 Основные определения

Графом $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые двухэлементные подмножества (т. е. неупорядоченные пары различных элементов) которого выделены. Множество выделенных подмножеств обозначается $E = E(G)$. Таким образом, $E \subset \binom{V}{2}$.

Элементы множества V называются *вершинами*. Выделенные пары вершин называются *рёбрами*. Хотя эти пары неупорядоченные, в теории графов их традиционно обозначают круглыми скобками. Вершина, принадлежащая ребру, называется *его вершиной*. Если вершины a и b соединены ребром, они называются *соседними* или *смежными*, а само ребро (a, b) называется *проходящим* через вершину a и вершину b или *инцидентным* вершине a и вершине b.

Общепринятый термин для понятия графа, данного здесь, — *граф без петель и кратных рёбер*, или *простой граф*.

Если не оговорено противное, то через n и e обозначаются количества вершин и рёбер рассматриваемого графа, соответственно.

Граф можно представлять себе как набор точек (например, на плоскости), некоторые пары которых соединены ломаными. См. рис. 3, 4, 5, 8, 9, 16 и 17 ниже. При этом только концы каждой ломаной являются вершинами графа и каждая пара вершин не соединена более чем одной ломаной. Точки называются *вершинами* графа, а ломаные — *рёбрами*. Ломаные могут пересекаться, но точки пересечения «не считаются», т.е. не являются вершинами.

Путем P_n называется граф с вершинами $1, 2, \ldots, n$ и ребрами $(i, i{+}1)$, $i = 1, 2, \ldots, n{-}1$. *Циклом* C_n называется граф с вершинами $1, 2, \ldots, n$ и ребрами $(1, n)$ и $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. (Не путайте эти графы с *путем в графе* и *циклом в графе*, определенными ниже.)

Граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром, называется *полным* и обозначается K_n. Если вершины графа можно разделить на две части так, что нет рёбер, соединяющих вершины из одной и той же части, то граф называется *двудольным*, а части называются *долями*. Через $K_{m,n}$ обозначается двудольный граф с долями из m и из n вершин, в котором имеются все mn рёбер между вершинами разных долей.

2.1.1. В любом графе есть двудольный подграф, содержащий не менее половины рёбер графа.

Степенью $\deg v$ вершины v графа называется число выходящих из нее рёбер. *Изолированной вершиной* называется вершина, из которой не выходит ни одного ребра.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально, граф G называется *подграфом* графа H, если каждая вершина графа G является вершиной графа H, и каждое ребро графа G является ребром графа H. При этом две вершины графа G, соединённые ребром в графе H, не обязательно соединены ребром в графе G.

k-кликой в графе называется его подграф с k вершинами, являющийся полным. *Независимым множеством* или *антикликой* в графе называется набор его вершин, между которыми нет рёбер.

Путем в графе называется последовательность $v_1e_1v_2e_2\dots e_{n-1}v_n$, в которой для любого i ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}. Число $n-1$ называется *длиной* пути. (Ребра $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ не обязательно попарно различны.)

Циклом в графе называется последовательность $v_1e_1v_2e_2\dots e_{n-1}v_ne_n$, в которой для любого $i<n$ ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}, а ребро e_n соединяет вершины v_n и v_1. Циклы считаются одинаковыми, если они отличаются циклическим сдвигом последовательности. Число n называется *длиной* цикла. *Несамопересекающимся* называется цикл, для которого вершины $v_1, v_2, \dots, v_n$ попарно различны и рёбра $e_1, e_2, \dots, e_n$ попарно различны. Стандартный термин (менее удобный для начинающего) — *простой* цикл.

2.1.2. (a) Любой цикл, не проходящий ни по одному ребру дважды, содержит несамопересекающийся цикл.
(b) Любой цикл нечётной длины содержит несамопересекающийся цикл нечётной длины.

(c) Справедливо ли аналогичное утверждение для циклов чётной длины, не проходящих ни по одному ребру дважды?
(d) В графе есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра a и b, а также есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра b и c. Тогда есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра a и c.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём, и *несвязным* иначе.

2.1.3. Если степень каждой из n вершин графа больше $\frac{n}{2} - 1$, то граф связен.

Ясно, что «соединённость некоторым путём» является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. *Связной компонентой* графа называется любой класс этого отношения эквивалентности.

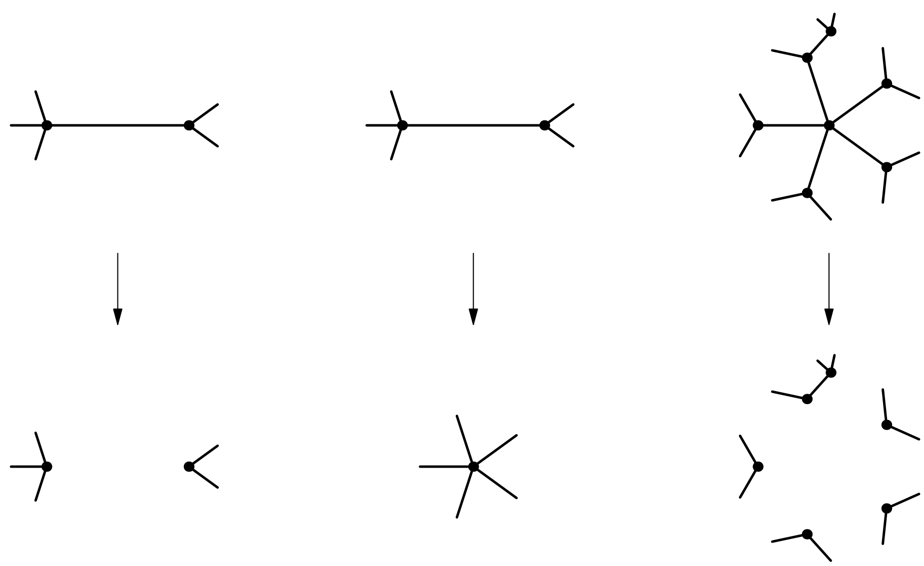


Рис. 2: Удаление ребра $G - e$, стягивание ребра G/e и удаление вершины $G - x$

Определение операций удаления ребра и удаления вершины ясно из рис. 2. Операция *стягивания ребра* (рис. 2) удаляет из графа это ребро и заменяет вершины A и B этого ребра на одну вершину D, а все рёбра, выходящие из вершин A и B в некоторые вершины, заменяет на рёбра, выходящие из вершины D в те же вершины. (Эта операция отличается от стягивания ребра в мультиграфах, см. §2.5, тем, что каждое получившееся ребра кратности больше 1 заменяется на ребро кратности 1.) Например, если граф — цикл с четырьмя вершинами, то при стягивании любого его ребра получится цикл с тремя вершинами.

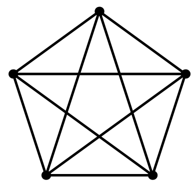
Ориентированным графом (без петель и кратных рёбер) $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые *упорядоченные* пары несовпадающих элементов которого выделены. Множество выделенных пар обозначается $E = E(G)$. Таким образом, $E \subset \{(x, y) \in V \times V \mid x \neq y\}$. Если выделены и пара (a, b), и пара (b, a), то это ребро не называется кратным.

Ориентированный путь в ориентированном графе — такая последовательность вершин, что в каждую следующую вершину ведет ориентированное ребро из предыдущей. Аналогично вводится понятие ориентированного цикла.

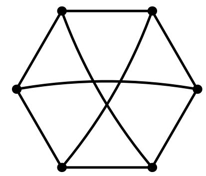
2.1.4. Пусть дан ориентированный граф G, у которого на каждом ребре u написан вес $f(u)$. (Этот вес можно понимать как работу, которую нужно затратить для того, чтобы пройти по ребру от начала до конца.) Функция $p : V(G) \to \mathbb{R}$ («потенциал») такая, что $f(x, y) = p(x) - p(y)$ для любого ребра $u = (x, y)$, существует тогда и только тогда, когда сумма весов рёбер любого ориентированного цикла равна нулю (при прохождении ребра по циклу в направлении, противоположном ориентации, вес в сумму берётся со знаком «минус»).

Турниром называется ориентированный граф, любые две вершины которого соединены ребром. (Т.е. для любых двух вершин v, w турнира среди его ребер есть (v, w) или (w, v), но не оба ребра сразу.) Например, если проведен чемпионат по волейболу среди нескольких команд, в котором каждая команда сыграла с каждой и нет ничьих, то можно построить ориентированный граф следующим образом. Вершины графа обозначают команды, ребра обозначают матчи, и стрелки направлены от победившей команды к побежденной. Полученный ориентированный граф будет турниром.

Некоторые другие определения приведены в начале каждого раздела.



K_5



$K_{3,3}$

Рис. 5: Непланарные графы

(b) Найдите аналог формулы Эйлера для плоского графа с k компонентами связности.

Идея доказательства формулы Эйлера проста: индукция по количеству ребер вне максимального дерева. Однако строгое доказательство непросто и включает в себя доказательство знаменитой теоремы Жордана (т.е. случая, когда граф — цикл). Оно намечено в [S, п. 1.3 «Число пересечения для ломаных на плоскости»].

Формулой Эйлера (а также теоремами Куратовского и Фари, см. ниже) в этом пункте можно пользоваться без доказательства. Ссылки даются на простые, а не на изначальные, доказательства.

2.4.3. *Применения формулы Эйлера.*

(a) Ни один из графов K_5 и $K_{3,3}$ невозможно без самопересечений нарисовать на плоскости.

(b) На плоскости отмечено n точек. Разрешается соединять некоторые две из них ломаной, не проходящей через другие точки. Два игрока по очереди соединяют ломаной какие-то две еще не соединённые точки. При этом требуется, чтобы эти ломаные не самопересекались и не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для каких n при правильной игре выигрывает тот, кто ходит первым?

(c) Перечислите все связные плоские графы (с точностью до изоморфизма), у которых степени всех вершин равны и «степени» всех граней равны (т. е. граница каждой грани состоит из одного и того же числа рёбер).

Замечание. Если пункты (a), (b) или (c) не получаются, решайте следующие пункты. Определение изоморфизма см. в §2.3.

(d)* Выпуклых *правильных* многогранников (все грани — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон, степени всех вершин равны) ровно 5 (с точностью до изоморфизма их графов). Конструкцию соответствующих многогранников нужно привести, она не предполагается известной.

(e) Для любого плоского связного графа без петель и кратных рёбер, имеющего более двух вершин, $2e \geqslant 3f$ и $e \leqslant 3n - 6$.

(f) В любом плоском графе есть вершина степени не более 5.

(g) Если каждая вершина плоского связного графа имеет степень d, граница каждой грани состоит из ровно $k \geqslant 3$ рёбер, и к каждому ребру с двух разных сторон примыкают две разные грани, то

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}.$$

(h) Верен ли аналог п. (g) без предположения «к каждому ребру...»?

2.4.4. *Картой на плоскости* называется разбиение плоскости на конечное число многоугольников (возможно, «бесконечных»). Раскраска карты называется *правильной*, если разные многоугольники, имеющие общий граничный отрезок, имеют разные цвета. Докажите, что любую карту можно правильно раскрасить в

(a) 6 цветов; (b)* 5 цветов; (c)** [Всё равно не докажете.]

Замечание. Используя конструкцию *двойственного графа*, можно доказать, что правильная раскрашиваемость любой карты на плоскости в d цветов равносильна правильной раскрашиваемости любого плоского графа в d цветов (§3.1).

Граф называется *планарным*, если его можно без самопересечений нарисовать на плоскости. Ясно, что любой подграф планарного графа планарен.

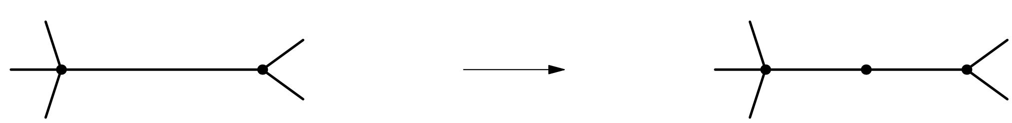


Рис. 6: Подразделение ребра

Операция *подразделения ребра* графа показана на рисунке.

Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и

2.8.3. *Частный случай рёберной теоремы Менгера.* Если в мультиграфе есть хотя бы одно ребро и при удалении любого ребра найдётся путь между вершинами a и b, то в мультиграфе найдутся два пути между вершинами a и b, не имеющие общих рёбер.

2.8.4. (a) Для любого ребра u двусвязного графа G, отличного от K_3, хотя бы один из графов $G - u$ и G/u двусвязен.
(b) Для любых двух вершин выпуклого многогранника существуют три непересекающихся (нигде, кроме этих вершин) пути по его рёбрам из одной вершины в другую. (Такие графы называют *трёхсвязными.*)
(c) Для трёхсвязного графа G с ребром xy (вершины которого — x, y) граф G/xy трёхсвязен тогда и только тогда, когда граф $G - x - y$ двусвязен.

2.8.5. (a) *Теорема Уитни (вершинная).* Мультиграф остается связным после удаления любых $k-1$ вершин тогда и только тогда, когда любые две его вершины можно соединить k путями, пересекающимися только в этих двух вершинах.
(b) *Теорема Менгера (вершинная).* Если вершины a и b мультиграфа G, не соединённые ребром, остаются в одной компоненте связности после удаления любых $k - 1$ других вершин, то a и b можно соединить k путями, пересекающимися только в этих двух вершинах.

2.8.6. Вершины A и B графа назовем *эквивалентными*, если существует такая последовательность вершин $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$, что любые две соседние вершины A_i и A_{i+1} можно соединить k путями, не имеющими общих промежуточных вершин. Тогда любые две эквивалентные вершины можно соединить k путями, не имеющими общих рёбер.

2.9 Простое доказательство теоремы Куратовского

Формулировка теоремы Куратовского приведена в п. 2.4. Приводимое в этом пункте доказательство в основном принадлежит Ю. Макарычеву (он придумал свое доказательство, еще будучи школьником!) [Ma], ср. [Th, §5]. Некоторые упрощения сделаны А. Заславским, В. Прасоловым, А. Скопенковым и А. Телишевым. По-видимому, это доказательство является наиболее простым.

Необходимость в теореме Куратовского следует из утверждения 2.4.3.a. Приведем доказательство достаточности. Ее достаточно доказать для графов без петель и кратных ребер. Поэтому будем рассматривать только такие графы. Под стягиванием ребра будем понимать стягивание ребра вместе с заменой каждого получившегося ребра кратности больше 1 на ребро кратности 1.

2.9.1. Утверждение. *Если связный граф G не изоморфен ни K_5, ни $K_{3,3}$, и для любого ребра e графа G оба графа $G-e$ и G/e планарны, то G планарен.*

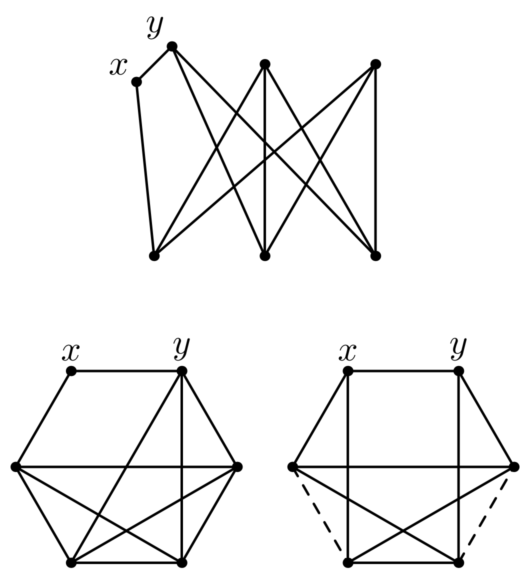


Рис. 10: «Растягивание ребра» в графах Куратовского

Доказательство достаточности в теореме Куратовского с использованием Утверждения. Используем индукцию по количеству ребер в графе. Свойство «*граф G содержит подграф, гомеоморфный графу H*» будем сокращенно записывать в виде «$G \supset H$». Шаг индукции следует из Утверждения, поскольку если для некоторого ребра e графа G

- $G-e \supset K_5$, то $G \supset K_5$.
- $G-e \supset K_{3,3}$, то то $G \supset K_{3,3}$.
- $G/e \supset K_{3,3}$, то $G \supset K_{3,3}$.

• $G/e \supset K_5$, то $G \supset K_5$ или $G \supset K_{3,3}$ (рис. 10). □

Назовем *θ-подграфом* подграф, гомеоморфный $K_{3,2}$.

2.9.2. Лемма о графах Куратовского. *Для произвольного графа K следующие три условия равносильны:*

(1) Для любого ребра xy графа K граф $K - x - y$ не содержит θ-подграфа, и из каждой вершины графа $K-x-y$ выходит не менее двух ребер.

(2) Для любого ребра xy графа K граф $K-x-y$ является циклом (содержащим $n \geqslant 3$ вершин).

(3) K изоморфен K_5 или $K_{3,3}$.

Импликации (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) в лемме о графах Куратовского очевидны и не используются в доказательстве теоремы Куратовского.

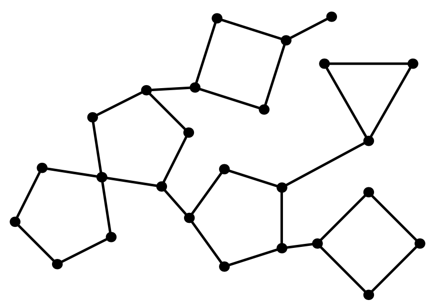


Рис. 11: «Дерево» из циклов

Доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (2) *в лемме о графах Куратовского.* Два цикла, имеющих общее ребро, содержат θ-подграф. Поэтому ввиду (1) в графе $K-x-y$ существует «висячий» цикл, т.е. цикл C, имеющий с остальным графом только одну общую вершину v (ибо граф $K - x - y$ представляет собой одно или несколько «деревьев», «вершинами» которых служат циклы, рис. 11; формально говоря, каждым блоком графа $K - x - y$ является цикл). В этом цикле C есть еще по крайней мере две вершины p и q. Так как в графе K нет вершин, из которых выходит менее трех ребер, то каждая из этих вершин p и q соединена либо с x, либо с y. Поэтому в объединении цикла C и ребер графа K, соединяющих вершины x, y, p, q, можно выделить θ-подграф. Значит, по (1) каждое ребро графа $K-x-y$ имеет конец на цикле C. Поскольку по (1) граф $K-x-y$ не содержит висячих вершин, то $K-x-y=C$. $\square$

Доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (3) *в лемме о графах Куратовского.* При $n=3$ для любых двух вершин b и c цикла $K-x-y$ граф $K-b-c$ является циклом, поэтому оставшаяся вершина цикла $K-x-y$ соединена (ребром) в K и с x, и с y. Поэтому $K=K_5$.

При $n\geqslant 4$ возьмем любые четыре последовательные вершины a,b,c,d цикла $K-x-y$. Поскольку граф $K-b-c$ является циклом, то в K одна из вершин a и d соединена с x (и не соединена с y), другая соединена с y (и не соединена с x), а отличные от a,b,c,d вершины цикла $K-x-y$ (которых нет при $n=4$) не соединены ни с x, ни с y. При $n\geqslant 5$ получаем противоречие. При $n=4$ получаем, что четыре вершины цикла $K-x-y$ соединены с x и y попеременно, откуда $K=K_{3,3}$. $\square$

Доказательство утверждения. Так как G не изоморфен ни K_5, ни $K_{3,3}$, то по лемме о графах Куратовского существует ребро $e=(xy)$ графа G, для которого в графе $G-x-y$ найдется либо вершина степени меньше 2 (в $G-x-y$), либо θ-подграф.

Если в графе G из некоторой вершины выходит одно или два его ребра, и при стягивании одного из них получается планарный граф, то и граф G планарен. Поэтому далее будем считать, что из каждой вершины графа G выходит не менее трех его ребер.

Поэтому в графе $G-x-y$ нет изолированных вершин, и если есть висячая вершина p, то она соединена и с x, и с y в графе G. Нарисуем граф $G-(xy)$ на плоскости без самопересечений. Так как в графе G из p выходит три ребра, то «с одной стороны» от пути xpy из p не выходит ребер. «Подрисуем» ребро xy вдоль пути xpy «с этой стороны» от пути. Получим изображение графа G на плоскости без самопересечений.

Рассмотрим теперь случай, когда в графе $G-x-y$ найдется θ-подграф.

Нарисуем без самопересечений на плоскости граф G/xy (рис. 12 слева). Отождествим графы $G-x-y$ и $G/xy-xy$. Изображение графа $G-x-y$ на плоскости получается стиранием ребер графа G/xy, выходящих из вершины xy. Обозначим через $\overline{C}$ границу той грани изображения графа $G-x-y$, которая содержит вершину xy

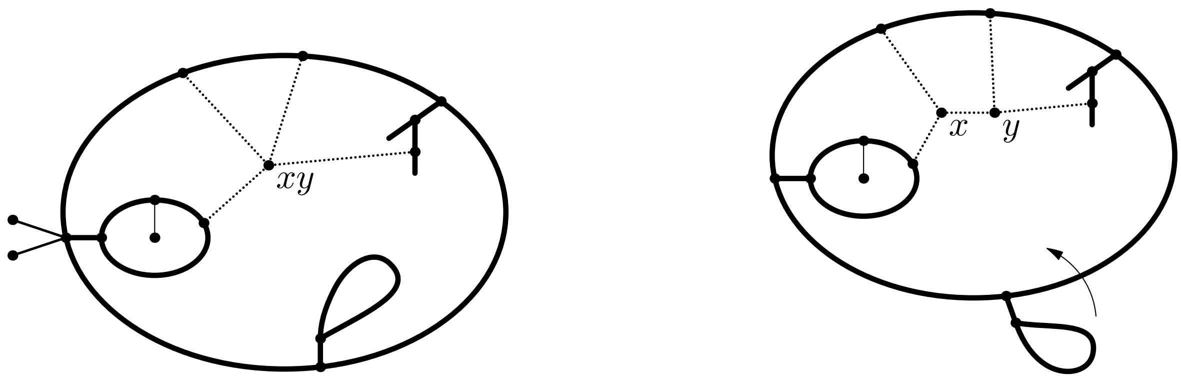


Рис. 12: Изображение на плоскости графов G/xy и G

графа G/xy. (Определение грани приведено в п. 2.4.)

