Оглавление

Введение

Зачем эта книга?

Мы приводим подборки задач по комбинаторным разделам математики. Эти задачи подобраны так, что в процессе их решения читатель (точнее, решатель) освоит основы важных теорий — как классических, так и современных. Ср. [S06], [ZSS], [Ju]. Книга будет полезна участникам кружков для младшекурсников и старшеклассников (в частности, ориентированных на олимпиады), а также их руководителям. Некоторые приводимые красивые задачи и важные темы малоизвестны в традиции кружков по математике, но полезны как для математического образования, так и для подготовки к олимпиадам.

По нашему мнению, решение этих задач (т. е. изучение соответствующих теорий) также полезно всем, кто хочет стать математиком, специалистом по computer science или программистом, работающим в наукоёмких отраслях информационных технологий. Именно таких специалистов мы готовим на факультете инноваций и высоких технологий (ФИВТ) Московского физико-технического института. Приведенные задачи используются при изучении курсов дискретных структур и дискретного анализа на этом факультете. Эти курсы читают А.Б. Дайняк и А.М. Райгородский, а остальные авторы ведут семинары по этим курсам. Некоторые материалы основаны на занятиях, проведенных А.Б. Скопенковым в Кировской летней математической школе (до 2016), Московской выездной олимпиадной школе (с 2004), а также на кружках «Математический семинар» (1994-2013) и «Олимпиады и математика» (с 2003, в школе «Интеллектуал» с 2015).

Комбинаторика — один из самых красивых разделов современной математики. Постановки задач этого раздела зачастую доступны школьникам. А результаты, тем не менее, носят фундаментальный характер и важны как для развития других разделов математики, так и для приложений в информатике, биологии, экономике и др. Мы постараемся рассказать о тех мощных современных методах, благодаря которым комбинаторика приобретает новый облик, становясь серьезной наукой. Среди этих методов, помимо более или менее стандартных, вероятностный и линейно-алгебраический методы. Они лежат в основе самых продвинутых комбинаторных результатов, полученных за последние десятилетия.

Параграфы второй половины книги посвящены активно развивающимся областям математики. Хотя здесь изучаются только самые простые результаты и методы, они дают некоторое представление об основных направлениях научных исследований в соответствующих областях. С этой же целью приводятся *замечания*, которые не используются ни в формулировках, ни в решениях задач. Важные факты выделены словом «теорема» или «следствие».

Используемый материал.

Формулировки большинства задач доступны старшеклассникам, интересующимся математикой; [1] мы приводим все необходимые определения, выходящие за рамки школьной программы и не всегда изучаемые на кружках. Без напоминания используются только простейшие определения и результаты теории чисел [GIM, §8-§9], [Vi, §§1-3], [ZSS, §§2.1-2.6, 3.1 и 3.3]. Если в некотором разделе для понимания условий или для решения задач нужны дополнительные сведения (или консультация специалиста), то в начале соответствующего раздела приводятся ссылки.

При этом многие задачи трудны: для их решения нужно предварительно прорешать другие приведенные задачи на данную тему.

Как устроена книга.

Эту книгу не обязательно читать (точнее, прорешивать) подряд. Параграфы и разделы книги практически независимы друг от друга (кроме разделов в §3 и §4, которые желательно прорешивать подряд). Если в задаче одного из разделов все-таки используется материал другого раздела, то либо эту задачу можно игнорировать, либо посмотреть конкретно указанный материал другого раздела. Основные обозначения приведены в конце введения. Основные понятия и обозначения теории графов введены в §2.1.

При этом параграфы расположены примерно в порядке возрас-

[1] Часть материала (например, §1.1) на некоторых кружках и летних школах изучается даже шестиклассниками. Однако приводимые подсказки, указания и решения рассчитаны на читателей с некоторой математической культурой (необходимой для освоения бóльшей части книги). Разбирать эти решения с шестиклассниками нужно по-другому, см., например, [GIF].

тания сложности материала.

К важнейшим задачам приводятся подсказки, указания и решения. Подсказки и указания расположены в конце каждого параграфа. Однако к ним стоит обращаться после прорешивания каждой задачи.

Общие замечания к формулировкам задач.

Задачи обозначаются жирными цифрами. Если в условии задачи написано «найдите», то нужно дать ответ без знака суммы и многоточия. Если же условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Как правило, мы приводим *формулировку* утверждения перед его *доказательством.* [2] В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться следующие задачи. Это всегда явно оговаривается в подсказках, а иногда и прямо в тексте. (На занятии задача-подсказка выдается только тогда, когда школьник или студент немного подумал над самой задачей.)

Большинство задач не оригинальны, но установить первоисточник не представляется возможным. Многие задачи взяты из [IKRS], [ZSS], [Lo] и из неопубликованных материалов кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ, на которой работают авторы.

О литературе.

В списке литературы мы приводим только те *стандартные учебники* по комбинаторике и теории графов, которые по тем или иным причинам чаще используем в преподавании. Также мы приводим ссылки на всю известную нам более серьезную учебно-научную литературу. Но этот список тоже не претендует на полноту, поскольку мы можем не знать о некоторых публикациях.

В списке литературы [Ga, GKP, Har, Hal, KS, Mk, R15, R14, R10, R08, S05, S13, VS88, 8] и [AM, Ig, JLR, Ju, KZP, CR, Pr, Vi, R12, R13, S15] — базовые учебники и статьи по темам этой книги и

---

[2] Часто происходит обратное: формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только *после* продолжительного изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это способствует появлению представления о математике как науке, изучающей немотивированные понятия и теории. Такое представление принижает ценность математики.

Основные обозначения

• $[x]$ — (нижняя) целая часть числа x.

• $d \mid n$ — число n делится на число d (для целых d и n).

• $\mathcal{R}_n$ — множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.

• $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ — множества всех действительных, рациональных и целых чисел соответственно.