В следующем абзаце мы докажем, что *граница грани не может содержать θ-подграфа.*

Это утверждение можно вывести из леммы о четности или теоремы Жордана [S, п. 1.3 «Число пересечения для ломаных на плоскости»]. Другое доказательство получается от противного: если граница грани содержит θ-подграф, то возьмем точку внутри этой грани и соединим ее тремя ребрами с тремя точками на трех «дугах» θ-подграфа. Получим изображение графа $K_{3,3}$ на плоскости без самопересечений. Противоречие.

Поэтому $G - x - y \neq \overline{C}$. Тогда ребра графа $G - x - y - \overline{C}$ [5] находятся в грани изображения графа $G - x - y$, не содержащей вершины xy. Значит, граф $\overline{C}$ разбивает плоскость. Поэтому найдется цикл $C \subset \overline{C}$, относительно которого вершина xy лежит, не уменьшая общности, внутри, а некоторое ребро графа $G-x-y-\overline{C}$ — вне.

Обозначим через R подграф в $G - x - y = G/xy - xy$, образованный всеми ребрами графа G/xy, лежащими вне цикла C. (Возможно, $R \neq G-x-y-\overline{C}$.) Так как R — подграф в $G-x-y$, то R — подграф в G.

Граф $G-R$ можно нарисовать на плоскости без самопересечений (сплошные линии на рис. 12 справа). Можно считать, что ребра

[5] Удаление подграфа — удаление всех его ребер и всех вершин, из которых выходят только ребра этого подграфа. Заметим, что удаление вершины — не то же самое, что удаление подграфа из этой вершины.

графа G, выходящие из x или y, на изображении графа $G-R$ лежат *внутри* цикла C.

В следующем абзаце мы докажем, что *каждая компонента связности графа $G-x-y-R-C$ пересекается с C не более чем по одной точке.*

Если это не так, то в $G-x-y-R-C$ есть путь, соединяющий две точки на C. На изображении графа G/xy соответствующий путь лежит внутри цикла C. Значит, этот путь разбивает внутреннюю часть цикла C на две части, одна из которых содержит xy, а другая не лежит в грани, ограниченной $\overline{C}$. Поэтому $C \not\subset \overline{C}$ — противоречие.

Поэтому можно перекинуть внутрь цикла C каждую компоненту связности графа $G-x-y-R-C$ (см. стрелочку на рис. 12 справа). Значит, граф $G-R-C$ можно нарисовать внутри цикла C. Нарисуем R вне C, как для изображения графа G/xy (рис. 12 слева). Получим изображение графа G на плоскости без самопересечений. □

Запрещенные подсистемы

Завершим этот пункт формулировками некоторых версий теоремы Куратовского.

Начнем с неформального изложения идеи. Если некоторая подсистема системы N не реализуема в другой системе M, то и N не реализуема в M. Естественная идея — попытаться найти список «запрещенных» систем, не реализуемых в M, со следующим свойством: *для того, чтобы система N была реализуема в M необходимо и достаточно, чтобы N не содержал ни одной из этих «запрещенных» подсистем.*

Классический пример теоремы такого рода — теорема Куратовского. Аналогично описание графов, вложимых в данную поверхность [RS], а также других классов графов или более общих обьектов [Cl] (например, графы и даже пеановские континуумы, *базисно* вложимые в плоскость [S95, Ku]).[6] Приведем формулировки некото-

---

[6]Заметим, что список запрещенных подграфов для вложимости графа в лист Мебиуса содержит целых 103 графа [GHW]. Даже *существование* такого конечного списка для произвольной поверхности доказывется сложно [AH, RS]. Список запрещенных полиэдров бесконечен для вложимости двумерных полиэдров в $\mathbb{R}^3$ или n-мерных полиэдров в $\mathbb{R}^{2n}$, где $n \geqslant 2$ [Sa]. Поэтому интересны другие препятствия к вложимости. Одно из самых полезных препятствий строится с

рых результатов такого рода (доказательства оставляем читателю в качестве задач).

2.9.3. Теорема Шартрана-Харари. *Граф G можно нарисовать на плоскости без самопересечений так, чтобы он был границей некоторой* одной *грани тогда и только тогда, когда G не содержит θ-подграфа.*

Назовем несамопересекающийся цикл C в связном графе G *граничным*, если существует изображение без самопересечений графа G на плоскости, при котором цикл C изображается границей некоторой грани.

Рис. 13: Цикл C не может быть границей внешней грани

2.9.4. Относительная версия теоремы Куратовского. *Цикл C является граничным тогда и только тогда, когда граф G планарен и цикл C не содержится в подграфе графа G, как на рис. 13.*

Этот результат можно вывести из теоремы Куратовского.

2.9.5. Теорема о 8 и θ. *Граф G с заданными (ориентированными) циклическими порядками ребер, выходящих из каждой вершины, можно так изобразить без самопересечений на плоскости, чтобы указанные циклические порядки получались бы при обходах по часовой стрелке вокруг вершин, тогда и только тогда, когда G не содержит «восьмерки» или «буквы θ» с циклическими порядками, изображенными на рис. 14.*

А этот результат проще доказать, не используя теорему Куратовского (подробнее см. [S15, §1]).

помощью *конфигурационного пространства* упорядоченных пар различных точек данного пространства [S08, §5].

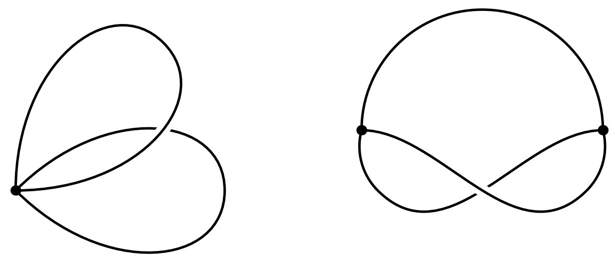


Рис. 14: Графы с циклическими порядками, не реализуемые на плоскости

2.10 Метод минимального контрпримера. А.Я. Канель

При решении многих задач используется так называемый *метод минимального контрпримера* (разновидность *принципа крайнего* или *метода спуска*). Он заключается в следующем. Пусть надо доказать, что объекта, удовлетворяющего некоторым свойствам, не существует. Предположим противное — тогда найдется (в некотором смысле) *минимальный* контрпример. После чего строят еще «меньший» контрпример и получают противоречие. Понятие «меньше» подбирается в процессе доказательства.

Особенно распространен такой метод решения в задачах на графы. Простейшие примеры — доказательства теорем Эйлера 2.4.2 о плоских графах [Pr], Куратовского (п. 2.4 и 2.9) и Менгера (п. 2.8). Более содержательный пример — следующая знаменитая теорема Дилуорса о частично упорядоченных множествах.

2.10.1. Множество A с отношением $\prec$ называется *частично упорядоченным*, если отношение $\prec$ удовлетворяет следующим свойствам:

(1) $a \not\prec a$,

(2) $a \not\prec b$ либо $b \not\prec a$,

(3) если $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a \prec c$.

Если $a \prec b$ или $b \prec a$, то элементы a и b называются *сравнимыми*. Если же $a \not\prec b$ и $b \not\prec a$, то они называются *несравнимыми*. *Цепью* называется множество попарно сравнимых элементов, а *антицепью* — попарно несравнимых. *Диаметром* частично упорядоченного множества называется максимальный размер антицепи.

(a) Количество цепей, на которые можно разбить частично упорядоченное множество, не меньше его диаметра.

(b) *Теорема Дилуорса.* Количество цепей, на которые можно разбить частично упорядоченное множество, равно его диаметру.

2.10.2. В каждый город ведет 3 дороги: красная, синяя и белая. В зависимости от цветов входящих дорог, считая по часовой стрелке, города разделяются на два типа КСБ и КБС. Докажите, что разность количеств городов разных типов делится на 4.

2.10.3. (a) С графом разрешается производить следующую операцию: выбрать произвольный цикл длины 4 и выбросить из него произвольное ребро. Какое минимальное число ребер можно оставить с помощью этой операции из полного графа с n вершинами?

(b) Если в графе любые две 3-клики имеют общую вершину и нет 5-клик, то существуют две вершины, удаление которых разрушает все 3-клики.

2.10.4. Для любых $m < n$ любой граф с n вершинами содержит $m+1$ вершин, степени которых отличаются не больше чем на $m-1$.

2.11 Степенные последовательности. М.Н. Вялый и А.Б. Скопенков

2.11.1. (a) При каких e и n существует граф с n вершинами и e ребрами, каждая вершина которого имеет степень 3? (Такие графы называют *кубическими* или *правильными степени 3*.)

(b) При каких n и d существует граф с n вершинами, каждая вершина которого имеет степень d?

2.11.2. Последовательность n целых положительных чисел является последовательностью степеней вершин некоторого дерева тогда и только тогда, когда сумма её членов равна $2n-2$.

2.11.3. Даны целые положительные числа $n, d_1, \ldots, d_n$. При каких условиях существует

(a) мультиграф (возможно, имеющий петли и кратные ребра)

(b) мультиграф без петель

(c)* граф

с n вершинами степеней $d_1, \ldots, d_n$, соответственно?

Последовательность целых неотрицательных чисел называется *степенной* (графической), если она является последовательностью степеней вершин некоторого графа. *Основной вопрос*: какие последовательности являются степенными? Это задача 2.11.3.c; неотрицательность введена для удобства индуктивных построений. Здесь мы подведем читателя к ответу и доказательству, которые приводятся в п. 2.12.

2.11.4. Является ли степенной последовательность

(a) $(4^3, 1^6)$, (b) $(6^4, 2^3)$, (c) $(5^3, 3^3)$,

(d) $(18^{10}, 12^3, 6^8)$, (e) $(15^8, 10^6, 3^4)$?

(Мы используем «экспоненциальную» запись невозрастающих целочисленных последовательностей: a^k означает, что k последовательных членов последовательности равны a.)

2.11.5. Для любой степенной последовательности $d_1, \ldots, d_n$

(a) $d_i \leqslant n-1$;

$$(b) \quad \sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i) \text{ для любого } k = 1, \ldots, n-1.$$

2.11.6. (a) Приведите пример числа n и не степенной последовательности из n чисел, лежащих в промежутке $[1000, n/1000]$, сумма которых четна.

(b) Любая последовательность из n чисел, меньших $\sqrt{n}/2$, сумма которых четна — степенная.

2.11.7. Если последовательность целых положительных чисел степенная, то последовательность, полученная из нее каждым из следующих двух преобразований — степенная.

(a) Выкинем максимальное число d и отнимем по единице от следующих по возрастанию d чисел.

(b) Отнимем по единице от наибольшего и наименьшего из чисел.

Каждый из двух пунктов этой задачи (вместе с очевидным обратным утверждением) дает алгоритм распознавания того, является ли данная последовательность степенной. Имеется и «явный» ответ, см. п. 2.12.

2.11.8. Пусть a, b, c, d — различные вершины графа, причем (ab), (cd) — ребра, а $(ac), (bd)$ — не ребра. Назовем *обменом* преобразование графа, состоящее в удалении ребер $(ab), (cd)$ и добавлении ребер $(ac), (bd)$.

Пусть G_1, G_2 — два графа с одинаковыми (упорядоченными по неубыванию) последовательностями степеней вершин. Докажите, что обменами можно перевести граф G_1 в граф G_2.

2.11.9. Пусть для последовательности $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n > 0$ (не обязательно степенной) выполнены неравенства из задачи 2.11.5.b.

(a) Тогда $d_1 \leqslant n - 1$.

(b) Переставим по невозрастанию последовательность, полученную преобразованием из задачи 2.11.7.a. Докажите неравенства из задачи 2.11.5.b с заменой d на полученную последовательность c:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\} \text{ для любого } k = 1, \ldots, n-1.$$

Сделайте это для

(b1) $k \geqslant d_1$; (b2) таких k, что $c_i = d_{i+1} - 1$ при любом $i \leqslant k$;

(b3) остальных случаев.

2.11.10. Пусть для последовательности $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n > 0$ (не обязательно степенной) выполнены неравенства из задачи 2.11.5.b. Переставим в порядке невозрастания последовательность, полученную преобразованием из задачи 2.11.7.b. Докажите неравенства из задачи 2.11.5.b с заменой d на полученную последовательность c при

(a) $k \geqslant t := \min\{i : d_i > d_{i+1}\}$; (b) $d_k \leqslant k - 1 \leqslant t - 2$;

(c) $d_k = k \leqslant t - 1$; (d) $d_k \geqslant k + 1 \leqslant t$.

В заключение приведем несколько задач для исследования.

2.11.11. (a,b,c) То же, что в задаче 2.11.3, для *связных* графов.

(a',b',c') Сформулируйте и решите аналог задачи 2.11.3 для *ориентированных* графов.

(a'',b'',c'') То же, что в задаче 2.11.3 для *планарных* графов.

(a''',b''',c'''*) То же, что в задаче 2.11.3, для графов, реализуемых на торе (рис. 7).

(a””,b””,c””*) То же, что в задаче 2.11.3, для графов, реализуемых на ленте Мебиуса (рис. 7).

Необходимые определения можно найти в п. 2.4. Для тора и ленты Мебиуса будет полезно неравенство Эйлера [S15, §2].

Задачи 2.11.11.(a”,b”,c”) при помощи конструкции *двойственного* графа связаны со следующими задачами. Даны целые положительные числа $n, d_1, \dots, d_n$. При каких условиях существует

(a) мультиграф (возможно, имеющий петли и кратные ребра)

(b) мультиграф без петель

(c)* граф

нарисованный без самопересечений на плоскости, имеющий n граней, в границе которых $d_1, \dots, d_n$ ребер, соответственно?

Аналогичное замечание справедливо для реализуемости на торе и на ленте Мебиуса. Все эти задачи интересно обобщить на сферу с g ручками и на диск с m листами Мебиуса [S15, §2].

2.11.12. * (a) Можно ли опустить какие-нибудь неравенства из задачи 2.11.5.b так, чтобы достаточность (т.е. теорема из п. 2.12.c) осталась верной? Если да, то попробуйте найти минимальный набор неравенств.

(b) Если слить две степенные последовательности, то получится степенная последовательность. А какие степенные последовательности нельзя разбить на две степенные последовательности?

2.12 Теорема о степенны́х последовательностях. В.А. Волков и А.Б. Скопенков

Теорема. *Невозрастающая последовательность является степенной тогда и только тогда, когда сумма ее членов четна и выполнены неравенства задачи 2.11.5.b.*

Доказательство С.А. Чоудама. Индукция по $\sum d_i$. Случай, когда все d_i равны, рассмотрен в задаче 2.11.1.b. Пусть теперь не все d_i равны. Можно считать, что $d_n > 0$.

Определим последовательность c, как в задаче 2.11.10. Более формально, обозначим $t = \min\{i : d_i > d_{i+1}\}$ и определим последовательность

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad \text{формулой} \quad c_i := \begin{cases} d_i, & i \neq t, n, \\ d_i - 1, & i = t, n. \end{cases}$$

Обозначим $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i$, $S'_k = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i$. По задаче 2.11.7.b достаточно доказать неравенства

$$(*) \qquad S'_k \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}.$$

При $k \geqslant t$

$$S'_k = S_k - 1 \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} - 1 \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}.$$

Пусть теперь $k \leqslant t-1$. Тогда $S'_k = S_k = kd_k$.
Для $d_k \leqslant k-1$ неравенство (*) тривиально.
Для $d_k = k$

$$S'_k - k(k-1) = k^2 - k(k-1) = k \overset{(3)}{=} d_{k+1} \overset{(4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant d_{k+1} + \left(\sum_{i=k+2}^{n} d_i - 2\right) \overset{(5)}{=} \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}, \quad \text{где}$$

• равенство (3) выполнено, поскольку $k \leqslant t-1$;

• неравенство (4) очевидно, если $k+2 < n$; если же $k+2 = n$, то $d = ((n-2)^{(n-1)}, d_n)$ и $d_n \geqslant 2$ в силу четности суммы $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.

• равенство (5) выполнено, поскольку $\min\{k, c_i\} = c_i$ при $i \geqslant k+1$.

Случай $d_k \geqslant k+1$. Если $d_n \geqslant k+1$, то $\min\{k, d_i\} = \min\{k, c_i\} = k$ при $i \geqslant k+1$ и неравенство (*) следует из аналогичного для S_k.

Пусть теперь $d_n \leqslant k$. Имеем

$$\min\{k, c_i\} = \begin{cases} \min\{k, d_i\} & k+1 \leqslant i < n \\ \min\{k, d_n\} - 1 & i = n \end{cases}.$$

В нашем случае $S'_k = S_k$, поэтому достаточно показать, что

$$(**)\qquad S_k \leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}\min\{k,c_i\} = k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}\min\{k,d_i\}-1.$$

Учитывая, что $d_{k+1}=d_k \geqslant k+1$, получаем

$$S_{k+1} = (k+1)d_k = \frac{k+1}{k}S_k \overset{(3)}{\leqslant} (k+1)(k-1)+\frac{k+1}{k}\sum_{i=k+1}^{n}\min\{k,d_i\} =$$

$$= (k+1)(k-1)+(k+1)+\frac{k+1}{k}\sum_{i=k+2}^{n}\min\{k,d_i\} \overset{(5)}{>}$$

$$> (k+1)k+\sum_{i=k+2}^{n}\min\{k+1,d_i\} \geqslant S_{k+1}.$$

Неравенство (5) выполнено, так как при всех $k+2 \leqslant i < n$ имеем нестрогое неравенство и при $i=n$ строгое. Значит, в (3) неравенство строгое. Отсюда вытекает (**). □

Набросок другого доказательства. Первый абзац такой же, как в предыдущем доказательстве. Определим последовательность c, как в задаче 2.11.9. По задаче 2.11.7.a достаточно доказать неравенства из задачи 2.11.5.b для последовательности c.

Выполнение этих неравенств несложно проверить для $k \geqslant d_1$.

Докажем неравенства *для тех k, для которых $c_i = d_{i+1}-1$ при любом $i \leqslant k$.*

(Рассмотрите самостоятельно случай остальных k.)

Обозначим $S := \sum_{j=k+1}^{n-1}\min(k,c_j)$.

Случай 1. Среди чисел $d_{k+2}, d_{k+3}, \ldots, d_n$ более d_1-k чисел, больших k. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant kd_1 = k(k-1)+k(d_1-k+1) \leqslant k(k-1)+S.$$

Первое неравенство выполнено, так как каждое слагаемое в первой сумме не больше d_1. Последнее неравенство выполнено, так как среди чисел $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_{n-1}$ более d_1-k чисел, не меньших k.

Случай 2. Среди чисел $d_{k+2}, d_{k+3}, \ldots, d_n$ не более $d_1 - k$ чисел, больших k. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i = -d_1 - k + \sum_{i=1}^{k+1} d_i \leqslant k(k+1) - d_1 - k + \sum_{j=k+2}^{n} \min(k+1, d_j) \leqslant$$

$$\leqslant k^2 - d_1 + S + d_1 - k = k(k-1) + S.$$

Первое и четвертое равенства очевидны. Второе неравенство — известное для старой последовательности. Докажем третье неравенство. Среди чисел $d_{k+2}, d_{k+3}, \ldots, d_n$ ровно $d_1 - k$ чисел было уменьшено на 1 при переходе к новой последовательности. Поэтому в сумме $\sum_{j=k+2}^{n} \min(k+1, d_j)$ при переходе к S первые $d_1 - k$ слагаемых уменьшились на 1, а остальные не изменились. $\square$

2.13 Обобщенная гамильтоновость: задачи для исследования. А.Ю. Веснин и А.Б. Скопенков

Пусть H — граф. Граф X называется *H-гамильтоновым,* если в X существует подграф, содержащий все вершины графа X и гомеоморфный графу H.

Например, гамильтоновость равносильна K_3-гамильтоновости.

Следующая задача (кроме (g)) проста и приводится для того, чтобы помочь решателю войти в курс дела. Задачи, отмеченные звездочкой, являются нерешенными. Обычно при решении сложной задачи полезно рассмотреть частные случаи, попытаться решить близкие задачи. Это позволяет заметить закономерности, которые можно сформулировать в виде гипотез и затем доказать. Мы не будем подсказывать эти гипотезы, а предлагаем вам самим исследовать нерешенные задачи и высказывать ваши предположения.

Обозначим $\theta := K_{3,2}$.

2.13.1. (a) Любой гамильтонов граф, отличный от цикла, является θ-гамильтоновым.

(b) Существует θ-гамильтонов граф, не являющийся гамильтоновым.

(c) Существует ли гамильтонов граф, отличный от цикла, не гомеоморфный графу θ и не являющийся K_4-гамильтоновым?

(d) Существует ли K_4-гамильтонов граф, не являющийся θ-гамильтоновым?

(e) Для любого ли графа G существует граф, не являющийся G-гамильтоновым?

(f) Для любых ли графов G и H существует G-гамильтонов граф, не являющийся H-гамильтоновым?

(g)* Опишите «иерархию» графов по их гамильтоновости: когда H-гамильтонов граф является G-гамильтоновым?

2.13.2. (a) Постройте не гамильтонов граф многогранника.

(b,c*,d*,e*,f*,g*) То же, что в задаче 2.13.1, для графов многогранников.

Граф Погорелова — граф выпуклого многогранника в трехмерном пространстве,

(1) из каждой вершины которого исходит три ребра,

(2) каждая замкнутая несамопересекающаяся ломаная на поверхности многогранника, разделяющая какие-либо две его грани, пересекает по крайней мере пять ребер многогранника.

Из (2) вытекает, что в границе каждой грани не менее пяти ребер.

2.13.3. (a) Правильный додекаэдр является графом Погорелова.

(b) Граф с рис. 9 является графом Погорелова.

(c)* Охарактеризуйте графы Погорелова в теоретико-графовых терминах (подобно характеризации Штейница графов многогранников).

Негамильтонов граф Погорелова с рис. 9 является θ-гамильтоновым (задача 2.13.2.b).

2.13.4. (c*,d*,e*,f*,g*) То же, что в задаче 2.13.1, для графов Погорелова.

2.13.5. * Постройте минимальный (по числу граней) граф Погорелова,

(a) являющийся K_4-гамильтоновым, но не θ-гамильтоновым.

(b) не являющийся K_4-гамильтоновым.

(c) не являющийся H-гамильтоновыми ни для какого подграфа H данного графа G. (Например, для $G = K_4$.)

• вершин x, y, z и всех рёбер, соединяющих некоторую вершину из x, y, z с некоторой вершиной из A,

• новой вершины b' и рёбер $b'x$, $b'y$ и $b'z$.

Вершины a и b' мультиграфа G_a остаются в одной компоненте связности после удаления любых двух его вершин. Так как степень вершины b в графе G не менее трёх и при построении графа G_a было удалено ребро, соединяющее две из вершин x, y, z, то в мультиграфе G_a меньше рёбер, чем в G. Значит, в G_a есть тройка $a - b'$ путей.

Аналогично определяем мультиграф G_b и находим в нём тройку $a' - b$ путей. Построенные шесть путей дают тройку $a - b$ путей в G.

2.8.6. Утверждение задачи вытекает из следующего факта.

Утверждение. Вершины A и B графа назовем *эквивалентными*, если существуют такие вершины $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$, что любые две соседние вершины A_i и A_{i+1} можно соединить k путями, не имеющими общих рёбер. Любые две эквивалентные вершины можно соединить k путями, не имеющими общих рёбер.

Доказательство утверждения. Если удалить любые $k - 1$ рёбер, то для любого i вершины A_i и A_{i+1} окажутся в одной компоненте связности. Значит, вершины A_0 и A_n также окажутся в одной компоненте связности. Остается применить рёберную теорему Менгера. $\square$

2.10.1. (a) Следует из того, что цепь и антицепь могут пересекаться не более чем по одному элементу.

2.11.1. (a) *Ответ*: такой граф существует при $(V, E) = (2k, 3k)$ для произвольного целого $k > 1$.

Рассмотрим произвольный кубический граф: каждая его вершина имеет степень 3. Сумма степеней всех вершин есть $2E$. Поэтому $3V = 2E$. Тогда пары чисел (V, E) имеют вид $(2k, 3k)$ для некоторого натурального k. Так как нет петель и кратных ребер, то $k = 1$ невозможно.

При $k > 1$ условию удовлетворяют, например, $2k$-угольник с проведенными в нем диагоналями, соединяющими i-тые и $(i + k)$-тые вершины.

(b) *Ответ*: такой граф существует при $d \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и dn четном.

Для доказательства достаточности расположим вершины графа в вершинах правильного n-угольника. Соединим ребрами вершины, расстояние между которыми по окружности не превосходит $d/2$. Для четного d построение графа закончено. Для нечетного d число n четно, поэтому можно и нужно добавить большие диагонали.

2.11.3. (b) *Доказательство (написано А. Руховичем).* Необходимость целочисленности e вытекает из того, что e равно числу ребер в графе. Второе условие необходимо, поскольку в графе нет петель, а значит степень каждой вершины не больше суммы степеней остальных вершин.

Докажем достаточность индукцией по e. База индукции: утверждение для $e = 0$ очевидно. Докажем шаг индукции. Пусть утверждение для $e < k$. Докажем, что оно верно и для $e = k \geqslant 1$. Из $k \geqslant 1$ и условия $d_i \leqslant e$ следует, что найдутся хотя бы две вершины ненулевой степени. Можно считать, что $d_1 \geqslant d_2 \geqslant ... \geqslant d_n$. Рассмотрим набор $d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, ..., d_n$. Условия теоремы для него выполнены, поскольку сумма степеней вершин уменьшилась на 2, а степень каждой вершины понизилась не более, чем на 1. Поэтому можно воспользоваться предположением индукции: существует граф для набора $d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, ..., d_n$. В этом графе соединим ребром вершины 1 и 2. Поскольку эти вершины различны, то петель не появилось. Следовательно, новый граф не содержит петель. Ясно, что набор степеней его вершин — $d_1, d_2, d_3, ..., d_n$.

2.11.4. *Ответы:* (a,c) да. (b,d,e) нет.

2.11.7. (b) Возьмем граф, реализующий исходную последовательность. Если в нем вершина M наибольшей степени и вершина O наименьшей степени соединены ребром, то удалим это ребро. Иначе имеется ребро OX с $X \neq M$.

Пусть X не соединена с M. Тогда среди вершин, соединенных с M, есть вершина N, не соединенная с X. Добавим ребро NX и удалим ребра MN и OX.

Рассмотрите самостоятельно случай, когда X соединена с M.

2.11.9 и 2.11.10. См. п. 2.12.

2.11.11. (a,b) *Ответы:* то же, что в соответствующих пунктах задачи 2.11.3, с добавлением условия $n-1 \leqslant e$.

Доказательство п. (b) (предложено А. Руховичем). Для доказательства необходимости обозначим через e количество ребер в графе. Необходимость условий (1), (2) и (3) (т.е. четности, условия на степень и на число ребер) легко проверяется.

Для доказательства достаточности рассмотрим граф, полученный по ответу к задаче 2.11.3.b. Обозначим через c количество компонент связности этого графа.

Докажем, что если $c > 1$, то можно уменьшить количество компонент связности, не меняя степеней вершин. Из условия (3) получаем $e \geqslant n-1 > n-c$. Поэтому хотя бы в одной компоненте связности есть цикл. Тогда можно взять ребро a_1a_2 этого цикла и ребро b_1b_2 из другой компоненты связности. Удалим эти ребра, и вместо них добавим ребра a_1b_1 и a_2b_2 (ср. с задачей 2.11.8). Тогда степени вершин сохранятся, а количество компонент связности уменьшится на 1.

Такими операциями можно понизить количество компонент связности до 1. Получится связный граф без петель с заданными степенями вершин.

4 Основы теории Рамсея

4.1 Двухцветные числа Рамсея

4.1.1. (33') Среди пяти человек может не найтись ни трёх попарно знакомых, ни трёх попарно незнакомых.

(33) Среди любых шести человек найдётся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(43) Среди любых десяти человек найдётся либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(439) Среди любых девяти человек найдётся либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(43') Среди восьми человек может не найтись ни трёх попарно знакомых, ни четверых попарно незнакомых.

(44) Среди любых 18 человек найдётся либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

(35) Среди любых 14 человек найдётся либо 5 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых.

Числом Рамсея $R(m,n)$ называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

• среди любых x человек найдётся либо m попарно знакомых, либо n попарно незнакомых.

• в любом графе с x вершинами найдётся либо m-клика, либо n-антиклика.

• для любой раскраски рёбер графа K_x в синий и красный цвета найдётся либо синяя m-клика, либо красная n-клика.

Например, очевидно, что $R(1,n)=1$ и $R(2,n)=n$ для любого n. В задаче 4.1.1 доказано, что $R(3,3)=6$, $R(3,4)=9$, $R(4,4)\leqslant 18$ и $R(3,5)\leqslant 14$. Но не очевидно, что такое число существует для любых m,n.

4.1.2. (a) Если числа $R(m-1,n)$ и $R(m,n-1)$ существуют, то число $R(m,n)$ существует и $R(m,n)\leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1)$. Это утверждение обычно коротко записывают в виде «$R(m,n)\leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1)$». *Далее аналогичные утверждения записываются только в кратком виде.*

(b) $R(m,n) \leqslant \binom{m+n-2}{m-1}$.
(c) $R(m,n) \leqslant R(m-1,n) + R(m,n-1) - 1$, если числа $R(m-1,n)$ и $R(m,n-1)$ чётны.
(d) $R(5,5) \leqslant 62$.

4.1.3. (a) Если в графе с 13 вершинами нет ни треугольника, ни 5-антиклики, то степень каждой вершины равна 4.
(b) Если в графе с 18 вершинами нет ни треугольника, ни 6-антиклики, то степень каждой вершины равна 5.
(Во избежание порочного круга, при решении этой и других задач не используйте без доказательства ни равенства $R(3,6) = 18$, ни других фактов, которые не умеете доказывать.)

4.1.4. (a) $R(4,4) \geqslant 18$. (b) $R(3,5) \geqslant 14$.

4.1.5. (a) $R(n,n) > (n-1)^2$.
(b) **Теорема Эрдеша.** $R(n,n) > n2^{(n-3)/2}$, *начиная с некоторого* n.
(Более точно, теорема Эрдеша утверждает, что $R(n,n) \gtrsim n2^{n/2}/e$. Знак $\gtrsim$ определен в п. 6.1. Доказать эту теорему вы сможете после решения следующих пунктов.)
(c) Если $\binom{r}{n} < 2^{\binom{n}{2}-1}$, то $R(n,n) > r$.
(d) Если $\binom{r}{n} < s2^{\binom{n}{2}-1}$, то $R(n,n) > r - s$.
(e) $R(n,n) > r - \binom{r}{n}2^{1-\binom{n}{2}} - 1$ для любого r.

4.1.6. В любом турнире с 4^n вершинами можно выбрать вершины $A_1, \ldots, A_n$ так, чтобы каждое ребро между ними было направлено от большего номера к меньшему.

4.1.7. При любой раскраске рёбер графа K_n в два цвета в нём найдётся гамильтонов цикл, состоящий из двух одноцветных путей (цвета путей могут быть и одинаковы, и различны).

4.2 Многоцветные числа Рамсея

4.2.1. (a) На плоскости отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: красным, желтым или зеленым. Тогда

есть одноцветный треугольник.
(b) Придумайте 9 точек на плоскости и раскраску в 3 цвета всех соединяющих их отрезков, для которой нет одноцветного треугольника.
(c) То же, что в п. (b), для 16 точек.

Числом Рамсея $R(m_1, \ldots, m_k)$ называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что для любой раскраски рёбер графа K_x в k цветов для некоторого i найдётся m_i-клика i-ого цвета (т.е. m_i вершин, попарно соединённых рёбрами цвета i).

Например, очевидно, что $R(1, m, n) = 1$ и $R(2, m, n) = R(m, n)$ для любых m, n. В задаче 4.2.1 доказано, что $R(3, 3, 3) \leqslant 17$, $\geqslant 10$ и $\geqslant 17$. Но не очевидно, что такое число существует для любых $m_1, \ldots, m_k$.

4.2.2. (a) $R(m, n, p) \leqslant R(R(m, n), p)$.
(b) $R(m_1, m_2, \ldots, m_k) \leqslant$

$$\leqslant R(m_1-1, m_2, \ldots, m_k)+R(m_1, m_2-1, \ldots, m_k)+\ldots+R(m_1, m_2, \ldots, m_k-1).$$

(c) Найдите оценку на $R(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ через полиномиальные коэффициенты.

4.2.3. Если рёбра графа K_{31} раскрашены в синий, белый и красный цвета так, что нет ни синей 4-клики, ни белой 3-клики, ни красной 3-клики, то из каждой вершины выходит 14, 15 или 16 синих рёбер.

4.2.4. Теорема. *Для любого целого $m > 0$ существует такое $M > 0$, что для любого простого числа $p > M$ сравнение $x^m + y^m \equiv z^m \pmod p$ имеет ненулевое решение.* (Доказать эту теорему вы сможете после решения двух следующих задач.)

4.2.5. Сравнение $x^m + y^m \equiv z^m \pmod p$ имеет ненулевое решение для (a) $m = 2$, $p = 89$; (b) $m = 3$, $p = 89$; (c) $m = 4$, $p = 83$; (d) $m = 3$, $p = 97$; (e) $m = 9$, $p = 97$.

4.2.6. Теорема Шура. *Для любой раскраски натурального ряда в конечное число цветов найдётся одноцветное решение уравнения $x + y = z$.*

Более точно, для любого целого $k > 0$ существует такое целое $r > 0$, что для любой раскраски первых r натуральных чисел в k цветов найдётся одноцветное решение уравнения $x + y = z$.

4.2.7. (a,b) Найдите нижние оценки на $R(\underbrace{n, \ldots, n}_{k})$, аналогичные утверждениям 4.1.5.ab.

4.3 Числа Рамсея для гиперграфов

4.3.1. Среди любых четырёх из 8000 студентов имеется слаженная тройка (т. е. тройка, составляющая слаженную команду на олимпиаду по программированию). Докажите, что можно выбрать 5 студентов, любая тройка из которых является слаженной.

4.3.2. (a) Среди любых 5 точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 4-угольник.
(b) Найдётся 8 точек общего положения на плоскости, среди которых нет выпуклого 5-угольника.
(c) Среди любых 9 точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 5-угольник.
(d) **Теорема Эрдеша-Секереша.** *Для некоторого n среди любых n точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 10-угольник.* (Ср. с задачей 4.4.4.)

Числом Рамсея для гиперграфов $R_l(m_1, \ldots, m_k)$, $m_1, \ldots, m_k \geqslant l$, называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что для любой раскраски всех l-элементных подмножеств x-элементного множества в k цветов найдутся i и подмножество размера m_i, у которого все l-элементные подмножества покрашены в i-й цвет. («Число Рамсея для гиперграфов» — единый термин, определённый выше; знание термина «гиперграф» не нужно для его понимания.)

Например, очевидно, что $R_2(m_1, \ldots, m_k) = R(m_1, \ldots, m_k)$ и $R_3(3, n) = n$. В задаче 4.3.1 требуется доказать, что $R_3(5, 4) \leqslant 8000$. А при решении задачи 4.3.2.d требуется доказать, что $R_3(10, 10)$ или $R_4(5, 10)$ существует.

4.3.3. (a) Число $R_l(m_1, \ldots, m_k)$ существует для любых $m_1, \ldots, m_k$. (Это не очевидно!)

(b) $R_l(m_1,\dots,m_k) \leqslant R_l(R_l(m_1,m_2),m_3,\dots,m_k)$.
(c) $R_l(m,n) \leqslant R_{l-1}(R_l(m-1,n),R_l(m,n-1))+1$.

4.3.4. (a) Если $\binom{r}{n} < 2^{\binom{n}{3}-1}$, то $R_3(n,n) > r$.
(b) Найдётся такое число $c>0$, что $R_3(n,n) \geqslant 2^{cn^2}$.
(c) Найдите нижние оценки на $R_l(\underbrace{n,\dots,n}_{k})$, аналогичные утверждениям 4.1.5.ab (ср. с задачей 4.2.7).

Заметим, что $R_l(\underbrace{n,\dots,n}_{r^{2r}+1}) \geqslant (l-1)r^{r^{\dots^{r}}}$ (степенная башня высотой n). Доказательство этого факта выходит за рамки этой книги.

4.4 Результаты рамсеевского типа

4.4.1. Верно ли, что для любой раскраски точек плоскости в два цвета найдётся
(a) одноцветный равносторонний треугольник со стороной 1 или $\sqrt{3}$?
(b) одноцветный равносторонний треугольник со стороной 1?
(c) одноцветный треугольник со сторонами $\sqrt{2},\sqrt{6},\pi$?

4.4.2. При любой раскраске точек плоскости в три цвета найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1.

4.4.3. (a) Найдётся такое n, что для любой раскраски пространства $\mathbb{R}^n$ (определение см. в §7) в 9 цветов найдётся прямоугольник с одноцветными вершинами и сторонами 1 и 2.
(b) Верно ли, что для любого параллелограмма P с неперпендикулярными сторонами найдётся такое n, что для любой раскраски точек пространства $\mathbb{R}^n$ в 4 цвета найдётся равный P параллелограмм с одноцветными вершинами?

4.4.4. Назовем *m-чашкой* (*m-шапкой*) подмножество из m точек графика выпуклой вниз (вверх) функции. Обозначим через $f(k,l)$ минимальное число n, такое что среди любых n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на прямой, есть либо k-чашка, либо l-шапка. (Не очевидно, что такое число существует. Поэтому о формулах из этой задачи справедливо замечание, аналогичное сделанному в задаче 4.1.2.a.)

(a) Среди любых $f(m,m)$ точек на плоскости найдётся выпуклый m-угольник. (Ср. с задачей 4.3.2.)

(b) $f(k,l) \leqslant f(k-1,l)+f(k,l-1)-1$.

(c) $f(k,l) \leqslant \binom{k+l-4}{k-2}+1$.

(d) $f(k,l) = \binom{k+l-4}{k-2}+1$.

4.4.5. (a) При любой раскраске чисел $1,\ldots,9$ в 2 цвета найдётся одноцветная трёхчленная арифметическая прогрессия.

(b) Аналог предыдущего пункта для чисел $1,\ldots,8$ неверен.

(c) Существует такое целое W, что при любой раскраске чисел $1,\ldots,W$ в 2 цвета найдётся либо трёхчленная арифметическая прогрессия первого цвета, либо четырёхчленная — второго.

(d) Существует такое целое W, что при любой раскраске чисел $1,\ldots,W$ в 3 цвета найдётся одноцветная трёхчленная арифметическая прогрессия.

(e) То же, что в предыдущем пункте, для r цветов.

(f)* **Теорема Ван дер Вардена.** *Для любых k,r при любой раскраске натурального ряда в r цветов найдётся одноцветная k-членная арифметическая прогрессия.* (Ср. с теоремой Шура 4.2.6.)

4.4.6. (a) Из любых 5 точек на плоскости можно выбрать две такие непересекающиеся пары точек, что отрезок, соединяющий точки в первой паре, пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.

(a') Для любых 5 точек общего положения на плоскости количество пересечений отрезков, не имеющих общих концов, каждый из которых соединяет данные точки, нечетно.

(Набор точек на плоскости называется набором *общего положения*, если никакие 3 из них не лежат на одной прямой.)

(b) **Теорема Конвея–Гордона–Закса для линейных вложений.** *Для любых 6 точек общего положения в пространстве найдутся два* зацепленных *треугольника с вершинами в этих точ-*

ках (т.е. таких, что объединение сторон первого пересекает второй двумерный треугольник в единственной точке.)

(Набор точек в пространстве называется набором *общего положения*, если никакие 4 из них не лежат в одной плоскости.)

(c) **Теорема ван Кампена–Флореса для линейных вложений.** *Из любых 7 точек в четырехмерном пространстве можно выбрать две такие непересекающиеся тройки точек, что образованные этими тройками двумерные треугольники пересекаются.*

Подробнее см. [Gr].

4.5 Числа Рамсея для подграфов

4.5.1. Для любых графов G и H существует целое положительное число x, для которого при любой раскраске рёбер графа K_x в два цвета найдётся либо подграф первого цвета, изоморфный G, либо подграф второго цвета, изоморфный H.

Наименьшее из таких чисел x обозначается $R(G,H)$.

4.5.2. $R(G,H) \geqslant (\chi(G)-1)(c(H)-1)+1$, где $\chi(G)$ — хроматическое число графа G, $c(H)$ — число вершин в наибольшей компоненте связности.

4.5.3. Обозначим через T_m дерево на m вершинах.
(a) $R(T_m, K_n) = (m-1)(n-1)+1$.
(b) Если $m-1$ делит $n-1$, то $R(T_m, K_{1,n}) = m+n-1$.

4.5.4. Обозначим через nK_3 граф из n треугольников, никакие два из которых не имеют общих вершин.
(a) $R(nK_3, nK_3) \geqslant 5n$.
(b) Ребра графа раскрашены в синий и красный цвета. Если в графе есть синий и красный треугольники, то среди их вершин есть пять вершин A, B, O, C, D, для которых треугольник AOB синий, а треугольник COD красный.
(c) $R(nK_3, nK_3) \leqslant 5n+1$.
(d)* $R(2K_3, 2K_3) = 10$.
(e)* $R(nK_3, nK_3) = 5n$ для любого $n > 1$.

4.5.5. Найдите $R(K_3, C_n)$, где C_n — цикл с n вершинами (см. п. 2.1).