• $\mathbb{Z}_2$ — множество $\{0, 1\}$ остатков от деления на 2 с операциями сложения и умножения по модулю 2.

• $\mathbb{Z}_m$ — множество $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ остатков от деления на m с операциями сложения и умножения по модулю m.

• $\binom{n}{k}$ — количество k-элементных подмножеств n-элементного множества (другое обозначение: C_n^k).

• $\binom{X}{k}$ — множество всех k-элементных подмножеств множества X.

• $|X|$ — число элементов во множестве X.

• $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$ — разность множеств A и B (не путайте этот знак с $/$).

• $A \sqcup B$ — дизъюнктное объединение множеств A и B. Результат этой операции совпадает с обычным объединением множеств A и B, но при этом подчеркивается, что $A \cap B = \varnothing$.

• $A \subset B$ — «множество A содержится в множестве B». (В некоторых других книгах это обозначают $A \subseteq B$, а $A \subset B$ означает «множество A содержится в множестве B и не равно B».)

• $x := a$ означает фразу «обозначим $x = a$».

1 Элементы комбинаторики

1.1 Подсчёт и комбинаторные тождества

1.1.1. (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (b) Найдите сумму $\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n}$.

1.1.2. (a) *Правило Паскаля.* $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$, если $0 \leqslant k \leqslant n-1$. (Подсказка приведена после задачи 1.1.4.a.)

(b) $\left\{{n+1 \atop k+1}\right\} = (k+1)\left\{{n \atop k+1}\right\} + \left\{{n \atop k}\right\}$. Здесь $\left\{{n \atop k}\right\}$ — количество разбиений n-элементного множества на k частей (т. е. непустых подмножеств); разбиения считаются неупорядоченными, т. е. разбиение множества $\{1,2,3\}$ на части $\{1,2\}$ и $\{3\}$ и разбиение того же множества на части $\{3\}$ и $\{1,2\}$ считаются одинаковыми. Ср. с задачей 1.4.7.e.

Замечание. Числа $\left\{{n \atop k}\right\}$ называются *числами Стирлинга второго рода*; подробнее о них см., например, [GKP, с. 287].

1.1.3. (a) Во скольких подмножествах множества $\mathcal{R}_{11}$ не найдётся двух подряд идущих чисел?

(b) То же для *трёх* подряд идущих чисел.

1.1.4. (a) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

(b) *Бином Ньютона.* $(a+b)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$.

Как решать задачи этого раздела? Мы предлагаем три метода, которые продемонстрируем на примере трех доказательств правила Паскаля 1.1.2.a. (Большинство задач этого раздела решаются несколькими методами из трех предложенных Но, конечно, не каждый метод применим к каждой задаче. Обычно в указаниях для краткости приводится только один способ решения.)

Первое доказательство: комбинаторные рассуждения. Неформально говоря, идея в следующем: чтобы выбрать $k+1$ футболистов, нужно либо выбрать $k+1$ полевых, либо вратаря и k полевых. Приведем строгое изложение этой идеи.

Количество $(k+1)$-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_{n+1}$,

• содержащих число $n+1$, равно $\binom{n}{k}$, так как такие подмножества при выкидывании числа $n+1$ становятся подмножествами в $\mathcal{R}_n$;

• не содержащих число $n+1$, равно $\binom{n}{k+1}$, так как такие подмножества являются также подмножествами в $\mathcal{R}_n$.

Другая запись этого решения. Определим отображение

$$f : \binom{\mathcal{R}_{n+1}}{k+1} \to \binom{\mathcal{R}_n}{k+1} \bigsqcup \binom{\mathcal{R}_n}{k} \quad \text{формулой} \quad f(A) := A \setminus \{n+1\}.$$

Остаётся доказать, что это — биекция, т.е. взаимно однозначное соответствие (например, определив явной формулой обратное отображение).

Второе доказательство: использование явной формулы 1.1.4.a. Имеем

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k-1)!k!}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{n!}{(n-k-1)!k!} \cdot \frac{n+1}{(k+1)(n-k)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Третье доказательство: использование бинома Ньютона 1.1.4.b. Число $\binom{n+1}{k+1}$ является коэффициентом при x^{k+1} в многочлене

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = x(1+x)^n + (1+x)^n.$$

Поэтому число $\binom{n+1}{k+1}$ равно сумме коэффициентов при степенях x^k и x^{k+1} у многочлена $(1+x)^n$. Отсюда следует требуемое равенство.

1.1.5. Найдите суммы:

(a) $\dbinom{n}{0} - \dbinom{n}{1} + \ldots + (-1)^n \dbinom{n}{n}$;

(b) $\dbinom{n}{0} + \dfrac{1}{2}\dbinom{n}{1} + \dfrac{1}{3}\dbinom{n}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n}{n}$;

(c) $\dbinom{n}{1} + 2\dbinom{n}{2} + 3\dbinom{n}{3} + \ldots + n\dbinom{n}{n}$;

(d) $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n+1}{k+1} + \ldots + \dbinom{n+m}{k+m}$;

(e) $\dbinom{n}{0}^2 + \ldots + \dbinom{n}{n}^2$;

(f) $\dbinom{n}{0}\dbinom{m}{k} + \dbinom{n}{1}\dbinom{m}{k-1} + \ldots + \dbinom{n}{k}\dbinom{m}{0}$;

(g) $\dbinom{2n}{0} - \dbinom{2n-1}{1} + \dbinom{2n-2}{2} - \ldots + (-1)^n \dbinom{n}{n}$;

(h) $\dbinom{2n}{n} + 2\dbinom{2n-1}{n} + 4\dbinom{2n-2}{n} + \ldots + 2^n \dbinom{n}{n}$.

1.1.6. Найдите «явную» формулу для

(a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \binom{n}{2k}$; (b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \binom{n}{4k}$; (c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \binom{n}{3k}$.

В ответе используйте только целочисленные функции целочисленного аргумента.