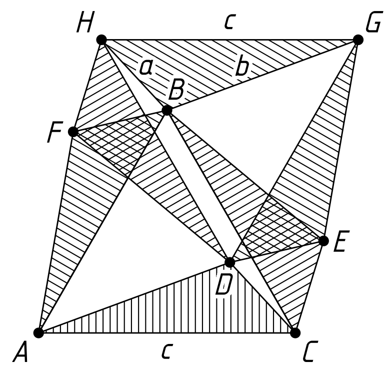


Рис. 18: Треугольник со сторонами $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \pi$.

Если есть правильный одноцветный треугольник ABC со стороной $\sqrt{2}$, то нарисуем картинку (см. рис. 18, взятый из книги [Lo]; расположение точек будет другим, ибо $b > a > c$), где $c = \sqrt{2}$, $a = \sqrt{6}$ и $b = \pi$. Получаем, что F, D, E покрашены в другой цвет. Тогда H, G покрашены в цвет вершин A, B, C. Треугольник HBG равен треугольнику ABD по двум сторонам и углу между ними. Значит, HBG — нужный треугольник.
Если есть правильный одноцветный треугольник со стороной $\sqrt{6}$, то применяем те же рассуждения к аналогичной картинке с $c = \sqrt{6}$, $a = \sqrt{2}$ и $b = \pi$.

4.4.2. (d) *При написании этого решения использован текст Я. Слабодича.* Возьмем два равносторонних треугольника ABC и A_1BC, $A \neq A_1$, со стороной 1. Обозначим через A_1' образ точки A_1 при повороте с центром в точке A на такой угол α, что $|A_1A_1'| = 1$. Такой угол α существует и равен углу между двумя равными сторонами треугольника со сторонами $\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1$.

Обозначим цвет точки A через a. Тогда точки B и C покрашены в разные цвета, отличные от a. Аналогично точки B' и C' покрашены в разные цвета, отличные от a. Тогда обе точки A_1 и A_1' покрашены в цвет a. Противоречие.

Вот другое изложение того же решения с использованием текста В. Иванова. Будем раскрашивать плоскость в красный, зелёный и синий цвета. Рассмотрим некоторую точку O, раскрашенную, без ограничения общности, в красный цвет. Рассмотрим окружность радиуса $\sqrt{3}$ с центром в точке O. Если все точки окружности

(Задачу получает именно пятерка, а не школьник.) Как это сделать, чтобы непересекающиеся пятерки получили разные задачи?

(c) В условиях п. (b) 11 задач недостаточно.

5.1.5. Для $l < k$ обозначим через $M(n,k,l)$ минимальное количество таких k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, что любое l-элементное подмножество множества $\mathcal{R}_n$ целиком содержится хотя бы в одном из них. Например, задача 1.5.2.a утверждает, что $M(n,k,l) \geqslant \binom{n}{l}/\binom{k}{l}$.

(a) Найдите $M(n,k,1)$.

(b) Найдите $M(6k+3,3,2)$.

(c)* Найдите $M(n,3,2)$.

(d) Докажите, что $M(n,k,l) \geqslant nM(n-1,k-1,l-1)/k$.

5.1.6. Существует k подмножеств R-элементного множества по n элементов в каждом, никакие два из которых имеют не более s общих элементов, для

(a) $k = 2^a = R$, $n = 2^{a-1}$, $s = 2^{a-2}$;

(b) $k = 60$, $R = 1600$, $n = 80$, $s = 4$;

(c) p простое, $k = p^2 + p$, $R = ps^2$, $n = ps$.

Ср. с п. 5.7 и 7.1.

5.2 Системы общих представителей

5.2.1. В группе студентов Яндекса 20 человек. Из них ровно 5 человек — специалисты по поиску в интернете, 5 — по борьбе со спамом и т.д., всего 18 видов проблем (так что, очевидно, некоторые студенты являются специалистами по разным проблемам). Требуется составить из этих студентов сильную команду разработчиков. При этом хочется, чтобы для каждой проблемы в команде нашелся специалист по ней и чтобы размер команды был как можно меньше (для экономии зарплаты).

(a) При любом раскладе получится набрать такую команду из семи человек.

(b) При некотором раскладе не получится набрать такую команду из пяти человек.

Системой общих представителей (сокращённо с.о.п.) для набора $\mathcal{M}$ множеств называется такое множество A, что $M \cap A \neq \varnothing$ для любого $M \in \mathcal{M}$.

5.2.2. Для набора $\{\{1,6\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\}\}$ множеств найдите (a) некоторую с.о.п.; (b) с.о.п. наименьшего размера.

5.2.3. (a) Найдите наименьший размер с.о.п. для набора всех k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$.

(b) Сколько для него имеется с.о.п. наименьшего размера?

Минимальная с.о.п. — с.о.п. наименьшего размера для данного набора $\mathcal{M}$. Назовем (n,s,k)-*набором* элемент из $\binom{\binom{\mathcal{R}_n}{k}}{s}$, т.е. набор k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, в котором s множеств. (Этот термин не общепринят.)

5.2.4. (a) Постройте $(2n, 2\binom{n-1}{k-1}, k)$-набор, для которой минимальная с.о.п. состоит из двух элементов и единственна.

(b) При данных n,k найдите наибольшее s, для которого найдётся (n,s,k)-набор, имеющая ровно две минимальные с.о.п.

5.2.5. *Жадным алгоритмом* называется следующий. Возьмем любой элемент, лежащий в максимальном количестве множеств данного набора. Добавим его в «пред-с.о.п» и выкинем множества, которые его содержат. Аналогично возьмем элемент, лежащий в максимальном количестве оставшихся множеств, и т.д.

Постройте набор множеств, наименьший размер с.о.п. которого на k меньше размера любой из с.о.п., которые могут быть получены жадным алгоритмом, если (a) $k=1$; (b) $k=2$; (c) k произвольно.

5.2.6. *

(a) Для любого (n,s,k)-набора найдется с.о.п. размера меньше

$$G(n,s,k) := \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right\} + \frac{n}{k} + 1.$$

(b) Если $n \geqslant 32k$ и $60 \leqslant \dfrac{sk}{n} < e^k$, то найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше $\dfrac{n}{64k}\ln\dfrac{sk}{n}$.

(c) Если

$$k \leqslant n-l \quad \text{и} \quad G\left(\binom{n}{k}, \binom{n}{l}, \binom{n-l}{k}\right) \leqslant s,$$

то найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше l.

(d) Для всех достаточно больших n если $k^2l+kl^2 < n^{1.8}$, то $k < n-l$ и $\binom{n}{k}/\binom{n-l}{k} < 2e^{kl/n}$.

(e) Для всех достаточно больших n и k если $101\ln\ln k < \ln\frac{sk}{n} < \sqrt{k} < \sqrt[4]{n}$, то найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше $0,99\dfrac{n}{k}\ln\dfrac{sk}{n}$.

(f) Если

$$l \leqslant n-k \quad \text{и} \quad \binom{n}{l}\binom{\binom{n}{k}-\binom{n-l}{k}}{s} < \binom{\binom{n}{k}}{s},$$

то найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше l.

5.3 Системы различных представителей

5.3.1. (a) *Лемма о паросочетаниях.* Пусть есть несколько (конечное число) юношей и девушек. Каждый юноша любит некоторое (вполне возможно, нулевое) число девушек. Тогда всех юношей можно женить на любимых ими девушках (так, чтобы брачные пары не пересекались) тогда и только тогда, когда для любого множества юношей число девушек, которых любит хотя бы один из них, не меньше числа этих юношей.

(b) *Теорема Холла.* Пусть $S_1, \ldots, S_m$ — конечные множества. В каждом из них можно выбрать по элементу $x_i \in S_i$ так, чтобы все x_i были различны, тогда и только тогда, когда для каждого $k \in \{1, \ldots, m\}$ объединение любых k из этих множеств имеет не менее k элементов.

5.3.2. Какое минимальное количество рёбер можно удалить из графа $K_{n,n}$, чтобы не осталось паросочетаний (т. е. подграфа из n непересекающихся отрезков)?

Системой различных представителей (сокращенно с.р.п.) упорядоченного набора $(S_1, \ldots, S_m)$ множеств называется упорядоченный набор $(x_1, \ldots, x_m)$ их различных элементов, для которого $x_j \in S_j$ при любом $j = 1, \ldots, m$.

(Упорядоченность набора важна, чтобы правильно определить с.р.п. набора множеств, некоторые из которых совпадают, а также для подсчёта количества с.р.п. в задаче 5.3.5.)

Например, теорема Холла утверждает, что у набора $(S_1, \ldots, S_m)$ конечных множеств есть система различных представителей тогда и только тогда, когда $| \cup_{i\in I} S_i| \geqslant |I|$ для любого $I \subset \{1, \ldots, m\}$.

5.3.3. Пусть для системы m-элементных множеств каждый элемент, входящий хотя бы в одно из них, входит ровно в l из них. Тогда при $m \geqslant l$ у этой системы множеств есть с.р.п.

5.3.4. С.р.п. поднабора можно дополнить до с.р.п. всего набора. Вот более подробная формулировка. Из набора $\mathcal{M}$ множеств выбрано несколько подмножеств $S_1, \ldots, S_k$. Допустим, что элементы $x_1, \ldots, x_k$ — это с.р.п. набора множеств $S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{M}$. Если у всего набора $\mathcal{M}$ есть с.р.п., то существует его с.р.п., содержащая элементы $x_1, \ldots, x_k$.

5.3.5. Обозначим через $F(S_1, \ldots, S_m)$ количество с.р.п. у системы $\{S_1, \ldots, S_m\}$.
(a) Для любого ли k существует система $S_1, \ldots, S_m$ такая, что $F(S_1, \ldots, S_m) = k$?
(b) Найдите все возможные значения $F(S_1, S_2)$ при условии $|S_1| = |S_2| = 5$.
(c)* Найдите все возможные значения $F(S_1, S_2, S_3)$ при условии $|S_1| = |S_2| = |S_3| = 5$.

5.3.6. Пусть даны два разбиения множества S на m подмножеств: $S = \bigsqcup_{i=1}^m A_i = \bigsqcup_{i=1}^m B_i$, $m \leqslant |S|$. Пусть выполнено одно из следующих условий.

(a) Для любого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$ множество $A_{i_1} \sqcup \ldots \sqcup A_{i_k}$ содержит не более k из множеств $B_1, \ldots, B_m$.

(b) $|A_1| = \ldots = |A_m| = |B_1| = \ldots = |B_m|$.

Тогда можно перенумеровать множества $A_1, \ldots, A_m$ так, чтобы после перенумерации $A_i \cap B_i \neq \varnothing$ для любого $i = 1, \ldots, m$.

5.3.7.* Пусть даны два разбиения множества S на m подмножеств: $S = \bigsqcup_{i=1}^m A_i = \bigsqcup_{i=1}^m B_i$, $m \leqslant |S|$. Пусть для любых подмножеств $I, J \subset \{1, \ldots, m\}$ выполнено неравенство:

$$\left|\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigsqcup_{j\in J} B_j\right)\right| \geqslant |I| + |J| - m.$$

Тогда можно перенумеровать множества $A_1, \ldots, A_m$ так, чтобы после перенумерации нашлись попарно различные элементы $x_i \in A_i \cap B_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Такой набор $x_1, \ldots, x_m$ называются *общей системой различных представителей* наборов множеств $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_m$.

5.3.8. (a) При каком условии на любовь юношей и девушек можно распределить всех девушек по непересекающимся гаремам, в каждом из которых ровно по две жены?
Или, формально, найдите необходимое и достаточное условие на двудольный граф, при котором вершины можно занумеровать $A_1, \ldots, A_n$ (в первой доле) и $B_1, C_1, \ldots, B_n, C_n$ (во второй доле) так, что есть рёбра $A_1B_1, A_1C_1, \ldots, A_nB_n, A_nC_n$.
(b) Пусть есть m юношей и несколько девушек, каждый юноша любит не менее t девушек, причем всех юношей можно женить на любимых ими девушках (так, чтобы брачные пары не пересекались), т. е. есть паросочетание. Тогда имеется не менее

$$\begin{cases} t!, & t \leqslant m \\ t!/(t-m)!, & t > m \end{cases}$$

способов переженить юношей на любимых ими девушках.

5.4 Перманент

Перманент квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ определяется формулой

$$\mathrm{Per}(A) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

где Σ_n есть множество всех перестановок n-элементного множества.

5.4.1. Найдите перманент матрицы

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

(k) 4×4, у которой $k = 0, 1, 2, 3, 4$ диагональных элементов — нули, а все остальные (в т.ч. не диагональные) элементы — единицы;

(n) $n \times n$, у которой на диагонали нули, а вне диагонали — единицы.

Подматрицей данной матрицы называется матрица, полученная из данной вычеркиванием некоторого количества строк и столбцов. *Перманент* прямоугольной матрицы A определяется как сумма перманентов всех квадратных подматриц максимального размера. Или, формулой, при $m < n$

$$\mathrm{Per}(A) := \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{m} a_{i,\sigma(i)},$$

где сумма берётся по всем m-элементным размещениям чисел от 1 до n. При $m > n$ положим $\mathrm{Per}(A) := \mathrm{Per}(A^T)$.

5.4.2. Найдите перманент матрицы $m \times n$, состоящей из одних единиц.

5.4.3. (a) Перманент не меняется при перестановке строк.

(b) *Формула разложения по строке.* Если $m \leqslant n$, то для любого i

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{Per}(A_{ij}),$$

где A_{ij} — матрица, получаемая из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

5.4.4. (a) Перманент матрицы $n\times n$ из нулей и единиц равен нулю тогда и только тогда, когда есть нулевая подматрица $s\times t$, где $s+t=n+1$.
(b) Для любых $m\leqslant n$ перманент прямоугольной матрицы $m\times n$ из нулей и единиц равен количеству с.р.п. (§5.3) для системы из m подмножеств множества $\{1,\dots,n\}$, определяемых строками.

5.5 Размерность Вапника-Червоненкиса

5.5.1. (a) Математики Вася и Чарли играют. Сначала Чарли отмечает на плоскости k точек. Затем Вася красит некоторые из этих точек. Если теперь Чарли сможет провести прямую, отделяющую покрашенные точки от непокрашенных, то он выиграл, иначе — проиграл. При каком наибольшем k Чарли может выиграть независимо от действий Васи?
(b) То же, но точки отмечаются в пространстве, и Чарли проводит полуплоскость.

Пусть $\mathcal{R}\subset 2^X$ — семейство подмножеств произвольного множества X. *Размерностью Вапника-Червоненкиса* $VC(X,\mathcal{R})$ (или VC-размерностью) пары $(X,\mathcal{R})$ называется максимальное n такое, что существует n-элементное подмножество $A\subset X$, для которого любое подмножество в A является пересечением A и некоторого подмножества из $\mathcal{R}$. Такое подмножество A называется *дробящимся* системой $\mathcal{R}$. Если такого n не существует, то полагают $VC(X,\mathcal{R}):=\infty$.

Естественные примеры, в том числе пример с бесконечностью, приведены в следующих задачах.

5.5.2. (a) Найдите VC-размерность семейства всех (двумерных замкнутых) прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат.
(b) *Теорема.* VC-размерность семейства всех полупространств в $\mathbb{R}^n$ равна $n+1$.
(c) *Теорема Радона.* Любые $n+2$ точки в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

5.5.3. Найдите VC-размерность следующих семейств множеств:
(a) $\{\{1,\dots,k\}\mid k\in\mathbb{N}\}$;

(b) $\{\{k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
(c) $\{\{k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
(d) $\{\{k,\ k^2,\ k^3,\ \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;

5.5.4. Найдите VC-размерность следующих конечных семейств:
(a) $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{1,2,4\}$ $\{1,2,5\}$, $\{2,3,6\}$, $\{3,4,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{2,4,5,6\}$.
(b) $\{1,2,3\}$, $\{3,4,5\}$, $\{1,2,4\}$ $\{1,2,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,6,7\}$, $\{3,4,6,7\}$.
(c) $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8,9\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$, $\{1,6,9\}$.
(d) Можно ли добавить ещё одно множество к системам из предыдущих пунктов так, чтобы VC-размерность увеличилась на 1?

5.5.5. (a) Возможно ли равенство $VC(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) = \infty$ для некоторого набора $\mathcal{R} \subset 2^{\mathbb{R}^2}$?
(b) То же для некоторого счётного набора $\mathcal{R} \subset 2^{\mathbb{R}^2}$ ограниченных множеств.

5.5.6. В любом семействе VC-размерности d, в каждом множестве которого не более r элементов, найдутся такие подмножества X и Y, что (a) $|X \cap Y| \leqslant r - d$; (b) $|X \cap Y| \geqslant d - 1$.

5.5.7. Если $\mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ и $|\mathcal{R}| = n$, то для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ найдётся такое множество A, что $|\{R \cap A \mid R \in \mathcal{R}\}| \geqslant k = |A| + 1$.

5.5.8. Если $\mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ — семейство VC-размерности d, то существует *наследственное* (т. е. содержащее с каждым множеством все его подмножества) семейство $\mathcal{R}' \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ VC-размерности d, для которого (a) $|\mathcal{R}'| \leqslant |\mathcal{R}|$; (b) $|\mathcal{R}'| \geqslant |\mathcal{R}|$.

5.5.9. Если $\mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{R}_n}$, то

$$|\mathcal{R}| \leqslant \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{VC(\mathcal{R}_n, \mathcal{R})}.$$

5.6 Подсолнухи

Подсолнухом с k лепестками и ядром Y называют такой набор множеств $\{F_1, \ldots, F_k\}$, что $F_i \cap F_j = Y$ при $i \neq j$ и все множества $F_i \setminus Y$ непусты. Например,

• попарно непересекающиеся множества образуют подсолнух с пустым ядром.

5.7 Лемма Виссера и теоремы о возвращении

5.7.1. В парламенте из 100 000 депутатов образовано k комиссий по 2 000 человек в каждой.

(a) Если $k \geqslant 100$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 21 общего члена.

(b) Если $k \geqslant 5\,000$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 29 общих членов.

(c) Если $k \geqslant 250\,000$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 32 общих члена.

(d) Если $k \geqslant 2 \cdot 50^{30}$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 40 общих членов.

Подмножество отрезка $[0,1]$ называется *хорошим*, если оно является объединением конечного количества попарно непересекающихся интервалов. *Длиной* $|E|$ хорошего множества E называется сумма длин его интервалов.

5.7.2. (a) Пересечение и объединение хороших множеств — хорошее множество.

(b) Если $E_1, \ldots, E_k$ — попарно непересекающиеся хорошие множества длины $1/k$ каждое и E_0 — хорошее множество длины $1/k$, то $|E_0 \cap E_j| \geqslant 1/k^2$ для некоторого $j \geqslant 1$.

(c) Придумайте пример бесконечного семейства хороших множеств длины $1/2$ каждое, длина пересечения любых двух из которых не превосходит $1/4$.

(d) То же для длины $1/k$ и длины пересечения не более $1/k^2$.

5.7.3. (a) Если дана бесконечная последовательность хороших множеств длины $m \in \mathbb{R}$ каждое, то длина пересечения некоторых двух из них не меньше $m^2/2$.

(b) *Лемма Виссера.* То же для $0,99m^2$.

(Задача 5.7.2 поясняет роль множителей 0,99 и m^2.)

(c)* Для любого r при предположениях п. (a) найдутся r множеств с длиной пересечения более $0,99m^r$.

Пусть заданы числа $0 = \alpha_0 < \ldots < \alpha_{k-1} < \alpha_k = 1$. *Перекладыванием отрезков* называется отображение $f\colon [0,1) \to [0,1)$, определенное некоторой перестановкой отрезков $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$. Более аккуратно, возьмем перестановку $\sigma : [k] \to [k]$. Для любых $j \leqslant k$ и $x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ определим $f(x) := x - \alpha_{j-1} + \sum\limits_{i\in[k]\ :\ \sigma(i)<\sigma(j)} (\alpha_i - \alpha_{i-1})$.

Через f^n обозначим n-ю итерацию отображения $f\colon [0,1) \to [0,1)$: $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n раз).

5.7.4. (a) (Загадка) Найдите n-ю итерацию нетривиального перекладывания двух отрезков, если дано α_1.

(b) Если длины всех отрезков рациональны, то некоторая итерация перекладывания отрезков — тождественное отображение.

(c) Придумайте перекладывание отрезков, один из которых имеет иррациональную длину, причем квадрат перекладывания — тождественное отображение.

(d) Придумайте перекладывание отрезков, никакая итерация которого не является тождественным отображением.

5.7.5. Пусть $E \subset [0,1)$ — хорошее непустое множество и f — перекладывание отрезков.

(a) Множество $f(E)$ хорошее.

(b) *Теорема Пуанкаре-Каратеодори о возвращении множеств.* Существует сколь угодно большое n, для которого $|E \cap f^n(E)| > 0$.

(c) *Теорема Хинчина о возвращении множеств.* Существует сколь угодно большое n, для которого $|E \cap f^n(E)| \geqslant 0,99|E|^2$.

(d) Число n из п. (b,c) найдется на любом достаточно большом интервале (т.е. существует такое L, что для любого целого M число n из п. (b,c) найдется среди чисел $M, M+1, \ldots, M+L$).

(e) *Теорема о многократном возвращении.* При любом целом $r > 0$ существуют сколь угодно большие $n_1, \ldots, n_r$, для которых $|f^{n_1}(E) \cap f^{n_2}(E) \cap \ldots \cap f^{n_r}(E)| > 0$.