1.1.7. (a) В ряд стоят числа $1, 2, \ldots, n$. Найдите количество способов выбрать k из них, чтобы никакие два выбранных не стояли рядом. (Формально — найдите количество k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, в которых никакие два элемента не соседние.)

(b) То же, если числа стоят по кругу.

(c) Найдите количество способов рассадить n пар враждующих рыцарей за круглый стол с нумерованными местами, чтобы никакие два враждующих рыцаря не сидели рядом.

1.2 Формула включений и исключений

Обозначим через $\varphi(n)$ функцию Эйлера, т. е. количество чисел от 1 до n, взаимно простых с числом n.

1.4 Комбинаторика булева куба

1.4.1. Расставьте на шахматной доске нескольких коней, чтобы каждый бил четырёх других.

1.4.2. 33 буквы русского алфавита кодируются последовательностями из нулей и единиц.

(a) При какой наименьшей длине последовательности кодирование можно сделать однозначным?

(b) Если при получении сообщения возможна ошибка в не более чем одном разряде, т. е. если коды различных букв должны отличаться по крайней мере в трёх разрядах, то 8 разрядов не хватит.

(c) Если возможна ошибка в не более чем двух разрядах, то 10 разрядов не хватит.

(d)* Найдите наименьшее число разрядов, достаточное для кодирования из (b).

1.4.3. (a) При фиксированном n число $\binom{n}{k}$ максимально при $k = \left[\frac{n}{2}\right]$.

(b) *Best in their own ways.* В математической олимпиаде участвовало k школьников. Выяснилось, что для любых двух школьников A и B нашлась задача, которую решил A и не решил B, и задача, которую решил B, но не решил A. Какое наименьшее возможное количество задач могло быть при этом условии? Иными словами, найдите наименьшее возможное n, для которого найдётся такое семейство из k подмножеств n-элементного множества, что ни одно из подмножеств семейства не содержится (собственно) в другом.

1.4.4. Имеется табло с n горящими лампочками. Каждый переключатель может быть подсоединён к некоторым лампочкам. При нажатии на кнопку переключателя соединённые с ним лампочки меняют свое состояние: горящие тухнут, а не горящие загораются. Какое наименьшее число переключателей необходимо, чтобы можно было зажечь любой набор лампочек (не входящие в этот набор лампочки гореть не должны)?

1.4.5. В первый день своего правления король организует партии среди n своих подданных. На второй день советник приносит королю список фамилий некоторых подданных (в первый день этот список неизвестен). На третий день король может выбрать несколько партий и отправить в тюрьму всех подданных, участвующих в каждой из них. Какое наименьшее число партий необходимо организовать в первый день, чтобы в третий день заведомо можно было отправить в тюрьму всех подданных из принесенного списка (и только их)?

Замечание. Следующая важная конструкция полезна (хотя и не обязательна) для решения вышеприведенных (и многих других) задач. Нарисуем точки, соответствующие всем подмножествам множества $\mathcal{R}_n$. При этом на k-й *этаж* поместим точки, соответствующие k-элементным множествам. Соединим стрелкой те из них, которые получаются друг из друга добавлением одного элемента. Тогда соединяемые стрелкой точки лежат на соседних этажах. Полученный граф называется *n-мерным кубом.* Его вершины соответствуют векторам из $\mathbb{Z}_2^n$.

Определение множества $\mathbb{Z}_2^n$ приведено в начале п. 7.1. Подмножество $L \subset \mathbb{Z}_2^n$ называется *линейным подпространством*, если $x + y \in L$ для любых $x, y \in L$ (не обязательно различных). Иными словами, *линейное подпространство* — такое семейство подмножеств n-элементного множества, которое вместе с любыми двумя подмножествами содержит их симметрическую разность (т. е., сумму по модулю 2).

1.4.6. (a) Любое линейное подпространство содержит нулевой набор $(0, \ldots, 0)$.

(b) Число элементов в любом линейном подпространстве является степенью двойки.

Обозначим через $\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right|$ количество линейных подпространств в $\mathbb{Z}_2^n$, состоящих из 2^k элементов (такие линейные подпространства в $\mathbb{Z}_2^n$ называют *k-мерными*, ср. п. 7.1).

1.4.7. (a) Найдите $\left|\begin{matrix} 2 \\ k \end{matrix}\right|$ для $k = 0, 1, 2$.

(b) Найдите $\left|\begin{matrix} 3 \\ k \end{matrix}\right|$ для $k = 0, 1, 2, 3$.

(c) $\left|\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} n \\ n \end{matrix}\right| = 1, \qquad \left|\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix}\right| = 2^n - 1.$

(d) $\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} n \\ n-k \end{matrix}\right|.$

(e) $\left|\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix}\right| + 2^{n-k}\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right|.$

(f) Найдите $\left|\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right|$.

(g) Найдите $\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right|$.

Для решения этой задачи нужны некоторые понятия, приведенные в начале п. 7.1.

1.5 Подсчёт двумя способами

Мы приводим простейший вариант вероятностного метода в комбинаторике. Он основан на подсчете двумя способами количества некоторых пар. (Иными словами, рассматриваются *связи* между объектами и то, как эти связи покрываются.) Ср. п. 6.2, п. 6.3. Этот метод также применяется при решении задач 2.4.5, 2.6.5, 2.6.7, 2.7.2, 3.1.11.b, 4.1.5, 4.3.4. и некоторых задач из [ZSS, п. 23.3 «Комбинаторика классов эквивалентности»].

Комбинаторные решения нижеприведенных задач можно изложить на вероятностном языке. Решения без явного построения вероятностного пространства могут привести к бессмыслице и ошибке. (Подумайте, например, с какой вероятностью случайный треугольник будет остроугольным.) Поэтому строгие решения на вероятностном языке должны начинаться с явного построения вероятностного пространства.