(f) *Теорема о многократном возвращении.* При любом целом $r > 0$ существуют сколь угодно большие $n_1, \ldots, n_r$, для которых $|f^{n_1}(E) \cap f^{n_2}(E) \cap \ldots \cap f^{n_r}(E)| \geqslant 0,99|E|^r$.

5.7.6. Назовем *хорошим* объединение конечного количества многоугольников (лежащих на одной плоскости) без границы с непересекающимися внутренностями. Сформулируйте и докажите аналоги

(a) теоремы Пуанкаре-Каратеодори; (b) теоремы Хинчина

для взаимно-однозначного отображения единичного квадрата в себя, сохраняющего хорошие подмножества и их площади.

Ср. с п. 5.1 и 7.1.

5.8 Структуры на конечном множестве

Ранее рассмотрены некоторые классические комбинаторные задачи 1.1.1, 1.1.2, 1.1.4, 1.4.3.b, 1.4.4, 1.4.5, 7.3.5, 1.4.7.efg. В этом пункте мы поясним связь между различными объектами, возникающими в этих задачах.

Алгеброй на множестве $[n]$ называется семейство его подмножеств, которое вместе с любыми подмножествами A и B содержит также их объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и дополнение $\overline{A} := [n] - A$.

Например, $2^{[n]}$ — алгебра на $[n]$, а $\{\varnothing, [3]\}$ и $\{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, [3]\}$ — алгебры на $[3]$.

5.8.1. (a) Найдите все алгебры на $[n]$ для $n = 1, 2, 3$.

(b) Количество элементов произвольной алгебры есть степень двойки.

(c) Количество алгебр на $[n]$ равно количеству разбиений множества $[n]$. (*Разбиением* (неупорядоченным) множества $[n]$ называется неупорядоченный набор $\{X_1, X_2, \dots X_k\}$ подмножеств $X_i \subset [n]$, для которого $[n] = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$ при любых $i \neq j$.)

(d) (Загадка) Найдите рекуррентную формулу для числа $N_A(n)$ всех алгебр на $[n]$ (*числа Белла*).

Базисом алгебры называется наименьшее (по включению) её подсемейство $\{X_1, \dots, X_k\}$ такое, что любой элемент алгебры можно выразить через $X_1 \dots X_k$ с помощью операций пересечения, объединения и дополнения. Задача 1.4.2.a равносильна нахождению наименьшего числа множеств в базисе алгебры $2^{[n]}$.

5.8.2. Существует алгебра и два ее базиса, в которых разное число множеств.

Линейным пространством на множестве $[n]$ называется семейство его подмножеств, которое вместе с любыми подмножествами A и B содержит также их симметрическую разность $A \oplus B$. Например, любая алгебра является линейным пространством;

$$\{\varnothing\}, \quad \{\varnothing, [2]\}, \quad \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, [2]\} \quad \text{и} \quad \{\varnothing, \{1,3\}, \{2,3\}, [2]\}$$

— линейные пространства на [3]. Определение *базиса* линейного пространства аналогично случаю алгебр. Линейные пространства изучаются в задачах 1.4.4, 7.3.5, 1.4.7.efg и 6.1.12.a (на другом языке).

Топологией на множестве $[n]$ называется семейство его подмножеств, которое содержит $\varnothing$, $[n]$ и вместе с любыми подмножествами A и B содержит также $A \cap B$, $A \cup B$. Например, любая алгебра является топологией;

$$\{\varnothing, \{1\}, [3]\} \quad \text{и} \quad \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, [3]\}$$

— топологии на [3].

5.8.3. (a) Найдите все топологии на $[n]$ для $n = 1, 2, 3$.

(b) Любая ли топология является линейным пространством? Можно ли симметрическую разность выразить через пересечение и объединение?

Решение задачи 5.8.3.a показывает, что существует топология, число подмножеств в которой не является степенью двойки. Найти количество топологий на $[n]$ — нерешенная задача.

Определение *базиса* топологии аналогично случаю алгебр.

5.8.4. (a) Существует топология и два ее базиса, в которых разное число множеств.

(b) Найдите наименьшее число множеств в базисе топологии $2^{[n]}$.

(c) Для каждого n найдите наибольший (по все топологиям на $[n]$) минимальный размер базиса топологии.

5.8.5. *Цепью топологий* называется последовательность различных топологий

$$\{\varnothing, [n]\} = T_0 \subset T_1 \subset T_2 \ldots \subset T_k = 2^{[n]},$$

между любыми двумя соседними членами которой нельзя вставить ещё одну топологию (т.е. для любого i не существует топологии T, для которой $T_i \subsetneq T \subsetneq T_{i+1}$). Аналогично определяются *цепи* алгебр и линейных пространств.

(a) Все цепи алгебр (линейных пространств) на $[n]$ имеют одинаковую длину (какую?).

(b) Приведите пример цепей топологий различной длины.

(c)* Найдите наибольшую длину цепи топологий на $[n]$.

(d) Найдите наименьшую длину цепи топологий на $[n]$.

5.8.6. (a) Найдите максимальное количество линейных пространств на $[n]$, ни одно из которых не содержится (собственно) в другом.

(Это число называется *шириной* $W_L(n)$ семейства всех линейных пространств на $[n]$.)

(b)* $W_L(2n) \sim C \cdot 2^{n^2}$ для некоторого числа C.

(c) Найдите максимальное количество алгебр на $[n]$, ни одна из которых не содержится в другой.

По-видимому, найти максимальное количество топологий на $[n]$, ни одна из которых не содержится в другой — нерешенная задача.

Нарисуем все алгебры («на $[n]$» — эти слова мы дальше опускаем). Проведем стрелку от алгебры A к алгебре B, если $A \subsetneq B$ и между ними нельзя вставить никакую другую алгебру. Полученный граф называют *решёткой алгебр*.

Разбиение $H = H_0 \sqcup H_1 \sqcup \ldots \sqcup H_m$ множества всех алгебр называется *разбиением на этажи*, если для любых двух соединенных стрелкой алгебр $A \subset B$ номер этажа алгебры A на единицу меньше номера этажа алгебры B. Ясно, что решётка алгебр допускает разбиение на этажи. (Какие алгебры находятся на k-м этаже?)

Аналогично случаю алгебр вводятся понятия *решётки линейных пространств* и ее *разбиения на этажи*. Ясно, что решётка линейных пространств допускает разбиение на этажи. (Какие линейные пространства находятся на k-м этаже?)

Аналогично случаю алгебр вводятся понятия *решётки топологий* и ее *разбиения на этажи*. Но решётка топологий не допускает разбиения на этажи.

Базой на множестве $[n]$ называется семейство его подмножеств, которое содержит $[n]$ и вместе с любыми подмножествами A и B содержит также $A \cap B$. Примеры баз: любая топология; $\{[2], \{2,3\}, \{2\}, [4]\}$ — база на $[4]$. См. задачу 1.4.5 о наименьшем базисе базы $2^{[n]}$.

Вообще, *структурой* на множестве, соответствующей заданному набору операций, называется семейство его подмножеств, замкнутое относительно этого набора операций. Например, если за-

(b) Берём набор из $(k-1)^s$ множеств, построенный в решении задачи 5.6.2.b. Для него элементы множества A_1 образуют с.о.п. Значит, размер минимальной с.о.п. не больше $k-1$.

5.7.1. *Решение.* (a) Пусть любые две комиссии имеют не более 20 общих членов. Дадим по конфете каждому участнику первой комиссии. Конфеты получат 2000 человек. Дадим по конфете каждому участнику второй, но не первой, комиссии. Конфеты получат не менее 1980 человек. Дадим по конфете каждому участнику третьей, но не первой и не второй, комиссий. Конфеты получат не менее 1960 человек. И так далее. Каждый парламентарий получит не более одной конфеты. В итоге количество парламентариев не меньше количества конфет, т.е. числа $100 \cdot 2000 - (100 \cdot 99/2) \cdot 20 = 101\,000 > 100\,000$. Противоречие.

Это же решение можно изложить так. Пусть любые две комиссии имеют не более 20 общих членов. Тогда число всех парламентариев не меньше $100 \cdot 2000 - (100 \cdot 99/2) \cdot 20 = 101\,000 > 100\,000$ (это неравенство Бонферрони 1.2.3.c, т.е. версия формулы включений-исключений). Полученное противоречие доказывает нужное утверждение.

(b) Примените рассуждение из п. (a) к декартову квадрату парламента, т.е. парламентом будет множество пар депутатов, а комиссиями множество пар депутатов из одной комиссии.

(c) То же для декартова куба.

(d) Найдите N такое, что $\dfrac{40}{\sqrt[N]{2}} > 39$.

5.7.1. *Идея другого решения:* использовать версию теоремы Турана 2.7.2.d для $s=2$ и двудольного графа, в одной доле которого — парламентарии, а в другой — комиссии. Ср. [VS97].

5.7.2. (b) В противном случае

$$1 \geqslant |E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_k| \geqslant \sum_{j=0}^{k} |E_j| - \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant k} |E_i \cap E_j| > 1 + \frac{1}{k} - \frac{k}{k^2} = 1.$$

Противоречие.

(c) В j-е множество запишем все числа, в двоичной записи которых на j-м место стоит 0.

5.7.3. Аналогично задаче 5.7.1.

5.7.5. Перекладывание отрезков сохраняет хорошие подмножества и их длины.

Перекладывание отрезков является взаимно-однозначным соответствием. Итерация f^n с $n<0$ определена для взаимно-однозначных соответствий f: $f^n = f^{-1}\circ f^{-1}\circ\ldots\circ f^{-1}$ ($|n|$ раз).

(b)-(f) Используйте утверждения 5.7.3.bc.

(d) *При написании этого решения использован текст А. Пахарева.* Для п. (b) утверждение очевидно. Приведем доказательство для п. (c). Пусть, напротив, существовуют сколь угодно большие интервалы из целых чисел n, для которых $|E\cap f^n(E)|<0.99|E|^2$. Назовем такие n и интервалы *плохими*. Обозначим через l_1 середину одного из плохих интервалов четной длины. Далее, обозначим через l_2 — середину плохого интервала четной длины, большей $|2l_1|$, и т.д. Тогда при любых $n>m$ число l_n-l_m содержится в плохом интервале с серединой l_n, поэтому оно плохое. Значит, $|f^{l_n}(E)\cap f^{l_m}(E)|<0,99|E|^2$ для любых целых $n,m>0$. Это противоречит лемме Виссера 5.7.3.b.

5.8.1. (c) Разбиению $[n]=X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k$ поставьте в соответствие семейство всех множеств, полученных объединением некоторых из $X_1,\ldots,X_k$. Получится взаимно-однозначное соответствие между алгебрами на $[n]$ и разбиениями множества $[n]$.

(b) Следует из (c).

5.8.2. Рассмотрите алгебру $2^{[4]}$ и два базиса, один из множеств $\{1,2\}$ и $\{1,3\}$, другой из множеств $\{1\},\{2\},\{3\}$.

5.8.5. Ответы: (a) $n+1$; (c) $2n+2$; (d) 2^n+1.

чинающего к введению этого довольно абстрактного понятия, ср. с [ZSS, философски-методическое отступление]. Кроме того, вероятностной интуиции начинающего противоречит получение вероятностными методами абсолютно (а не с некоторой вероятностью) верного результата.[9] (Впрочем, для человека, уже владеющего понятием вероятностного пространства, изложение на вероятностном языке не хуже комбинаторного.)

Приведем интересные факты, которые можно доказать при помощи леммы Ловаса и вряд ли можно доказать без нее! Видимо, из задач 6.2.1-6.2.4 вы сможете решить сейчас только пункты (a). К пунктам (b) разумно вернуться после изучения следующего раздела. Более того, задача 6.2.2.b естественнее по формулировке, но сложнее двух следующих.

6.2.1. (a) По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему. (Сотрудник может быть специалистом по нескольким видам работ; распределение специалистов по видам работ известно тому, кто назначает выходные. Это задача 1.5.7.)

(b) По каждому из нескольких видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. (Теперь видов работ не обязательно 100.) Каждый вид работ имеет общих специалистов не более чем с 30 другими видами. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему.

Замечание. Для каждого вида работ x обозначим через A_x множество распределений выходных, при которых и в субботу, и в воскресенье на работе есть специалист по x. Нужно доказать, что

наторики скорее в том, что речь идет о *долях* вместо чисел, и интерес часто представляют *оценки*, а не равенства.

[9]Объяснять, как с помощью вероятностных методов можно получить абсолютно верный результат, лучше на более простых примерах. См., например, задачи 6.2.5, 6.2.12, 6.2.16 и 6.3.3.ab. Мы хотели бы сделать этот текст доступным даже для тех, кто не разбирал таких примеров.

$\cap_x A_x \neq \varnothing$. В п. (a) это делается путем подсчета количества элементов. В п. (b) этого уже не хватает, нужна идея из следующего раздела. Там мы покажем, как *независимость* (определенную там) можно применять для оценки количества элементов в пересечении множеств.

Описанную идею можно сформулировать так. Нужное условие мы представляем в виде пересечения некоторого числа условий. При этом ясно, что для каждого из них есть конструкция, ему удовлетворяющая. Иногда отсюда можно вывести, что есть конструкция, удовлетворяющая всем этим условиям одновременно! Эта идея часто применяется в математике. (Для читателя, знакомого с соответствующими понятиями, напомним, что в анализе так доказывается существование решения дифференциального уравнения, в топологии — вложимость n-мерного компакта в $\mathbb{R}^{2n+1}$, ср. [S12, §2].) Число условий может быть бесконечно, поэтому идея пересечения «равносильна» идее итерационного процесса. А в настоящей заметке мы покажем, как применять эту идею в комбинаторике. Несмотря на конечность числа условий, ее применение весьма нетривиально.

6.2.2. (a) По кругу стоит 200 студентов из 10 групп, в каждой из которых 20 студентов. Докажите, что можно в каждой группе выбрать старосту так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.

(b) То же для 1600 студентов из 100 групп, в каждой из которых 16 студентов.

6.2.3. (a) Докажите, что можно раскрасить первые 8 натуральных чисел в 2 цвета так, чтобы не было одноцветной арифметической прогрессии длины 3. (Это задача 4.4.5.b.)

(b) Докажите, что можно раскрасить первые 15 миллионов натуральных чисел в 2 цвета так, чтобы не было одноцветной арифметической прогрессии длины 32.

6.2.4. (a) Докажите, что для любого $M \in \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные числа в 2 цвета так, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ числа x и $x+M$ были не одного цвета.

(b) Докажите, что для любых 25 чисел $M_1, \ldots, M_{25} \in \mathbb{R}$ и конечного множества $X \subset \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные числа в 3 цвета так, чтобы для любого $x \in X$ среди чисел $x, x+M_1, ..., x+M_{25}$ были числа каждого из трех цветов.

(c) Докажите, что для любых 25 чисел $M_1, \ldots, M_{25} \in \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные числа в 3 цвета так, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ среди чисел $x, x+M_1, \ldots, x+M_{25}$ были числа каждого из трех цветов.

Решения пунктов (b) вышеприведенных задач основаны на идее, аналогичной решению задачи 6.2.1.b.

Для удобства читателя этот раздел структурирован более тонко, чем остальные. В частности, некоторые указания и решения приведены прямо в нем (а не в конце параграфа).

Независимость

В этом разделе мы введем и обсудим понятие независимости. Оно и важно само по себе, и необходимо для леммы Ловаса 6.2.15 (почему она интересна, написано в предыдущем разделе). Впрочем, формально, далее из этого раздела используются только утверждения 6.2.8 и 6.2.11.

6.2.5. Каждый житель города либо здоров, либо болен, а также либо богат, либо беден. Богатство и здоровье *независимы*, т.е. доля богатых здоровых среди богатых равна доле здоровых среди всех жителей. Известно, что есть богатый горожанин и есть здоровый горожанин. Обязательно ли найдется богатый здоровый горожанин?

Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если

$$|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|.$$

При $B \neq \varnothing$ это равносильно тому, что доля множества $A \cap B$ в B равна доле множества A в M.

6.2.6. Зависимы ли следующие подмножества? (Мы называем *зависимыми* подмножества, не являющиеся независимыми.)

(a) В множестве всех клеток шахматной доски подмножество клеток в первых трех ее строках и подмножество клеток в последних четырех ее столбцах.

(b) Подмножества $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$ и $\{1,3\} \subset \{1,2,3,4\}$.

(c) Подмножества $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$ и $\{1,3\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$.

6.2.7. Зависимы ли следующие подмножества множества целых чисел от 1 до 105?

(a) Подмножество чисел, делящихся на 5, и подмножество чисел, делящихся на 7.

(b) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 21.

(c) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 5.

(d) Подмножество чисел, делящихся на 10, и подмножество чисел, делящихся на 7.

6.2.8. Подмножества A и B конечного множества независимы тогда и только тогда, когда A и $\overline{B}$ независимы.

6.2.9. Существуют подмножества A, B_1, B_2 конечного множества,

(a) попарно независимые, но для которых A зависимо от $B_1 \cap B_2$;

(b) не являющиеся попарно независимыми, но для которых A независимо и от B_1, и от B_2, и от $B_1 \cap B_2$.

6.2.10. (Ср. с замечанием после задачи 6.2.1.b.) Зависимы ли следующие подмножества множества всех раскрасок чисел $1, 2, \ldots, 400$ в два цвета?

(a) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ одноцветно.

(b) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ неодноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ неодноцветно.

(c) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{6, 7, \ldots, 13\}$ одноцветно.

6.2.11. (Ср. с замечанием после задачи 6.2.1.b.) Обозначим через $2^{[400]}$ семейство всех раскрасок множества $[400] := \{1, 2, \ldots, 400\}$ в два цвета. Для подмножества $\alpha \subset [400]$ обозначим через $A_\alpha \subset 2^{[400]}$

подмножество тех раскрасок, для которых α одноцветно. Тогда для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \subset [400] - [8]$ подмножество $A_{[8]}$ не зависит от пересечения $A_{\alpha_1} \cap \ldots \cap A_{\alpha_n}$.

Подробнее о независимости см. [KZP].

Лемма Ловаса

Приведем задачи, которые подведут нас к лемме Ловаса 6.2.15.

6.2.12. (a) В городе доля богатых горожан больше 2/3, доля здоровых больше 2/3 и доля умных больше 2/3. Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин?

(b) В городе доля богатых горожан больше 3/4, доля здоровых больше 3/4 и доля умных больше 3/4. Обязательно ли среди здоровых умных большинство богаты?

(c) В городе есть богатый горожанин, есть здоровый горожанин и есть умный горожанин. Богатство, здоровье и ум попарно независимы (т.е., например, доля богатых здоровых среди богатых такая же, как и доля здоровых среди всех жителей). Доля богатых здоровых умных среди богатых здоровых такая же, как и доля умных среди всех жителей. (Вместе с условием попарной независимости последнее условие называется *независимостью в совокупности.*) Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин?

(d) Тот же вопрос, если в городе богатых горожан больше половины, здоровых больше половины, умных больше половины, богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы.

(e) В городе доля богатых горожан больше 2/3, доля здоровых больше 2/3 и доля умных больше 2/3. Богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы. Может ли доля богатых здоровых умных быть меньше 1/5?

(f) В городе доля богатых горожан больше 5/8, доля здоровых больше 5/8 и доля умных больше 5/8. Богатство и здоровье независимы. Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин?

Задача 6.2.12 показывает, что чем сильнее условие, характеризующее независимость нескольких множеств, тем меньшей доли каждого множества достаточно, чтобы гарантировать непустоту пересечения. Причем наиболее интересные результаты (6.2.12.def) получаются «посередине» между крайними условиями — полного отсутствия независимости (6.2.12.ab) и независимости в совокупности (6.2.12.c). Так часто бывает: наиболее полезные соображения находятся между «крайними» точками зрения.

Для леммы Ловаса нужно еще более «хитрое» условие независимости на несколько множеств, чем рассмотренные ранее.

6.2.13. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше 3/4.

(a) Пусть A_1 независимо с $A_3 \cap A_4$. Тогда $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| > \frac{1}{2}|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

(b) Пусть A_1 независимо с $A_3 \cap A_4 \cap A_5$. Тогда $|A_1 \cap \ldots \cap A_5| > \frac{5}{6}|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$.

(c) Пусть A_k независимо с $A_{k+2} \cap \ldots \cap A_n$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-3$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

6.2.14. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше 7/8.

(a) Тогда $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| > \frac{4}{5}|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

(b) Пусть A_1 независимо с $A_4 \cap A_5$. Тогда $|A_1 \cap \ldots \cap A_5| > \frac{13}{16}|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$.

(c) Пусть A_k независимо с $A_{k+3} \cap \ldots \cap A_n$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-4$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

6.2.15. Локальная лемма Ловаса в симметричной форме. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества. Пусть для некоторого d и любого k*

- *доля подмножества A_k не меньше $1 - \dfrac{1}{4d}$, и*
- *из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно вычеркнуть не более d множеств, среди которых есть A_k, так что пересечение любого набора из оставшихся множеств будет независимо с A_k.*

Тогда $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.[10]

---

[10]Вот формулировка на вероятностном языке, которая не используется в дальнейшем. *Пусть дано вероятностное пространство и $A_1, \ldots, A_n$ — события. Пусть для некоторого d и любого k вероятность события A_k не меньше*

бы $200-22i \geqslant 2$ человека, ни один из которых не является ни хулиганом, ни старостой. Поэтому мы можем выбрать $(i+1)$-го старосту из этих оставшихся.