1.5.1. (a) Даны 21 девятиэлементных подмножеств 30-элементного множества. Тогда какой-то элемент 30-элементного множества содержится по крайней мере в семи данных подмножествах.

(b) Комиссия собиралась 40 раз. На каждом заседании было ровно 10 человек, любые два не были вместе больше одного раза. Тогда

в комиссии хотя бы 60 человек.
(c) В компании у любых двух знакомых друг с другом человек есть ровно 5 общих знакомых (кроме них самих). Тогда количество пар знакомых между собой людей в компании делится на 3.
(d) Обозначим через $P_n(k)$ число перестановок множества натуральных чисел от 1 до n, оставляющих ровно k чисел на своем месте. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot P_n(k) = n!$.

1.5.2. Пусть $\mathcal{F}$ — любое семейство k-элементных подмножеств n-элементного множества.
(a) Если $k \geqslant l$ и каждое l-элементное подмножество n-элементного множества содержится в некотором подмножестве из $\mathcal{F}$, то $|\mathcal{F}| \geqslant \binom{n}{l} \Big/ \binom{k}{l}$.
(b) Количество $(k-1)$-элементных подмножеств n-элементного множества, целиком содержащихся хотя бы в одном из подмножеств семейства $\mathcal{F}$, не меньше $\dfrac{k|\mathcal{F}|}{n-k+1}$.

1.5.3. На планете Марс 100 государств объединены в блоки, в каждом из которых не больше 50 государств. Известно, что любые два государства состоят вместе хотя бы в одном блоке. Найдите минимально возможное число блоков. (Ср. с задачей 1.5.2.a.)

1.5.4. Ровно 19 вершин правильного 97-угольника покрашено в белый цвет, остальные вершины покрашены в чёрный. Тогда число равнобедренных одноцветных треугольников с вершинами в вершинах 97-угольника не зависит от способа раскраски. (Треугольник одноцветный, если все его вершины или белые, или чёрные.)

1.5.5. Даны числа $n \geqslant k$ и множество S из n точек на плоскости. Если любые три точки из множества S не лежат на одной прямой и для любой точки $P \in S$ существуют хотя бы k различных точек из множества S, равноудаленных от P, то $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

1.5.6. В любом множестве из n различных натуральных чисел найдётся подмножество из более чем $n/3$ чисел, в котором нет трёх чисел, сумма двух из которых равна третьему.

1.5.7. По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ на работе был специалист по нему.

Замечание. Понятно, что при данном числе k специалистов (в задаче 1.5.7 $k = 8$) для малого числа видов работ так распределить выходные всегда можно. А при большом числе l видов работ это может уже не получиться. В следующей задаче мы находим асимптотическую оценку снизу для такого числа l.

Вот более ученая формулировка (обобщения) задачи 1.5.7. Имеется $l = 2^{k-1}$ подмножеств некоторого множества, в каждом из которых ровно k элементов. Тогда элементы этого множества можно раскрасить в два цвета так, чтобы никакое из l подмножеств не было одноцветно. Ср. с задачей 6.2.1.a.

1.5.8. (a) Если для некоторого чётного n

$$\left(1 - 2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)^l 2^n < 1,$$

то в n-элементном множестве Найдётся l таких k-элементных подмножеств, что при любой раскраске элементов этого множества в два цвета хотя бы одно из этих l подмножеств одноцветно.
(b) Существует такое $c > 0$, что для любого k существует не более чем $ck^2 2^k$ таких k-элементных подмножеств некоторого множества, что при любой раскраске элементов этого множества в два цвета одно из этих подмножеств одноцветно.

1.5.9. 21 девочка и 21 мальчик участвовали в олимпиаде. Оказалось, что каждый участник решил не более 6 задач; для любых мальчика и девочки найдется задача, которую они оба решили. Докажите, что некоторую задачу решило не менее трех мальчиков и не менее трех девочек. [4]

[4] Мы благодарны А.Я. Канелю-Белову за разрешение включить эту и две следующие задачи в книгу. Решения написаны авторами. Вот другие задачи на эту тему: `http://school.dist-math.ru/moodle/course/view.php?id=133`.

(b) *Это решение было получено И. Смирновым редактированием решения п. (a).*

Ответ: 927.

Обозначим через A_n количество подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, не содержащих трёх подряд идущих чисел. Количество таких подмножеств,

• не содержащих число n, равно A_{n-1}, так как такие подмножества являются также подмножествами в $\mathcal{R}_{n-1}$.

• содержащих число n и не содержащих число $n-1$, равно A_{n-2}, так как такие подмножества при выкидывании числа n становятся подмножествами в $\mathcal{R}_{n-2}$.

• содержащих числа n и $n-1$, равно A_{n-3}, так как такие подмножества при выкидывании чисел n и $n-1$ становятся подмножествами в $\mathcal{R}_{n-3}$.

Поэтому $A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3}$. Очевидно, $A_1 = 2$, $A_2 = 4$ и $A_3 = 7$. Вычисляя последовательно $A_3, A_4, \ldots, A_{11}$, получаем $A_{11} = 927$.

1.1.5. (a) Используя бином Ньютона, получаем, что при $n > 0$ сумма равна $(1-1)^n = 0^n = 0$.
(b) Преобразуем по отдельности каждое слагаемое:

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$$

Итого имеем:

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} =$$

$$= \frac{\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+1}{n+1}}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

(c) Действительно,

$$k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

2 Основы теории графов

2.1 Словарик по теории графов

Вероятно, вводимые здесь понятия знакомы читателю, но мы приводим четкие определения, чтобы фиксировать терминологию (которая бывает другой в других книгах).

Графом $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые двухэлементные подмножества (т. е. неупорядоченные пары различных элементов) которого выделены. Множество выделенных подмножеств обозначается $E = E(G)$. (Более точный термин для понятия графа, данного здесь, — *граф без петель и кратных рёбер*, или *простой граф*.) Элементы множества V называются *вершинами*. Выделенные пары вершин называются *рёбрами*. Хотя эти пары неупорядоченные, в теории графов их традиционно обозначают круглыми скобками.

Вершины a и b называются *концами*, или *вершинами* ребра (a, b). Если вершины a и b соединены ребром, они называются *соседними* или *смежными*, а само ребро (a, b) называется *проходящим* через вершину a и вершину b, или *инцидентным* вершине a и вершине b.

При работе с графами удобно пользоваться их изображениями — например, на плоскости или в пространстве. (Или, выражаясь научно, отображениями их тел в плоскость или в пространство.) См. рис. , 5, 4 3, 8, 9 и 18 ниже. Вершины изображаются точками. Каждое ребро изображается ломаной, соединяющей его концы. (При этом только концы каждой ломаной изображают вершины графа и каждая пара вершин не соединена более чем одной ломаной.) Ломаные могут пересекаться, но точки пересечения (кроме общих концов ломаных) не являются вершинами. Важно, что граф и его изображение — не одно и то же. Например, на рис. 5 (в центре и справа), 4 приведены разные изображения на плоскости одинаковых графов (точнее, изоморфных графов, см. п. 2.3).

Путем P_n называется граф с вершинами $1, 2, \dots, n$ и ребрами $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. *Циклом* C_n называется граф с вершинами $1, 2, \dots, n$ и ребрами $(1, n)$ и $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. (Не путайте эти графы с *путем в графе* и *циклом в графе*, определенными ниже.)

Граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром, называется *полным* и обозначается K_n. Если вершины графа можно разделить на две части так, что нет рёбер, соединяющих вершины из одной и той же части, то граф называется *двудольным*, а части называются *долями*. Через $K_{m,n}$ обозначается двудольный граф с долями из m и из n вершин, в котором имеются все mn рёбер между вершинами разных долей. См. рис. 5.

2.1.1. В любом графе есть двудольный подграф, содержащий не менее половины рёбер графа.

k-кликой в графе называется его подграф с k вершинами, являющийся полным. *Независимым множеством* или *антикликой* в графе называется набор его вершин, между которыми нет рёбер.

Степенью $\deg v$ вершины v графа называется число выходящих из нее рёбер. *Изолированной вершиной* называется вершина, из которой не выходит ни одного ребра.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально говоря, граф G называется *подграфом* графа H, если каждая вершина графа G является вершиной графа H и каждое ребро графа G является ребром графа H. При этом две вершины подграфа, соединенные ребром в графе, не обязательно соединены ребром в подграфе.

Путем в графе называется последовательность $v_1e_1v_2e_2\dots e_{n-1}v_n$, в которой для любого i ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}. (Ребра $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ не обязательно попарно различны.) Число $n-1$ называется *длиной* пути. *Циклом* в графе называется последовательность $v_1e_1v_2e_2\dots e_{n-1}v_ne_n$, в которой для любого $i<n$ ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}, а ребро e_n соединяет вершины v_n и v_1. Циклы считаются одинаковыми, если они отличаются циклическим сдвигом последовательности. Число n называется *длиной* цикла. *Несамопересекающимся* называется цикл, для которого вершины $v_1, v_2, \dots, v_n$ попарно различны и рёбра $e_1, e_2, \dots, e_n$ попарно различны. Стандартный термин (менее удобный для начинающего) — *простой* цикл.

2.1.2. (а) Любой цикл, не проходящий ни по одному ребру дважды, содержит несамопересекающийся цикл.

(b) Любой цикл нечётной длины содержит несамопересекающийся цикл нечётной длины.

(c) Справедливо ли аналогичное утверждение для циклов чётной длины, не проходящих ни по одному ребру дважды?

(d) В графе есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра a и b, а также есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра b и c. Тогда есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра a и c.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём, и *несвязным* иначе.

2.1.3. Если степень каждой из n вершин графа больше $\frac{n}{2} - 1$, то граф связен.

Ясно, что «соединённость некоторым путём» является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. *Связной компонентой* графа называется любой класс этого отношения эквивалентности.

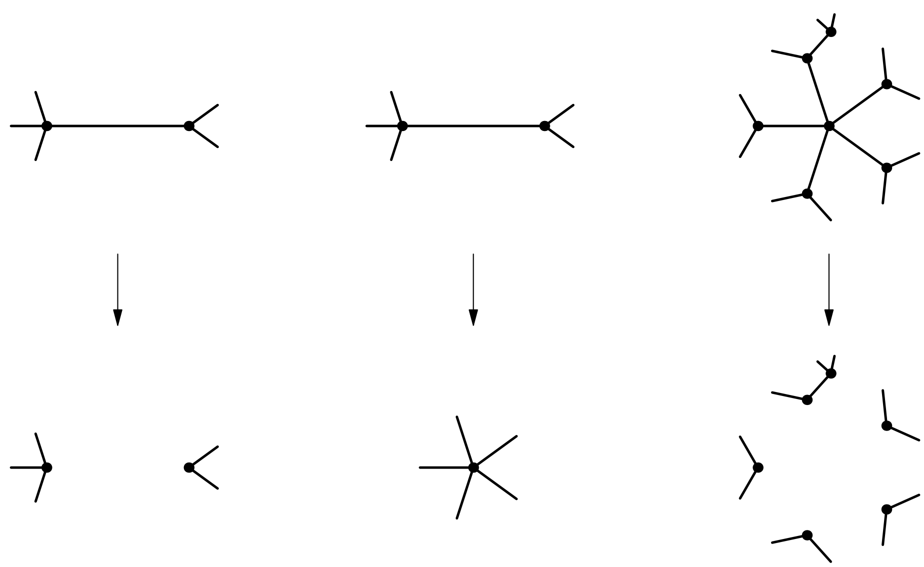

Рис. 2: Удаление ребра $G - e$, стягивание ребра G/e и удаление вершины $G - x$

Определение операций удаления ребра и удаления вершины ясно из рис. 2. Операция *стягивания ребра* (рис. 2) удаляет из графа это ребро и заменяет вершины A и B этого ребра на одну вершину D, а все рёбра, выходящие из вершин A и B в некоторые вершины, заменяет на рёбра, выходящие из вершины D в те же вершины. (Эта операция отличается от стягивания ребра в мультиграфах, см. §2.5, тем, что каждое получившееся ребра кратности больше 1 заменяется на ребро кратности 1.) Например, если граф — цикл с четырьмя вершинами, то при стягивании любого его ребра получится цикл с тремя вершинами.