6.2.4. (a) Покрасим каждое число $x \in \mathbb{R}$ в четность числа $[x/M]$, т.е. в черный цвет, если число $[x/M]$ четно, и в нечерный цвет, если оно нечетно.

6.2.6. Ответы: (a,b) независимы, (c) зависимы.

6.2.7. Ответы: (a) независимы, (b,c,d) зависимы.

6.2.9. (a) Возьмем в качестве A, B_1 и B_2 диагональ, первую горизонталь и первую вертикаль таблицы (скажем, 2×2).

Следующее более формальное и полное изложение решения написано В. Немычниковой. Возьмем

$$M := \{1,2,3,4\}, \quad A := \{1,4\}, \quad B_1 := \{2,4\} \quad \text{и} \quad B_2 := \{3,4\}.$$

Тогда A, B_1, B_2 попарно независимы, ибо

$$4 = |M||A \cap B_1| = |A||B_1| = |M||A \cap B_2| = |A||B_2| = |M||B_2 \cap B_1| = |B_2||B_1|.$$

Но A зависимо от набора B_1, B_2, ибо $|M||A \cap B_1 \cap B_2| = 4 \neq |A||B_1 \cap B_2|$.

(b) Можно взять A, независимое с $B_1 = B_2$. Или A, независимое с B_1 и с B_2, причем $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Следующее более формальное и полное изложение решения написано В. Немычниковой. Возьмем

$$M := \{1,2,3,4\}, \quad A := \{2,3\}, \quad B_1 := \{1,2\} \quad \text{и} \quad B_2 := \{3,4\}.$$

Тогда A независимо от набора B_1, B_2, ибо

$$|M||A \cap B_1| = |A||B_1| = 4 = |M||A \cap B_2| = |A||B_2| = 4$$

$$\text{и} \quad |M||A \cap B_1 \cap B_2| = 0 = |A||B_1 \cap B_2|.$$

Но B_1 и B_2 зависимы, ибо $|M||B_2 \cap B_1| = 0 \neq |B_2||B_1|$.

6.2.10. Ответы: (a,b) независимы, (c) зависимы.

Далее будем иногда пропускать знаки пересечения и числа элементов.

6.2.12. Обозначим через У,Б,З,Г множества умных, богатых, здоровых и всех горожан, соответственно.

(b) Имеем $УБ\overline{З} \leqslant \overline{З} \leqslant Г/4 < УБ/2$.

(d) Забудьте про глупых людей!

Замечание. Для решения задачи достаточно наличия одного умного человека. Не обязательно, чтобы умных было большинство.

Приведем более сложное решение. Зато оно подводит к п. (e,f) и лемме Ловаса. Имеем $УБ > У/2 < УЗ$. Значит,

$$УБЗ = УБ - УБ\overline{З} > \frac{У}{2} - У\overline{З} > \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) У = 0.$$

(e) Нет, доля больше $2/9$.

(f) Приведем более сложное решение, чем Ваше. Зато оно подводит к лемме Ловаса. Имеем

$$УБЗ = УБ - УБ\overline{З} \geqslant У + Б - Г - Б\overline{З} = У - Г + БЗ >$$
$$> \left(\frac{5}{8} - 1 + \frac{25}{64}\right) Г = \frac{1}{64} Г > 0.$$

6.2.13. (a) Обозначим через M данное конечное множество. Имеем $\overline{A_2}A_3A_4 \leqslant \overline{A_2} < M/4 < A_3A_4/2$ (это решение задачи 6.2.12.b). Так как A_1 не зависит от A_3A_4, то и $\overline{A_1}$ не зависит от A_3A_4. Поэтому

$$A_2A_3A_4 = A_3A_4 - \overline{A_2}A_3A_4 > A_3A_4/2 > 2\overline{A_1}A_3A_4 \geqslant 2\overline{A_1}A_2A_3A_4.$$

Отсюда

$$A_1A_2A_3A_4 = A_2A_3A_4 - \overline{A_1}A_2A_3A_4 > A_2A_3A_4/2.$$

(b) Аналогично п. (a).

Обозначим $X_k := A_k \cap A_{k+1} \cap \ldots \cap A_n$. Тогда X_{n+1} — данное конечное множество.

6.2.13. (c) Аналогично п. (a,b) докажите, что

$$X_1 > \frac{1}{2}X_2 > \frac{1}{4}X_3 > \ldots > \frac{1}{2^{n-2}}X_{n-1} > \frac{1}{2^{n-1}}X_{n+1}.$$

6.2.14. Аналогично утверждениям 6.2.13.

других таких прогрессий (докажите!). Применим локальную лемму Ловаса 6.2.15 к дополнениям множеств A_α и $d = 2^{29}$. Это возможно ввиду утверждения задачи 6.2.8. Получим $\cap_\alpha \overline{A_\alpha} \neq \varnothing$.

6.2.4. (b) Обозначим через A семейство раскрасок множества $X \cup (M_1 + X) \cup \dots \cup (M_{25} + X)$ в 3 цвета. Для любого $x \in X$ обозначим через $A_x \subset A$ подсемейство раскрасок, для которых среди цветов чисел $x, x + M_1, \dots, x + M_{25}$ не все цвета присутствуют. Тогда $|A_x|/|A| \leqslant 3(2/3)^{26}$. Каждое множество A_x «зависимо не более чем с $25 \cdot 26 = 650$ другими» (т.е. независимо от пересечения любого поднабора множеств из набора всех множеств, кроме некоторых 650). Применим локальную лемму Ловаса 6.2.15 к дополнениям множеств A_x и $d = 650$. Это возможно ввиду утверждения задачи 6.2.8 и неравенства $(3/2)^{26} > 2^{13} > 8000 > 7800 = 3 \cdot 2600 = 3 \cdot 4 \cdot 650$. Получим $\cap_x \overline{A_x} \neq \varnothing$.

(c) Теперь при помощи *соображений компактности* выведем из этого факта его аналог для бесконечного X, в частности, для $X = \mathbb{R}$ [AS, §5.2]. (Оставшаяся часть решения написана с использованием текста А. Волостнова.)

Назовём раскраску в 3 цвета множества X *радужной*, если для любого числа $x \in X$ такого, что $x + M_1, \dots, x + M_{25} \in X$, среди чисел $x, x + M_1, \dots, x + M_{25} \in X$ есть числа каждого из трех цветов.

Введем на множестве действительных чисел следующее отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y = k_1 M_1 + \ldots + k_{25} M_{25}$ для некоторых целых $k_1, \dots, k_{25}$. (Эту эквивалентность можно назвать «сравнимостью по модулю $\gcd(M_1, \dots, M_{25})$».) Ясно, что числа $x, x + M_1, \dots, x + M_{25}$ принадлежат одному классу эквивалентности. Следовательно, для решения задачи достаточно доказать существование радужной раскраски каждого класса эквивалентности.

Возьмем любое $a \in \mathbb{R}$. Тогда его класс эквивалентности

$$[a] = \{a + k_1 M_1 + \ldots + k_{25} M_{25} \ : \ k_1, \dots, k_{25} \in \mathbb{Z}\}.$$

Для каждого целого $n \geqslant 0$ обозначим

$$[a]_n = \{a + k_1 M_1 + \ldots + k_{25} M_{25} \ : \ k_1, \dots, k_{25} \in \mathbb{Z}, \ |k_1 + \ldots + k_{25}| < n\}.$$

Очевидно, что

$$\varnothing = [a]_0 \subset [a]_1 \subset \ldots \subset [a]_n \subset \ldots \subset [a] = \bigcup_{i=0}^{\infty} [a]_i.$$

Достаточно доказать, что существует бесконечное семейство $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ радужных раскрасок множеств $[a]_0, [a]_1, \ldots, [a]_n, \ldots$, каждая раскраска τ_n из которых является продолжением раскраски τ_{n-1}. Тогда правильная раскраска множества $[a]$ получится «объединением» всех раскрасок τ_n.

Докажем существование такого семейства $\{\tau_n\}$. Раскраска множества $[a]_0 = \emptyset$ тривиальна. Предположим, что раскраска τ_{n-1} построена (тем самым, построены и $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-2}$), причем для любого натурального $m \geqslant n$ существует правильная раскраска множества $[a]_m$, продолжающая раскраску τ_{n-1}. Так как множество $[a]_n$ конечно, то по доказанному факту его можно радужно раскрасить. Кроме того, любая радужная раскраска множества $[a]_n$ является продолжением некоторой радужной раскраски множества $[a]_{n-1}$. Поэтому раскраску τ_{n-1} можно конечным числом способов $\tau_n^1, \ldots, \tau_n^k$ продолжить до радужной раскраски множества $[a]_n$.

Предположим, что для любого $i = 1, \ldots, k$ существует $m_i > n$ такое, что ни одна из правильных раскрасок множества $[a]_{m_i}$ не является продолжением раскраски τ_n^i. Обозначим $m := \max\{m_1, \ldots, m_k\}$. Тогда ни одна из правильных раскрасок τ множества $[a]_m$ не является продолжением ни одной из раскрасок τ_n^i. Значит, τ не является продолжением раскраски τ_{n-1}. Противоречие.

Поэтому существует $i = 1, \ldots, k$ такое, что для любого натурального $m > n$ существует правильная раскраска множества $[a]_m$, продолжающая раскраску τ_n^i. Положим $\tau_n := \tau_n^i$. Поскольку при определении раскраски τ_n не менялись раскраски $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$, то так получается нужное бесконечное семейство раскрасок.

6.2.13. (b) Используем обозначения X_k для $n = 5$. Тогда $\overline{A_2}X_3 \leqslant \overline{A_2} < X_6/8 < X_3/5$ (аналогично задаче 6.2.5.(b)). Так как A_1 не зависит от X_3, то и $\overline{A_1}$ не зависит от X_3. Поэтому

$$X_2 = X_3 - \overline{A_2}X_3 > \frac{4}{5}X_3 > \frac{32}{5}\overline{A_1}X_3 > 6\overline{A_1}X_3 \geqslant 6\overline{A_1}X_2.$$

Отсюда $X_1 = X_2 - \overline{A_1}X_2 > \frac{5}{6}X_2$.

(c) Так как $X_1 = X_2 - \overline{A_1}X_2$, то неравенство $X_1 > \frac{1}{2}X_2$ равносильно неравенству $\overline{A_1}X_2 < \frac{1}{2}X_2$. Докажем последнее неравенство при помощи индукции по n.

База индукции $n = 1$ вытекает из $\overline{A_1} = X_2 - A_1 < \frac{1}{4}X_2 \le \frac{1}{2}X_2$.

Докажем шаг индукции. По предположению индукции $\overline{A_2}X_3 < \frac{1}{2}X_3$. Так как A_1 не зависит от X_3, то и $\overline{A_1}$ не зависит от X_3. Поэтому

$$X_2 = X_3 - \overline{A_2}X_3 > \frac{1}{2}X_3 > 2\overline{A_1}X_3 \geqslant 2\overline{A_1}X_2.$$

6.2.14. (a) Обозначим через M данное конечное множество. Тогда $\overline{A_1}A_2A_3A_4 \leqslant \overline{A_1} < M/8 < A_2A_3A_4/5$.

(b) *При написании этого решения использован текст В. Иванова.* По п. (a) $X_2 > \frac{4}{5}X_3$. Так как

$$X_4 > \left(1 - \frac{2}{8}\right) M = \frac{3}{4}M, \quad \text{то} \quad \overline{A_3}X_4 < \overline{A_3} < \frac{1}{8}M < \frac{1}{6}X_4.$$

Отсюда

$$X_3 = X_4 - \overline{A_3}X_4 > \frac{5}{6}X_4.$$

Тогда, используя независимость A_1 с X_4, получаем

$$X_2 > \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}X_4 \geqslant \frac{4}{6} \cdot 8\overline{A_1}X_4 = \frac{16}{3}\overline{A_1}X_4.$$

Поэтому

$$X_1 = X_2 - \overline{A_1}X_2 > X_2 - \overline{A_1}X_4 > \left(1 - \frac{3}{16}\right) X_2 = \frac{13}{16}X_2.$$

(c) Достаточно доказать, что $X_1 > \frac{3}{4}X_2$. Так как $X_1 = X_2 - \overline{A_1}X_2$, то неравенство $X_1 > \frac{3}{4}X_2$ равносильно неравенству $\overline{A_1}X_2 < \frac{1}{4}X_2$. Докажем последнее неравенство при помощи индукции по n.

База индукции $n = 1$ вытекает из $\overline{A_1} = X_2 - A_1 < \frac{1}{8}X_2 \le \frac{1}{4}X_2$.

Докажем шаг индукции. По предположению индукции $\overline{A_2}X_3 < \frac{1}{4}X_3$. Так как A_1 не зависит от X_4, то и $\overline{A_1}$ не зависит от X_4. Поэтому

$$X_2 = X_4 - (\overline{A_2} \cup \overline{A_3})X_4 \geqslant X_4 - \overline{A_2}X_4 - \overline{A_3}X_4 > \frac{1}{2}X_4 > 4\overline{A_1}X_4 \geqslant 4\overline{A_1}X_2.$$

6.2.15. *При написании этого решения, по сути принадлежащего Ловасу, использован текст А. Ремизовой, подготовленный в ходе обсуждений на семинарах по дискретному анализу на ФИВТ МФТИ.* Так как $|X_1| = |X_2| - |\overline{A_1} \cap X_2|$, то утверждение (I) (из подсказки) равносильно утверждению

$$|\overline{A_1} \cap X_2| \leqslant \frac{1}{2d}|X_2| \quad \text{для любого} \quad n.$$

Докажем последнее утверждение при помощи индукции по n. База индукции $n = 1$ вытекает из

$$|\overline{A_1}| = |X_2| - |A_1| \leqslant \frac{1}{4d}|X_2| \leqslant \frac{1}{2d}|X_2|.$$

Докажем шаг индукции. Без ограничения общности, будем считать, что A_1 не зависит от X_{d+1}. Тогда и $\overline{A_1}$ не зависит от X_{d+1}. Для каждого $j \in \{2, 3, \ldots, d\}$ применим предположение индукции к системе подмножеств $A_j, A_{d+1}, A_{d+2}, \ldots, A_n$. Получим $|\overline{A_j} \cap X_{d+1}| \leqslant \frac{1}{2d}|X_{d+1}|$. Значит,

$$|X_2| = |X_{d+1}| - |(\overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_d}) \cap X_{d+1}| \geqslant |X_{d+1}| - \sum_{j=2}^{d} |\overline{A_j} \cap X_{d+1}| \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 - \frac{d-1}{2d}\right)|X_{d+1}| > \frac{1}{2}|X_{d+1}| \geqslant 2d|\overline{A_1} \cap X_{d+1}| \geqslant 2d|\overline{A_1} \cap X_2|.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.2.16. (a) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше $2/3$. Пусть A_k и A_{k+1} независимы для любого $k = 1, 2, 3$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \neq \varnothing$.

(b)* Пусть $n \geqslant 2$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше $1 - \dfrac{1}{n-1}$. Пусть A_k и A_{k+1} независимы для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$.

6.2.17. (a) При $d > 2$ в локальной лемме Ловаса 6.2.15 можно заменить $1 - \dfrac{1}{4d}$ на $1 - \dfrac{1}{e(d+1)}$, где e — основание натуральных логарифмов.

(b) Если $a_k = 1$ при любом $k \leqslant 0$ и для некоторого d выполнено $a_{k+1} \geqslant a_k - \dfrac{a_{k-d}}{4d}$ при любом $k \geqslant 0$, то $a_k > 0$ при любом k.

6.2.18. Даны число

(a) $k \geqslant 10$; (b) $k = 9$

и семейство k-элементных подмножеств конечного множества M. Если каждый элемент множества M содержится ровно в k подмножествах семейства, то существует раскраска множества M в два цвета, для которой каждое подмножество семейства содержит элементы обоих цветов.

(Т.е. хроматическое число любого k-однородного k-регулярного гиперграфа равно двум при $k \geqslant 9$. Ср. с задачей 6.2.1.b.)

6.2.19. В конечном множестве выбрано несколько подмножеств. В каждом из них не менее 3 элементов. Каждое из них пересекается не более чем с a_i выбранными i-элементными подмножествами. Если $\sum_i a_i 2^{-i} \leqslant 1/8$, то можно покрасить элементы данного множества в два цвета так, чтобы каждое выбранное подмножество содержало элементы обоих цветов.

6.2.20. (a) Для любого разбиения множества вершин цикла длины $16n$ на n подмножеств по 16 вершин можно выбрать по вершине из каждого подмножества так, что никакие две выбранные вершины не соседние.

(b) То же для $11n$ вершин.

(c) В графе степень каждой вершины не превосходит Δ. Все вершины раскрашены в r цветов. Вершин каждого цвета не менее $2e\Delta + 1$. Тогда можно выбрать r вершин разных цветов, никакие две из которых не соединены ребром.

6.2.21. (a) Каждую k-элементную арифметическую прогрессию в множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ пересекает не более $k^2 \left[\dfrac{n}{k-1}\right]$ других таких прогрессий.

7 Алгебраические методы

Напомним, что для множества F

$$F^n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ : \ a_1, a_2, \ldots, a_n \in F\}.$$

Элементы этого множества называются *векторами* (или *упорядоченными наборами*, или *точками*). Если $F \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, то векторы можно покомпонентно складывать:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Если $F \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, то вектор можно покомпонентно умножить на число $\lambda \in F$:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

(Это можно делать и для $F = \mathbb{Z}_2$, но не интересно.)

Расстояние между точками пространства $\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$|(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Для $F \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ *скалярное произведение* $F^n \times F^n \to F$ определяется формулой

$$x \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Векторы $x, y \in F^n$ называются *ортогональными*, если $x \cdot y = 0$.

7.1 Линейно-алгебраический метод в комбинаторике

7.1.1. *Теорема о линейной зависимости.*

($\mathbb{Z}_2$) Среди любых $n + 1$ наборов длины n из нулей и единиц найдется несколько (не ноль) наборов, покомпонентная сумма по модулю два которых есть нулевой набор.

($\mathbb{Q}$) Для любых $n + 1$ векторов $v_1, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{Q}^n$ найдутся рациональные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$, не все равные нулю, для которых $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+1} v_{n+1} = (0, \ldots, 0)$.

($\mathbb{R}$) Аналог теоремы ($\mathbb{Q}$) справедлив для вещественных, комплексных и целых чисел.

Наборы из задач 7.1.1.($\mathbb{Z}_2$),($\mathbb{Q}$) называются *линейно зависимыми* — над $\mathbb{Z}_2$ и над $\mathbb{Q}$ соответственно. *Линейная независимость* — отрицание *линейной зависимости*. Аналогично определяется линейная (не)зависимость многочленов над $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Q}$ соответственно. (Эти и следующие понятия используются в формулировках задач 7.1.4.c, 7.1.5.c и в решениях некоторых задач.)

Линейным подпространством называется подмножество $L \subset \mathbb{Q}^n$, замкнутое относительно сложения векторов и умножения на рациональные числа.

Линейное подпространство L называется *n-мерным*, если найдутся такие линейно независимые векторы $v_1, \ldots, v_n \in L$, что любой вектор $v \in L$ линейно выражается через данные векторы, т. е. найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$, для которых $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Число n называют *размерностью* пространства L. Ср. с определением перед задачей 1.4.7.

Замечание. Аналогичные определения можно дать и в более общей ситуации — это приводит к понятию *кольца* и *модуля* над ним. Попытка доказать (и использовать!) аналог теоремы о линейной зависимости (задачи 7.1.1) приводит к понятиям *поля* и *линейного пространства* над ним. (Для случая целых чисел уже не все обобщения проходят.) Подробности можно найти в учебнике по линейной алгебре.

Фраза «N элементов» (в частности, подмножеств) означает «N попарно различных элементов» (в частности, подмножеств).

7.1.2. Дано семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества $\mathcal{R}_n$.

(a) Если в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ нечётное число элементов, а в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ чётное число элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(b) Постройте пример, когда эта оценка достигается.

(c) Если в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно q элементов и в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ более q элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(d) Если $q > 0$ и в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно q элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

7.1.3. (a) Существуют 2^k подмножеств $2k$-элементного множества, в каждом из которых чётное число элементов и в пересечении любых двух из которых чётное число элементов.
(b) Больше чем 2^k подмножеств в условиях п. (a) быть не может.

7.1.4. (a) Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n$ с равными попарными расстояниями равно $n+1$.
(b) Постройте $n(n-1)/2$ точек в $\mathbb{R}^n$, попарные расстояния между которыми принимают только два различных значения.
(c) Для $a \in \mathbb{R}$ и точек $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $P_v(x) := |x - v|^2 - a^2$. Если попарные расстояния между k точками $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ равны a, то многочлены $P_{u_1}, \ldots, P_{u_k}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.
(d) Если попарные расстояния между k точками в $\mathbb{R}^n$ принимают только два различных значения, то $k \leqslant (n+1)(n+4)/2$.