Ориентированным графом (без петель и кратных рёбер) $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые *упорядоченные* пары несовпадающих элементов которого выделены. Множество выделенных пар обозначается $E = E(G)$. Таким образом, $E \subset \{(x, y) \in V \times V \mid x \neq y\}$. Если выделены и пара (a, b), и пара (b, a), то это ребро не называется кратным.

Ориентированный путь в ориентированном графе — такая последовательность вершин, что в каждую следующую вершину ведет ориентированное ребро из предыдущей. Аналогично вводится понятие ориентированного цикла.

2.1.4. Пусть дан ориентированный граф G, у которого на каждом ребре u написан вес $f(u)$. (Этот вес можно понимать как работу, которую нужно затратить для того, чтобы пройти по ребру от начала до конца.) Функция $p : V(G) \to \mathbb{R}$ («потенциал») такая, что $f(x, y) = p(x) - p(y)$ для любого ребра $u = (x, y)$, существует тогда и только тогда, когда сумма весов рёбер любого ориентированного цикла равна нулю (при прохождении ребра по циклу в направлении, противоположном ориентации, вес в сумму берётся со знаком «минус»).

Турниром называется ориентированный граф, любые две вершины которого соединены ребром. (Т.е. для любых двух вершин v, w турнира среди его ребер есть (v, w) или (w, v), но не оба ребра сразу.) Например, если проведен чемпионат по волейболу среди нескольких команд, в котором каждая команда сыграла с каждой и нет ничьих, то можно построить ориентированный граф следующим образом. Вершины графа обозначают команды, ребра обозначают матчи, и стрелки направлены от победившей команды к побежденной. Полученный ориентированный граф будет турниром.

Если не оговорено противное, то через n и e обозначаются количества вершин и рёбер рассматриваемого графа, соответственно.

Некоторые другие определения приведены в начале разделов.

2.2 Перечисление деревьев

Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит несамопересекающихся циклов (т.е. циклов, не проходящих дважды ни по одному ребру). *Остовом (или максимальным деревом) графа* называется любой его подграф, являющийся деревом и содержащий все вершины графа. Ясно, что в любом связном графе существует такой подграф.

2.2.1. (a) Если в дереве более одной вершины, то в нем найдется *лист*, т.е. вершина степени 1.

(b) В любом дереве с n вершинами $n-1$ ребро.

(c) В любом дереве между любыми двумя вершинами существует единственный путь.

(b') Граф с n вершинами является деревом тогда и только тогда, когда он не содержит несамопересекающихся циклов и имеет $n-1$ ребро.

(b") Граф с n вершинами является деревом тогда и только тогда, когда он связен и имеет $n-1$ ребро.

(c') Если в графе между любыми двумя вершинами существует единственный путь, то граф является деревом.

Заметим, что графы $(\{1,2,3\},\{\{1,2\}\})$ и $(\{1,2,3\},\{\{1,3\}\})$ различны. Графом называется именно граф, а не класс изоморфизма графов (определение изоморфизма приведено в начале §2.3). Или, говоря неформально, вершины графов считаются занумерованными. Поэтому вместо слова «граф» иногда употребляют термин «помеченный граф». См. методическое замечание в конце §2.3.

2.2.2. Каких графов с данными n вершинами больше: (a) имеющих изолированную вершину или не имеющих?

(b) связных или несвязных?

2.2.3. (a) *Формула Кэли.* Число деревьев с данными n вершинами равно n^{n-2}.

(b) Если сумма целых положительных чисел $d_1, \ldots, d_n$ равна $2n-2$, то число деревьев с данными n вершинами, у которых i-я вершина имеет степень d_i, равно $\dfrac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_n-1)!}$.

Это утверждение можно переформулировать в виде

$$(x_1 + \ldots + x_n)^{n-2} = \sum_T x_1^{\deg_T(1)-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\deg_T(n)-1},$$

где сумма берётся по всем деревьям T с вершинами $1, 2, \ldots, n$, и через $\deg_T(k)$ обозначена степень вершины k дерева T.

(c*) Пусть $T_1, \ldots, T_r$ — деревья, множества вершин которых не пересекаются. Сколько есть деревьев, множество вершин которых есть объединение множества вершин этих r деревьев, и которые содержат $T_1, \ldots, T_r$?

2.2.4. *Код Прюфера* сопоставляет дереву с занумерованными вершинами последовательность его вершин следующим образом. Код Прюфера дерева с двумя вершинами — пустое слово. Если количество вершин дерева T больше двух, то обозначим через v лист (см. задачу 2.2.1) с минимальным номером, а через u вершину, смежную с v. Тогда код Прюфера дерева T получается из кода Прюфера дерева $T - v$ приписыванием справа вершины u.

(a) Найдите код Прюфера дерева с вершинами $1, 2, \ldots, 10$ и рёбрами (8,9),(8,4),(4,10),(10,3),(3,5),(10,6),(10,1),(1,7),(1,2).

(b) Восстановите дерево по коду Прюфера 1,1,2,5,4,2,7.

(c) Код Прюфера определяет взаимно-однозначное соответствие между множеством деревьев с данными n вершинами и множеством слов длины $n-2$ из этих вершин.

(d) В коде Прюфера вершина степени d встречается $d-1$ раз.