7.1.5. (a) Среди любых 327 попарно пересекающихся 9-элементных подмножеств 25-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 3 или ровно 6 элементов.
(b) Для $n, k \in \mathbb{Z}$ обозначим

$$V_{n,k} := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \ : \ \sum_s x_s = k \right\}.$$

Среди любых 327 точек в $V_{25,9}$ есть две, скалярное произведение которых делится на 3.
(c) Для любого $\vec{a} \in V_{25,9}$ раскроем скобки в произведении

$$(\vec{a} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{25}))^2 - 1$$

по модулю 3, где $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ — переменные. Каждый из полученных одночленов λx_i^2 заменим на λx_i. Полученный многочлен (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_3$) обозначим $F_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_{25})$.
Докажите, что если скалярное произведение никаких двух векторов среди $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \in V_{25,9}$ не делится на 3, то многочлены $F_{\vec{a}_1}, \ldots, F_{\vec{a}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}_3$.
(d) Укажите 326 многочленов, линейными комбинациями которых с рациональными коэффициентами можно получить каждый многочлен $F_{\vec{a}}$, $\vec{a} \in V_{25,9}$.

7.1.6. (a) Среди любых 107 пятиэлементных подмножеств 14-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 2 элемента.
(b) То же для 93 подмножеств.
(c) То же для 92 подмножеств.
(d) Невозможно раскрасить в 21 цвет все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества так, чтобы любые два пятиэлементные подмножества, пересекающиеся ровно по двум элементам, были разноцветны.
(Ср. с замечанием в задаче 5.1.4. Вот эквивалентная формулировка. Вершинами графа являются все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества. Его ребрами являются пары подмножеств, пересекающиеся ровно по двум элементам. Докажите, что этот граф нельзя правильно раскрасить в 21 цвет.)

7.1.7. (a) *Теорема Франкла-Уилсона.* Если p простое и $n > k$ целые, то среди любых $1+\sum\limits_{j=0}^{p-1}\binom{n}{j}$ подмножеств n-элементного множества, в каждом из которых k элементов, найдутся два подмножества, число элементов в пересечении которых делится на p.

(b) То же, только задано целое a и «делится на p» заменено на «сравнимо с a по модулю p».

7.1.8. *Теорема Фрэнкла-Уилсона.* Пусть $p > 2$ простое и в множестве из $n = 4p^\alpha$ элементов выбрано $2\binom{n-1}{n/4-1}$ подмножеств по $n/2$ элементов в каждом. Тогда найдутся два множества, имеющие ровно $n/4$ общих элементов.

7.1.9. (a) Если множество рёбер графа K_n является объединением множеств рёбер s полных двудольных графов, не пересекающихся по рёбрам, то $s \geqslant n-1$.
(b) Постройте набор двудольных графов, на котором эта оценка достигается.

Ср. с п. 5.1, 5.7 и 7.3. Более подробное и развернутое изложение можно найти в [Mk, R15], а более продвинутое — в [BF].

7.2 Матрицы Адамара

7.2.1. *Теорема Адамара.* Если у матрицы A размера $n \times n$ каждый элемент по модулю не превосходит 1, то $|\det A| \leqslant n^{n/2}$.

Квадратная матрица H называется *матрицей Адамара*, если все её элементы равны ± 1 и $H \cdot H^T = nE_n$, где n — порядок матрицы H и E_n — единичная матрица.

7.2.2. (2,4,8,16,12) Постройте матрицу Адамара $n \times n$ для $n = 2, 4, 8, 16, 12$.

7.2.3. (a) У матрицы Адамара любые два столбца ортогональны.
(b) Матрица является матрицей Адамара тогда и только тогда, когда её элементы равны ± 1 и любые две строки ортогональны.
(c) Для матриц Адамара достигается верхняя оценка в теореме Адамара. (Название матрицы Адамара получили благодаря этому результату.)
(d) Если существует матрица Адамара $n \times n$ и $n > 2$, то n делится на 4.

Гипотеза. Матрица Адамара $n \times n$ существует для любого числа n, делящегося на 4.

Гипотеза не доказана даже для некоторых чисел, меньших 1000; а именно, для 668, 716, 892.

Для решения двух следующих задач потребуются простейшие свойства квадратичных вычетов; см. [GIM, §9], [Vi, §5], [ZSS, 3.3].

7.2.4. Для простого числа p обозначим $S_d = S_{p,d} := \sum\limits_{j=1}^{p-1} \left(\dfrac{j(j+d)}{p} \right)$ (это сумма символов Лежандра).

(a) Докажите, что S_d не зависит от $d \in \{1, \ldots, p-1\}$.

(b) Найдите S_d для каждого $d = 1, \ldots, p-1$.

7.2.5. Постройте матрицу Адамара $n \times n$ для

(2a) $n = 2a$, если существует матрица Адамара $a \times a$;

(ab) $n = ab$, если существуют матрицы Адамара $a \times a$ и $b \times b$;

(4k) $n = p + 1$, где p — простое число вида $4k - 1$;

(8k+4) $n = 2p + 2$, где p — простое число вида $4k + 1$.

Матрица Адамара называется *нормализованной*, если у неё первая строчка и первый столбец состоят из одних единиц.

7.2.6. Нарисуйте все нормализованные матрицы Адамара порядков 1; 2; 4.

7.2.7. Адамаровость матрицы сохраняется при следующих преобразованиях:

(1) умножение строчки или столбца на -1;

(2) перестановка строчек или столбцов местами.

Матрицы Адамара, получаемые друг их друга применением некоторого числа преобразований (1) и (2), называются *эквивалентными*.

7.2.8. (a) Какие из матриц из задачи 7.2.6 эквивалентны?
(b) Любая матрица Адамара эквивалентна некоторой нормализованной.

Количество классов эквивалентности: для порядков 1,2,4,8,12 — 1, 16 — 5, 20 — 3, 24 — 60, 28 — 487, 32 — больше миллиона.

7.2.9. Для любых ли матриц Адамара H и H' матрицы $H \otimes H'$ и $H' \otimes H$ эквивалентны? Здесь тензорное произведение $\otimes$ определено в указании к задаче 7.2.5.(ab).

7.2.10. Матрица Адамара H, построенная при помощи конструкции (Пэйли) из задачи 7.2.5.($8k+4$), эквивалентна матрице H^T.

7.2.11.* Существует ли матрица Адамара H, не эквивалентная матрице H^T?

7.3 Короткое опровержение гипотезы Борсука

В этом пункте приводится простейшее из известных опровержений следующей гипотезы Борсука: *любое ограниченное подмножество n-мерного евклидова пространства, содержащее более n точек, можно разбить на $n+1$ непустых частей меньшего диаметра.* Доказательство принадлежит Н. Алону и является замечательным приложением комбинаторики и алгебры к геометрии.

Теорема 7.3.1 (Борсук). *Любое ограниченное подмножество плоскости, в котором более двух точек, можно разбить на три непустые части меньшего диаметра.* [13]

Диаметром непустого подмножества плоскости называется наибольшее расстояние между его точками (точнее, супремум таких расстояний). Подмножество плоскости называется *ограниченным*, если его диаметр конечен.

Борсук предложил следующее обобщение своего результата, которое долгие годы было одной из наиболее интригующих проблем комбинаторной геометрии.

Диаметр и *ограниченность* подмножества n-мерного евклидова пространства определяется точно так же, как и в случае плоскости.

Гипотеза Борсука утверждает, что любое ограниченное подмножество n-мерного евклидова пространства, содержащее более n точек, можно разбить на $n+1$ непустых частей меньшего диаметра.

(Нетрудно придумать подмножество n-мерного евклидова пространства, которое нельзя разбить на n частей меньшего диаметра. Для $n = 3$ годится правильный тетраэдр, для произвольного n годится n-мерный симплекс.)

В 1993 Д. Кан и Дж. Калаи, следуя идеям Болтянского, Эрдеша и Лармана о применении комбинаторики для построения контрпримера, нашли контрпример к гипотезе Борсука [KK93]. Подробно история вопроса описана в [AZ04], [R14].

Теорема 7.3.2. *Существует n и ограниченное подмножество n-мерного евклидова пространства, содержащее более n точек и которое невозможно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра.*

Мы приведем (ср. [S13]) простейшее из известных доказательств, принадлежащее Н. Алону, ср. [N94, S96, G99, R04, AZ04], [R14]. (При этом другие доказательства дают более сильные результаты.)

---

[13] *Указание к доказательству.* Сначала, используя «соображения непрерывности», докажите, что любую плоскую фигуру диаметра 1 можно заключить в правильный шестиугольник, диаметр вписанной окружности которого равен 1. Затем докажите, что хотя диаметр полученного правильного шестиугольника больше 1, его можно разрезать на три части диаметра меньше 1. Ср. [Y10].

Это удивительный пример важного результата в современной математике, не требующего для полного понимания полугодового специального университетского курса (после двухгодового обязательного курса). Более простые применения аналогичных алгебраических соображений в комбинаторике можно найти в п. 7.1.

Доказательство теоремы 7.3.2. Обозначим

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) \mid$$

$$\mid x_1 = 1,\ x_2, \dots, x_n \in \{1, -1\} \text{ и среди } x_2, \dots, x_n \text{ число минус единиц четно}\}.$$

Вершина n^2-мерного куба — набор длины n^2 из плюс или минус единиц. Его удобно представлять себе как таблицу $n \times n$. (Впрочем, если Вам удобнее работать с набором длины n^2, то можно и так!) Поставим в соответствие каждой точке $x = (x_1, \dots, x_n) \in M$ таблицу $x^T \otimes x$, определенную формулой $(x^T \otimes x)_{ij} := x_i x_j$. Например,

$$(1, -1, -1)^T \otimes (1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1).$$

Докажем, что контрпримером к гипотезе Борсука является множество M' всех таблиц $x^T \otimes x$, $x \in M$, для достаточно большого простого числа p и $n = 4p$.

Пусть $x, y \in M$. Тогда $(x_i x_j - y_i y_j)^2 = (1 - x_i y_i x_j y_j)^2$. Обозначим через $a = a(x, y)$ количество индексов i, для которых $x_i = y_i$. Тогда $x_i y_i = 1$ для a индексов i и $x_i y_i = -1$ для $n - a$ индексов i. Поэтому $|x^T \otimes x, y^T \otimes y|^2 = 4a(n - a)$. Это выражение максимально при $a = n/2$. Значит, условие $|x^T \otimes x, y^T \otimes y| = \mathrm{diam} M'$ равносильно условию $a = n/2$ и равносильно условию $x \cdot y = 0$.

Поэтому если множество M' разбито на k частей $Z'_1, \dots, Z'_k$ меньшего диаметра, то в каждом подмножестве Z_j множества M, отвечающем одной части Z'_j, никакие два вектора не ортогональны. Так как $x_1 = 1$ для любого $x \in M$, то $x^T \otimes x \neq y^T \otimes y$ при $x \neq y$. Значит, $|Z_i| = |Z'_i|$. Теперь доказываемая теорема вытекает из следующей леммы 7.3.3 об оценке, ибо $|M| = 2^{n-2}$. QED

Лемма 7.3.3 (Оценка)**.** *Если p — достаточно большое простое число и $n = 4p$, то среди любых $\lfloor 2^{n-2}/(n^2+1) \rfloor$ векторов в M найдется два ортогональных.*

Мы предлагаем читателю самостоятельно подумать над доказательством лемм утверждений перед тем, как читать их доказательства. При доказательстве леммы 7.3.3 об оценке можно забыть про конструкцию $x \otimes x$.

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 7.3.4. *Для простого p и целого t число*

$$G(t) := (t-1)(t-2)\dots(t-p+1)$$

делится на p тогда и только тогда, когда t не делится на p.

Рациональной линейной комбинацией многочленов $F_1, \dots, F_s$ называется любой многочлен $\lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_s F_s$ с рациональными $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Например, многочлен x_2 является рациональной линейной комбинацией многочленов $2x_1$, 1 и $x_1 + x_2$.

Многочлены называются *линейно независимыми*, если любая их рациональная линейная комбинация, в которой не все λ_k нулевые, не равна нулю. Например, n многочленов $1, x_2, x_3, \dots, x_n$ являются линейно независимыми.

Многочлен с рациональными коэффициентами от $n-1$ переменной $x_2, \dots, x_n$ *имеет степень менее* $n/4$, если он является рациональной линейной комбинацией многочленов

(*) $x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ — целые неотрицательные числа, сумма которых меньше $n/4$.

Лемма об оценке 7.3.3 вытекает из нижеследующих леммы 7.3.5 о линейной независимости и утверждения 7.3.6.

Лемма 7.3.5 (Линейная независимость)**.** *Пусть p простое, $n = 4p$, $A \subset M$ и никакие два вектора из A не ортогональны. Для каждого вектора $a \in A$ определим многочлен F_a с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ от $x_2, \dots, x_n$ формулой*

$$F_a(x_2, \dots, x_n) := G(a \cdot (1, x_2, \dots, x_n)).$$

Тогда многочлены F_a, $a \in A$, имеют степени меньше $n/4$ и линейно независимы.

Утверждение 7.3.6. *Пусть q простое и n достаточно большое целое (число $n/4$ не обязательно простое и равно q). Тогда любое линейно независимое над $\mathbb{Z}_q$ семейство многочленов с коэффициентами в $\mathbb{Z}_q$ от $x_2, \ldots, x_n$ степени менее $n/4$ содержит менее $\lfloor 2^{n-2}/(n^2+1) \rfloor$ многочленов.*

Доказательство леммы о линейной независимости. Утверждение о степени очевидно. Докажем линейную независимость. Пусть, напротив, $\lambda_1 F_{a_1} + \cdots + \lambda_s F_{a_s} = 0$ для некоторых $a_1, \ldots, a_s \in A$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{Z}_p$, причем не все λ_k нулевые. Здесь $a_1, \ldots, a_s$ — векторы, а не координаты. Не уменьшая общности, $\lambda_1 \neq 0 \in \mathbb{Z}_p$. Подставим в полученное равенство значения $x_2 = (a_1)_2, \ldots, x_n = (a_1)_n$.

Напомним, что скалярное произведение векторов — целое число (а не вычет по модулю p).

Из $a_1 \cdot a_1 = n = 4p$ и утверждения 7.3.4 вытекает, что $\lambda_1 F_{a_1} \neq 0$.

Так как n делится на 4 и для любых различных $a, b \in A$ число минус единиц в a и в b нечетно, то $a \cdot b$ делится на 4. Поэтому $a \cdot b \notin \{\pm p, \pm 2p, \pm 3p\}$. Из этого и $a \cdot b \neq 0$ вытекает, что $a \cdot b$ не делится на p. Значит, по утверждению 7.3.4 $\lambda_k F_{a_k} = 0$ при любом $k > 1$. Противоречие. QED

Доказательства утверждения 7.3.6. Количество упорядоченных решений $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ уравнения $\alpha_2 + \ldots + \alpha_n = d$ в целых неотрицательных числах равно $\binom{n+d-2}{d}$. При $d < p := \lfloor n/4 \rfloor$

$$\binom{n+d-2}{d} = \frac{(n+d-2)(n+d-3)\ldots(n-1)}{d!} <$$

$$< \binom{n+p-3}{p-1} < \binom{5p}{p-1} < \frac{(4+1)^{5p}}{4^{4p+1}} < 13^p.$$

Здесь предпоследнее неравенство получается из бинома Ньютона для $(4+1)^{5p}$ (ср. с доказательством утверждения 6.1.5.e), а последнее неравенство вытекает из $5^5 < 2^7 \cdot 5^2 < 2^8 \cdot 13$.

Поэтому и ввиду неравенства $13 < 2^4$ для достаточно большого n количество r многочленов в семействе (*) не превосходит $n 13^{n/4} < \lfloor 2^{n-2}/(n^2+1) \rfloor$.

Обозначим через $Q_1, \ldots, Q_r$ семейство многочленов (*), а через $F_1, \ldots, F_k$ данное линейно независимое семейство. Возьмем табли-

[Ga] *Гарднер М.* Рамсеевская теория графов. // Квант, 1988, N4, с. 15–20, 82. `http://kvant.mccme.ru/1988/04/ramseevskaya_teoriya_grafov.htm`

[Ge] *М. Л. Гервер,* О разбиении множеств на части меньшего диаметра: теоремы и контрпримеры, Мат. Просвещение, 3 (1999), 168-183.

[GHW] *H. H. Glover, J. P. Huneke and C. S. Wang*, 103 graphs that are irreducible for the projective plane, J. Comb. Th., 27:3 (1979) 332–370.

[GIF] *С. А. Генкин, И. В. Итенберг и Д. В. Фомин*, Ленинградские математические кружки, Киров, 1994.

[GIM] Основы комбинаторики и теории чисел. Сборник задач. А.А. Глибичук, Д.Г. Ильинский, Д.В. Мусатов и др. ИД «Интеллект», Долгопрудный, 2015.

[GKP] *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник А.* Конкретная математика. М.: Мир, 1998.

[Gr] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.

[Har] *Харари Ф.* Теория графов. М.: УРСС, 2003.

[Hal] *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[IRS] *Ильинский Д., Райгородский А., Скопенков А.* Независимость и доказательства существования в комбинаторике. Мат. Просвещение, 19 (2015). `http://arxiv.org/abs/1411.3171`

[IKRS] *Ильинский Д., Купавский А., Райгородский А., Скопенков А.* Дискретный анализ для математиков и программистов (подборка задач). Мат. Просвещение, 17 (2013), с. 162–181.

[Ig] *Игнатьев М.В.* Квантовая комбинаторика. Мат. Просвещение. 18 (2014), с. 66–111.

[JLR] *Janson S., Luczak T., Rucinski A.* Random Graphs. John Wiley, 2000.

[Ju] *Jukna S.* Extremal Combinatorics With Applications in Computer Science. Springer-Verlag, XVII (2001).

[KK] *J. Kahn and G. Kalai*, A counterexample to Borsuk's conjecture, Bull. AMS, 29:1 (1993) 60–62.

[KR] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2001. `http://ilib.mccme.ru/pdf/kurant.htm`

[KS] *Калужнин Л. А., Сущанский В. И.* Преобразования и перестановки. М.: Физматлит, 1985. http://lib.mexmat.ru/books/3692.

[Ku] *V. A. Kurlin*, Basic embeddings into products of graphs, Topol. Appl. 102 (2000) 113–137.

[KZP] *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.,* Введение в теорию вероятностей. Серия «Библиотечка «Квант» », выпуск 23. М.: Наука, 1982.
`http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/teorver.htm`

[Lo] *Lovász L.* Combinatorial Problems and Exercises. North-Holland, Amsterdam, 1979.

[Ma] *Yu. Makarychev*, A short proof of Kuratowski's graph planarity criterion, J. of Graph Theory, 25 (1997) 129–131.

[Mk] *J. Matoušek.* Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra, Amer. Math. Soc., 2010

[Mn] *А. Матушкин,* Непустота пересечения цепочки множеств, Мат. Просвещение, 20 (2016), 247–248.

[Mo] *B. Mohar,* 2-cell embeddings with prescribed face lengths and genus, Ann. Combin. 14 (2010) 525-532.
`http://www.fmf.uni-lj.si/~mohar/Reprints/Inprint/BM06_AC_Mohar_2cellEmbeddings.pdf.`

[MS] *Медников Л. Э., Шаповалов А.В.* Турнир городов: мир математики в задачах. МЦНМО, 2012.

[Ni] *A. Nilli*, On Borsuk's problem, Contemp. Math., 178 (1994) 209–210.

[NPP] *Ф.К.Нилов, А.А.Полянский, Н.А.Полянский.* Теорема Семереди - Троттера Мат. Просвещение, 21 (2017).

[Pr] *В. Прасолов.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. `http://www.mccme.ru/prasolov/`.

[PS] *В.В. Прасолов и М.Б. Скопенков.* Рамсеевская теория зацеплений // Мат. Просвещение. 2005. 9. С. 108-115.

[PT] *А.А.Полянский, П.Б.Тарасов.* Избранные задачи экзамена по дискретному анализу, Мат. Просвещение, 21 (2017).

[R04] *A. M. Raigorodskii*, The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary, Math. Intelligencer, 26:3 (2004) 4–12.

[R08] *Райгородский А.М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2008. `http://www.mccme.ru/free-books/dubna/raigor-4.pdf`

[R10] *Райгородский А.М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2010.

[R12] *Райгородский А.М.*, Комбинаторика и теория вероятностей. М.: Изд-во МФТИ, 2012.

[R13] *Райгородский А.М.*, Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии. М.: МЦНМО, 2013. `http://www.mccme.ru/free-books/dubna/raigor-2.pdf`

[R14] *Райгородский А.М.* Проблема Борсука. М.: МЦНМО, 2014.

[R15] *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.

[RS] *N. Robertson and P. D. Seymour*, Graph minors VIII, A Kuratowski graph theorem for general surfaces, J. Comb. Theory, 48B (1990) 255–288.

[Ru] *Рухович А.* Степенные последовательности ориентированных графов, `http://www.mccme.ru/mmks/dec09/ruhovich.pdf`

[S] *Скопенков А.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения. `http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`

[S05] *Skopenkov A.* On the Kuratowski graph planarity criterion. `http://arxiv.org/abs/0802.3820`

Русскоязычная версия: *Скопенков А.* Вокруг критерия Куратовского планарности графов, Мат. Просвещение, 9 (2005), 116–128 и 10 (2006), 276–277.

[S06] *Скопенков А.* Олимпиады и математика. Мат. Просвещение, 10 (2006), с. 57–63.

[S08] *A. Skopenkov*, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, in: Surveys in Contemporary Mathematics, Ed. N. Young and Y. Choi, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342. arXiv:math/0604045

[S12] *Скопенков А.* Объемлемая однородность, МЦНМО, Москва, 2012. `http://arxiv.org/abs/1003.5278`

[S13] *Skopenkov A.* A two-page disproof of the Borsuk partition conjecture. `http://arxiv.org/abs/0712.4009`, v2.

Русскоязычная версия: *Скопенков А.* Короткое опровержение гипотезы Борсука. Мат. Просвещение, 17 (2013), с. 88–92.

[S14] *A. Skopenkov.* Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory, `http://arxiv.org/abs/1402.0658`

[S15] *Скопенков А.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. М.: МЦНМО, 2015. `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf`

[S95] *A. Skopenkov*, A description of continua basically embeddable in $\mathbb{R}^2$, Topol. Appl. 65 (1995) 29–48.

[S96] *A. Skopenkov*, The Borsuk problem, Quantum, 7:1 (1996) 16–21, 63.

[Sa] *K. S. Sarkaria*, Kuratowski complexes, Topology, 30 (1991) 67–76.

[So] *Соловьева Ф. И.* Введение в теорию кодирования. Новосибирск, 2006. http://tc.nsu.ru/uploads/codingtheory.pdf

[Su] *Д. Судзуки, Основы дзэн-буддизма.* Наука дзэн — ум дзэн. Киев: Преса України. 1992.

[SVY] *А. Волостнов, А. Скопенков и Ю. Яровиков,* Этюд о рекуррентных соотношениях, Мат. Просвещение 21 (2017), 213-218.

[Ta] Handbook of Graph Drawing and Visualization. Ed. R. Tamassia, CRC Press. https://cs.brown.edu/~rt/gdhandbook/.

[Th] *C. Thomassen, Kuratowski's theorem*, J. Graph. Theory, 5 (1981) 225–242.

[Ve] *Веснин А.Ю.* Гамильтоновы графы и остовные подграфы: задачи для исследования, материалы Московской математической конференции школьников.
http://www.mccme.ru/mmks/mar08/vesnin3.pdf

[Vi] *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.

[VS88] *Волков М., Силкин Н.* Кого послать на Марс? // Квант (1988) N8, с. 51–57.
http://kvant.mccme.ru/1988/08/kogo_poslat_na_mars.htm

[VS97] *Н.Б. Васильев и А.Б. Скопенков.* Решение задачи M1566. // Квант (1997) N2, с. 24.

[Ya] *Dian Yang*, An elementary proof of Borsuk theorem,
http://arxiv.org/abs/1010.1990.

[ZSS] Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. Изд-во МЦНМО, 2017.
http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf

[1] https://www.dpmms.cam.ac.uk/~dc340/EGT3.pdf

[2] http://www.cs.rit.edu/~spr/ElJC/ejcram14.pdf

[3] http://www.math.upenn.edu/~wilf/website/Three\%20problems.pdf

[4] http://www.unn.ru/math/no/5/_nom5_001_ilyin.pdf

[5] http://www.sosmath.com/calculus/sequence/stirling/stirling.html

[6] http://www.spbstu.ru/publications/m_v/n_002/Polischook/Stirling.pdf

[7] http://arxiv.org/pdf/1109.2546.pdf

[8] http://dainiak.blogspot.ru

Мат. Просвещение: http://www.mccme.ru/free-books/matpros

10 Программа курса ДА 2014-18 уч. годов

Нужно уметь решать задачи, аналогичные пп. 2.1-2.7, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.5, 5.1, 5.2, 5.5, 6.1-6.3, 7.1, 7.2 книги

Элементы дискретной математики в задачах, А.А. Глибичук, А.Б. Дайняк, Д.Г. Ильинский, А.Б. Купавский, А.М. Райгородский, А.Б. Скопенков, А.А. Чернов, Изд-во МЦНМО, 2016, `http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf`

В скобках указана ориентировочная сложность пункта программы. Формального смысла эти баллы не имеют (ср. со сценарием экзамена на `https://www.mccme.ru/circles/oim/home/bally.pdf`). Но мы надеемся, что они помогут студентам разумно организовать подготовку к экзамену: не изучать «сложных» пунктов программы, пока не изучены «простые». Пункты «на 5 и меньше» могут использоваться в дальнейших курсах без повторения материала.

«Без доказательства» сокращается до «б/д». В пунктах программы приводятся ссылки на вышеуказанную книгу (или на имеющийся в ней список литературы или на другую литературу).

Образцы вопросов приведены после программы и в [РТ].

Спасибо студентам за вопросы, благодаря которым появились мелкие уточнения.

Глава 2. Графы (1-й семестр)

1. (3) Определение графа, графов с петлями и кратными ребрами. Ориентированые графы. Соотношение между числом вершин и ребер дерева. (П. 2.1 и задачи 2.2.1.)

2. (5) Код Прюфера. Формула Кэли.(Задачи 2.2.3.a и 2.2.4.c.)

3. (6) Точная формула для числа уникликлических графов. (Задача 2.2.5.b.)

4. (5) Определение плоских и планарных графов. Формула Эйлера (б/д). Примеры непланарных графов. Критерий Понтрягина–Куратовского планарности графов (б/д).(П. 2.4 и задачи 2.4.2.)

5. (только в 2014-2016) (6) Классификация правильных многогранников с точностью до изоморфизма их графов. 6-раскрашиваемость любой карты на плоскости. (Задачи 2.4.3.cdefg и 2.4.4.a.)

6. (3) Пути и циклы. Простые пути и циклы. Критерии эйлеровости графа и ориентированного графа. (Задачи 2.5.3.ac.)

7. (5) Последовательности и графы де Брёйна.
(только в 2014-2016) Правило «ноль лучше единицы».
(Задачи 2.5.5–2.5.8.)

8. (5) Гамильтоновы пути и циклы. Достаточное условие Дирака гамильтоновости графа. (Задача 2.6.2.b.)

9. (7) Вершинная связность и число независимости графа. Достаточное условие гамильтоновости в их терминах. Гамильтоновость графа 1-пересечений 3-элементных подмножеств n-элементного множества. (Задачи 2.6.3, 2.6.4 и 2.6.5.c.)

10. (3) Гамильтоновы цепи в турнирах. Нижняя оценка с доказательством, верхняя — без. (Задача 2.6.7.)

11. (5) Теорема Турана о числе ребер в графе с данным числом вершин и числом независимости. Асимптотика наибольшего числа ребер в графе с n вершинами без k-клик. (Задачи 2.7.1 и 6.1.2.)

12. (6) Оценка числа ребер у дистанционного графа на плоскости и в пространстве произвольной размерности. Сравнение с теоремой Турана. (Задачи 2.7.2, 2.7.4, 2.7.5.)

Глава 3. Раскраски графов (1-й семестр)

13. (4) Соотношения между хроматическим числом, числом независимости и кликовым числом. (Задача 3.1.3 из главы 3.)

Глава 4. Основы теории Рамсея (2-й семестр)

14. (3) Числа Рамсея $R(s,t)$: точные значения для $s+t \leqslant 7$. Рекуррентная верхняя оценка Эрдеша–Секереша. (Задачи 4.1.1, 4.1.2.ac.)

15. (4) Следствие рекуррентной верхней оценки Эрдеша–Секереша для недиагональных и диагональных чисел Рамсея. Уточнение Конлона (б/д). Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея с помощью простого вероятностного метода. (Задачи 4.1.2.b, 4.1.5.)

16. (5) Многоцветные числа Рамсея $R_k(l_1, \dots, l_r)$ и их рекуррентная верхняя оценка. Следствие для $R_3(s,t)$. Нижняя вероятностная оценка для $R_3(s,s)$. (Задачи 4.2.2.b, 4.2.7, 4.3.3, 4.3.4.)

17. (9) Верхняя оценка Конлона для двудольных чисел Рамсея: лемма с конкретными l, m, r, s и ее аналог с последовательностями (б/д); доказательство оценки с использованием леммы. (Есть оригинальная статья Conlon'а, скачивается с его домашней страницы.)

18. (8) Конструктивная нижняя оценка Франкла–Уилсона для $R(s,s)$. Доказательство лемм для кликового числа и для числа независимости. [R10]

Глава 5. Системы множеств (гиперграфы) (19-26 1-й семестр, 21-30 2-й семестр)

19. (7) Гиперграфы. Гиперграфы t-пересечений. Теорема Эрдеша–Ко–Радо (о максимальном числе ребер в гиперграфе 1-пересечений). (Задача 5.1.3.)

20. (6) История последовательных продвижений: теорема Эрдеша–Ко–Радо (общий случай), теорема Франкла, теорема Уилсона, теорема Алсведе–Хачатряна. (Все б/д, но с подробными комментариями. Нужно продемонстрировать четкое понимание, что за параметры выбираются в теореме АХ: когда эта теорема превращается в ЭКР; когда оценка становится тривиальной ($\binom{n}{k}$); примеры конструкций, в которых можно явно посчитать, что оценка ЭКР не самая лучшая и АХ ее превосходит.) (Задачи 5.1.2, 5.1.3.)

21. (3) Системы общих представителей (с.о.п.). «Тривиальные» нижние и верхние оценки.

22. (5) Верхняя оценка размера минимальной с.о.п. с помощью жадного алгоритма. (Задачи 5.2.1, 5.2.5, 5.2.6.a.)

23. (8) Конструктивная нижняя оценка размера минимальной с.о.п. (Задача 5.2.6.b.)

24. (7) Нижняя оценка размера минимальной с.о.п. с помощью обобщенных с.о.п. (Задача 5.2.6.c.)

25. (9) Вероятностная нижняя оценка размера минимальной с.о.п. Следствие из нее. (Задача 5.2.6.def.)

26. (5) Системы различных представителей. Теорема Холла.

27. (5) Перманент. Формула разложения по строке. Связь с количеством систем различных представителей.

28. (6) С.о.п. в геометрии (теорема о треугольниках на плоскости, б/д). Размерность Вапника–Червоненкиса. Теорема Радона (б/д). Подсчет размерности семейства полупространств. Лемма о числе областей в пространстве заданной мощности и размерности. Лемма о размерности измельчения (достаточно доказать существование верхней оценки, не обязательно такой, как на лекции) (Задачи 5.5.1 и 5.5.2.bc.)

(только в 2014-16) Оценка числа подмножеств в семействе заданной размерности на n-элементном множестве. (Задача 5.5.9.)

29. (8) Эпсилон-сети. Теорема Вапника–Червоненкиса об эпсилон-сетях и теорема о треугольниках как частный случай.

30. (4) Теорема Вапника–Червоненкиса (б/д). Приложения в статистике: равномерная сходимость в ЗБЧ (УЗБЧ) и теорема Гливенко–Кантелли как частный случай.

Глава 6. Аналитические и вероятностные методы (31-35 1-й семестр, 36-48 2-й семестр)

31. (3) Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Оценки для $\binom{n}{n/2}$ с помощью тождества. (Задачи 6.1.7.a и 6.1.5.ab.)

32. (5) Асимптотика $\ln n!$ и $\sqrt[n]{n!}$ с доказательством без использования формулы Стирлинга. Формула Стирлинга (б/д). (Задача 6.1.6.)

33. (5) Оценки биномиальных коэффициентов вида $\binom{n}{[an]}$, $a \in (0,1)$. Аналогичный результат для полиномиальных коэффициентов. (Задача 6.1.5.cdef.)

34. (5) Асимптотика для $\binom{n}{k}$ при $k^2 = o(n)$. Оценки той же величины при больших k. Асимптотики для $\binom{n}{n/2}/\binom{n}{n/2-x}$. (Задача 6.1.7.bcde.)

35. (8) Асимптотика числа унициклических графов. (Задача 6.1.12.b.)

36. (5) Симметричный случай ЛЛЛ (б/д). Вывод оценки диагонального числа Рамсея (теорема Спенсера). (Задачи 6.2.15, 6.2.23.b и 6.2.28.a.)

37. (8) Симметричный и несимметричный случай ЛЛЛ (с доказательством симметричного либо напрямую, либо с доказательством несимметричного и выводом из него). (Задачи 6.2.15 и 6.2.28.a.)

38. (10+) Вывод из несимметричного случая ЛЛЛ нижней оценки для $R(3,t)$ (с выписыванием неравенств, требуемых для применения ЛЛЛ, но без их доказательства). Самые точные известные оценки для $R(3,t)$ (б/д). (Задача 6.2.28.b и замечание после нее.)

39. (5) Двудольные числа Рамсея: нижние оценки простым вероятностным методом и с помощью ЛЛЛ. Отличие нижних оценок для двудольных чисел Рамсея от аналогичных нижних оценок для $R(s,t)$. (Литературы нет; делается совершенно аналогично тому, как то же самое делается для обычных чисел Рамсея.)

40. (6) Случайные графы. Неравенства Маркова и Чебышёва. Неравенство для случайного блуждания. (п. 6.3, [R08, п. 1.11 и 1.12])

41. (7) Связность случайного графа: случай $p = c\ln n/n$ при $c < 1$. Теоремы о $\dfrac{\ln n + \gamma + o(1)}{n}$ и о гигантской компоненте (б/д). [R08, п. 2.5]

42. (8) Связность случайного графа: случай $p = c\ln n/n$ при $c > 1$. [R08, п. 2.5]

43. (4) Теоремы Боллобаша о хроматическом числе случайного графа (б/д). Оценки хроматического числа случайного графа при $p = o(1/n^2)$ и $p = o(1/n)$. [R08, п. 2.6]

44. (только в 2014-17) (9) Теоремы Боллобаша о хроматическом числе случайного графа (б/д). Оценки хроматического числа случайного графа при $p = c/n$, $c < 1$. Случай, когда функция из второй теоремы Боллобаша может стремиться к бесконечности.[R08, п. 2.6]

45. (только в 2017-18) (8) Оценка отклонения для липшицевой по вершинам случайной величины (б/д). Теорема Боллобаша о концентрации в четырех значениях.

46. (7) Сравнение оценок хроматического числа через кликовое число и число независимости в терминах случайных графов: одна «почти всегда» значительно лучше другой (распределение кликового числа и числа независимости). [R08, п. 2.7]

47. (10) Теорема о том, что почти наверное жадный алгоритм найдет множество, размер которого лишь, как максимум, в 2 раза отличается от реального. Теорема Кучеры о слабости жадного алгоритма на специальных графах (б/д). (А. Райгородский, "Экстремальные задачи теории графов и Интернет" , Интеллект.)

48. (8) Теорема Эрдеша о графе с большим обхватом и большим хроматическим числом. (Задача 6.3.3.с.)

Глава 7. Алгебраические методы (49-56 1-й семестр, 57-61 2-й семестр)

49. (5) Кнезеровский граф. Верхняя оценка его хроматического числа. Простые нижние оценки. Примеры конкретных кнезеровских графов. Кликовое число и число независимости кнезеровского графа. ([R7] := А. Райгородский, "Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике" , МЦНМО.)

50. (6) Верхняя оценка хроматического числа кнезеровского графа. Теорема Ловаса о хроматическом числе кнезеровского графа (б/д; с доказательством — на '8'). [R7]

51. (только в 2014-16) (7) Теорема Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана в разных формулировках, но с доказательством только в случае плоскости и трехмерного пространства. [R7]

52. (6) Максимальное число $m(n,k,t)$ подмножеств n-элементного множества, в каждом из которых ровно k элементов и среди которых любые два множества пересекаются не по t элементам. Точное значение для $m(n,3,1)$: явная конструкция и оценка по индукции. Линейно-алгебраическая оценка для $m(n,3,1)$. Аналогичная оценка для $m(n,5,2)$ и ее асимптотическая неулучшаемость. [R15]

53. (7) Общая теорема Франкла–Уилсона для $m(n,k,k-p)$ при $k<2p$. (Задача 7.1.7 и [R15].)

54. (только в 2015) (9) Теорема Франкла–Уилсона об $m(n,k,k-p)$ при $k\geqslant 2p$. [R15]

55. (только в 2015) (7) Точность обеих теорем Франкла–Уилсона при постоянных k, t. Максимальное число k-элементных подмножеств n-элементного множества, из которых любые два множества пересекаются не более чем по t элементам. Связь с теорией кодирования, теорема Редля (б/д). [R15]

56. (6) Хроматические числа пространств. Интерпретация величины $m(n,k,t)$ как числа независимости дистанционного графа. Нижняя оценка хроматического числа пространства с помощью результатов для $m(n,k,t)$. Возможные улучшения. ([R15] и А. Райгородский, "Хроматические числа".)

57. (5) Матрицы Адамара. Необходимое условие существования. Гипотеза Адамара. Нормализация. Теорема о плотности порядков матрицы Адамара в натуральном ряде (б/д).(Задачи 7.2.1-7.2.3, определения и гипотеза в §7.2, [Hal, AS].)

58. (6) Задача о раскраске гиперграфа: верхняя оценка уклонения величиной $\sqrt{2n\ln(2s)}$ с доказательством и величиной $6\sqrt{n}$ б/д. [R10]

59. (8) Задача о раскраске гиперграфа: нижняя оценка уклонения величиной $\sqrt{n}/2$ с помощью матриц Адамара.[R10]

60. (4) Интерпретация матриц Адамара в терминах дистанционного графа, возникающего в теореме Франкла–Уилсона (клики).

61. (только в 2014 и 2018) (9) Проблема Борсука. Нижняя оценка числа Борсука. (п. 7.3 и [R14])

ОБРАЗЦЫ ВОПРОСОВ НА ЭКЗАМЕНЕ

Предварительная часть (вариант 2014 года). *Нужен только ответ/формулировка; доказательства приводить не нужно.*

1. Найдите асимптотику биномиального коэффициента $\binom{n}{k}$ при $k^2 = o(n)$.

2. Найдите количество деревьев с данными n вершинами, с точностью до изоморфизма.

3. Дайте определение гамильтонова цикла в графе. (Можно использовать только определение графа. Если Вы используете другие определения — например, цикла — то их тоже нужно дать.)

4. Сформулируйте теорему о хроматическом числе случайного графа в модели $G(n,p)$ при $p = o(1/n)$ и $n \to \infty$.

5. У дистанционного графа на плоскости $4n$ вершин, и среди любых $n+1$ вершин есть ребро. Сформулируйте наилучшую оценку на количество ребер такого графа, доказанную в курсе.

6. Найдите кликовое число графа, вершины которого — все 5-элементные подмножества 20-элементного множества, и ребро между вершинами проводится в том и только в том случае, когда множества не пересекаются?

7. Найдите $R_4(15,4,4,4)$.

8. Найдите максимальную VC-размерность семейства подмножеств множества $\{1,\dots,10\}$ в каждом подмножестве которого более 5 элементов.

Основная часть (точно таких вопросов на экзамене не будет). *Здесь главное — не ответы, а доказательства. В частности, формулировки и доказательства всех используемых студентом результатов из курса ДА (в частности, всех результатов из курса ДА, используемых для доказательства других результатов из курса ДА). При этом можно пользоваться без доказательства результатами из других курсов.*

Вопрос из билета. Существует ли 57 подмножеств 60-элементного множества, в каждом из которых 30 элементов, и любые два из которых пересекаются по 15 элементам?

Критерии. Максимальное количество очков 7.

Конструкция с использованием задачи 7.2.4 без ее доказательства — 2 очка.

За подсказку ‘вспомните матрицы Адамара’ снимается 2 очка.

Доп. вопрос попроще. Каково наибольшее число ребер в графе с 52 вершинами, в котором среди любых 5 вершин есть 2, не соединенные ребром?

Критерии. Максимальное количество очков 6.

Правильный ответ без доказательства — 1 очко.

Правильный ответ с выводом из теоремы Турана без ее доказательства — 2 очка.

Правильный ответ с выводом из теоремы Турана плюс конструкция ‘максимального графа’ без доказательства верхней оценки — 3 очка.

За подсказку ‘вспомните теорему Турана’ снимается 2 очка.

Доп. вопрос посложней. Укажите функцию $f(n)$, для которой $R(n,n) \gtrsim f(n)$. (Чем больше функция, тем выше Ваша оценка.)

Критерии. Максимальное количество очков 9.

За оценку типа $R(n,n) \gtrsim n^2$ ставится 1 очко.

За оценку типа 4.1.5.b ставится 6 очков.

За оценку типа 6.2.21.b ставится 9 очков.

Если при этом не доказывается неравенство $n! \geqslant (n/e)^n$ (6.1.6.c), то снимается 2 очка (это неравенство несложно доказывается без использования формулы Стирлинга; его вывод из формулы Стирлинга, не доказанной в курсе, не считается доказательством).

Если при этом не доказывается ЛЛЛ в симметричной форме (6.2.15.b), то снимается 5 очков (ЛЛЛ в симметричной форме студент может либо напрямую, либо *доказав* ЛЛЛ в несимметричной форме и выведя ЛЛЛ в симметричной форме; вывод симметричной формы из несимметричной в этом месте не считается доказательством симметричной, хотя и входит в программу).

За подсказку — формулировку 4.1.5.c — снимается 2 очка. За подсказку — формулировку каждого следующего пункта этой задачи — снимается еще по 1.

Призовой вопрос. Существуют ли хотя бы одно k и подмножество k-мерного пространства, которое невозможно разбить на $2k^2$ частей меньшего диаметра?