2.2.5. Граф называется *унициклическим*, если он становится деревом после удаления некоторого ребра. (Или, эквивалентно, если он связен и имеет ровно один — с точностью до циклического сдвига и симметрии — несамопересекающийся цикл.)

(a) Каких графов больше, деревьев с данными 100 вершинами или унициклических графов с данными 98 вершинами?

(b) Выразите число унициклических графов с данными n вершинами в виде суммы не более чем n слагаемых.

2.2.6. (a) В дереве нет непустых подграфов, у которых степень каждой вершины чётная и положительная.
(b) Для графа G обозначим через $h_1(G)$ число его подграфов без изолированных вершин, у которых степень каждой вершины чётна. (Пустой подграф удовлетворяет этому условию.) Докажите, что $h_1(G)$ – степень двойки. Выразите $h_1(G)$ через количества n вершин, e рёбер и k компонент связности графа.
Замечание. Такие подграфы называют *циклами* в смысле теории гомологий (не путайте с циклами в смысле теории графов). Как они возникают, написано, например, в [S15, §6].
(c) На рёбрах дерева стоят знаки $+$ и $-$. Разрешается менять знаки на всех рёбрах, выходящих из одной вершины. Тогда из любой расстановки можно получить любую другую.
(d) Для графа G обозначим через $h^1(G)$ наибольшее количество расстановок знаков $+$ и $-$ на его рёбрах, ни одну из которых нельзя получить из другой описанными в п. (c) операциями. Докажите, что $h^1(G)$ — степень двойки. Выразите $h^1(G)$ через n, e и k.
Замечание. В теории когомологий такие расстановки называют *коциклами*, а приведенное отношение эквивалентности на коциклах — когомологичностью. Как возникает когомологичность коциклов, написано, например, в [S, п. 9.1 «Отображения графа в окружность», п. 9.2 «Отображения графа в проективную плоскость»].
(e)* Докажите, что $h_1(G)$ и $h^1(G)$ не меняются при стягивании ребра, и выведите отсюда, что $h_1(G) = h^1(G)$.

2.3 Графы с точностью до изоморфизма

Грубо говоря, графы изоморфны, если они одинаковы (при этом их изображения на плоскости могут быть разными). Формально, графы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $f : V(G_1) \to V(G_2)$, удовлетворяющее условию: *вершины* $A, B \in V(G_1)$ *соединены ребром в том и только в том случае, если вершины* $f(A), f(B) \in V(G_2)$ *соединены ребром.*

2.3.1. Какие из графов на рисунке 3 изоморфны?

2.3.2. Для произвольных целых $k, l, m, n > 0$ найдите количество

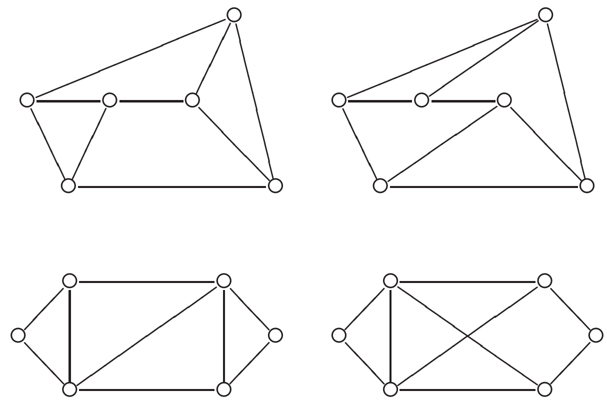

Рис. 3: Какие из графов на рисунке изоморфны?

(a) клик размера k в графе K_n,
(b) клик размера k в графе $K_{m,n}$,
(c) независимых множеств размера k в графе K_n,
(d) независимых множеств размера k в графе $K_{m,n}$,
(e) подграфов в K_n, изоморфных $K_{k,l}$,
(f) подграфов в $K_{m,n}$, изоморфных $K_{k,l}$.

Будьте внимательны: эти задачи простые, но почти все требуют разбора случаев.

2.3.3. Перечислите все попарно неизоморфные
(a) графы с четырьмя вершинами,
(b) связные графы с пятью вершинами и пятью рёбрами,
(c) несвязные графы с пятью вершинами.

2.3.4. Сколько существует попарно неизоморфных графов, имеющих 8 вершин и 25 рёбер?

2.3.5. Количество классов изоморфизма деревьев с n вершинами (т. е. количество различных деревьев с n незанумерованными вершинами) меньше 4^n.

2.3.6. (a) Сколько существует изоморфизмов $K_5 \to K_5$? А $K_{3,3} \to K_{3,3}$?

(b) Изоморфны ли графы G_2 и G_3, вершины каждого из которых занумерованы числами от 1 до 7, вершины графа G_k соединены ребром, если либо $i - j \equiv 1 \mod 7$, либо $i - j \equiv k \mod 7$.

(c) Постройте граф с наименьшим числом $n > 1$ вершин такой, что никакая не тождественная перестановка его вершин не является изоморфизмом.

2.3.7. *Симметричные графы. Эта задача для иследования предложена И.Н. Шнурниковым.* Мы будем работать со связными ориентированными мультиграфами, из каждой вершины графа выходят два ребра и в каждую входят два ребра. Такой ориентированный мультиграф назовем *симметричным*, если для любой пары разлчных ребер a, b существует его изоморфизм на себя при котором ребро a переходит в ребро b и никакое ребро не остается на месте.

(a) Для каждого натурального n придумайте два (неизоморфных) симметричных мультиграфа с n вершинами каждый.

(b) Придумайте симметричные мультиграфы с 6, 12 и 30 вершинами, не изоморфные мультиграфам из (a).

(c) Найдите все симметричные мультиграфы, которые имеют хотя бы одну петлю или хотя бы одно кратное ребро.

(d) Найдите все симметричные мультиграфы с p-вершинами для простого p.

(e) Найдите все симметричные мультиграфы с не более чем 8 вершинами.

(f) Найдите все симметричные мультиграфы, которые можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, что для каждой вершины входящие ребра чередуются с выходящими.

(g)* Найдите все плоские симметричные мультиграфы.

2.3.8. У Васи есть несвязный граф. Он всеми возможными способами удалил из этого графа по одной вершине и каждый из полученных графов нарисовал на отдельном листочке бумаге, после чего все листочки отдал Коле. Докажите, что Коля может восстановить исходный граф.

2.3.9. * *Нерешенные задачи о вершинной и реберной реконструируемости.*

(a) Пусть G и $\tilde{G}$ — связные графы без петель и кратных ребер с $n \geqslant 3$ вершинами $\{1, \dots, n\}$. Пусть для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ графы $G - k$ и $\tilde{G} - k$ изоморфны. Верно ли, что графы G и $\tilde{G}$ изоморфны?

(b) Пусть G и $\tilde G$ — графы с $e \geqslant 5$ занумерованными ребрами. Для каждого $k \in \{1,\dots,e\}$ рассмотрим графы G_k и $\tilde G_k$, полученные из графов G и $\tilde G$ соответственно путем удаления в каждом из них ребра с номером k. Пусть для любого $k \in \{1,\dots,e\}$ графы G_k и $\tilde G_k$ изоморфны. Верно ли, что графы G и $\tilde G$ изоморфны?

Методическое замечание. Начать знакомство с теорией графов полезно без четкого определения графа, см. сноску 1. Для такого знакомства не нужно различать граф и класс изоморфизма графов. Однако при подсчете количества различных графов уже важно различать эти понятия (см. утверждения 2.2.3.a и 2.3.5). А для этого нужны четкие определения. Увы, они не всегда даются. Приведем характерный пример.

В [ВКК, второй абзац §1][5] понятие графа используется без четкого определения. Как пояснил К. Кохась, под графом (деревом) в [ВКК, §1] понимается класс изоморфизма графов (деревьев), и чтобы не сделать текст неясным из-за «излишней» формальности, не приводится ни четкого определения этого понятия, ни сравнения используемой терминологии со стандартной. Ввиду этого в определении помеченного дерева слова «вершина дерева [т.е. класса изоморфизма деревьев]»

не имеют смысла. (Аналогично, в определении реберно помеченного дерева [ВКК, задача 1.4] слова «ребра дерева [т.е. класса изоморфизма деревьев]» не имеют смысла.) Читатель, уверенно работающий с классами эквивалентности, легко придаст смысл этому определению. Но для этого нужны и гораздо большее владение формализмом, чем для понимания определения графа (в общепринятом смысле, см. §2.1), и само это определение.

Отсутствие нужных четких определений часто сочетается с неудачными попытками дать ненужные. Например, определение изоморфизма графов не нужно для [ВКК] (кроме задачи 1.2, не используемой в остальном тексте). Оно более сложно, чем определение графа (в общепринятом смысле), пропущенное из-за «излишней» формальности. Однако изоморфизм определяется в [ВКК, третий

[5]Бóльшая часть этого методического замечания была высказана авторам [ВКК] перед Конференцией и интернет-публикацией.

абзац §1]. В этом определении слова «вершина и ребра непомеченного графа [т.е. класса изоморфизма графов]» не имеют смысла. В [BKK, последнее предложение третьего абзаца §1] используется не определенное в тексте понятие изоморфизма помеченных графов и делается вывод об отсутствии их нетождественных изоморфизмов.

2.4 Графы и раскраски карт на плоскости

В этом пункте мы докажем простейшие результаты о графах и раскрасках карт на плоскости — утверждения 2.4.1.ab и 2.4.3. На примере этих доказательств мы продемонстрируем применения формулы Эйлера 2.4.4.c. (Стало быть, решение задач 2.4.1 и 2.4.3 нужно отложить до знакомства с этой формулой.)

2.4.1. (a) Треугольник разбит на конечное число выпуклых многоугольников. Их можно так раскрасить в 6 цветов, что любые два многоугольника, имеющие общий граничный отрезок, окрашены в разные цвета.

(b)* То же для 5 цветов.

(Знаменитая гипотеза четырех красок утверждает, что и 4 цветов хватит, но ее доказательство гораздо более сложно.)

(c) «...Итак, для построения квантового нанобифуркатора остается взять указанный в презентации выпуклый многогранник, у которого 30 пятиугольных граней, 10 восьмиугольных граней и нет других граней,» — закончил докладчик. Публика рукоплещет. А Вы?

(Более аккуратно, существует ли выпуклый многогранник с такими свойствами?)

(d)* Выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон и из разных вершин выходит одинаковое число ребер. Докажите, что выпуклых правильных многогранников ровно 5, с точностью до изоморфизма их графов.

(Не забудьте доказать, что правильных многогранников не менее 5, т.е. привести их конструкции.)

(e) На плоскости отмечено n точек. Разрешается соединять некоторые две из них ломаной, не проходящей через другие точки. Два игрока по очереди соединяют ломаной какие-то две еще не соединённые точки. При этом требуется, чтобы любые две из эти ломаных пересекались только по их общим концам, если такие концы есть. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для каких n при правильной игре выигрывает тот, кто ходит первым?

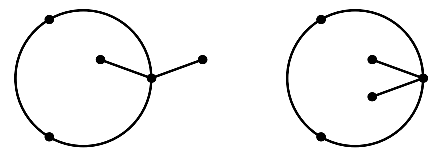

Рис. 4: Различные изображения графа на плоскости

Плоским графом называется конечный набор несамопересекающихся ломаных на плоскости, любые две из которых пересекаются только по их общим концам (в частности, если общим концов нет, то не пересекаются). Концы ломаных называются его *вершинами*, а сами ломаные — *ребрами*. Итак, плоскому графу соответствует граф (в смысле п. 2.1), *изображением* которого называется плоский граф. Иногда плоский граф называют просто графом, но это неточно, поскольку один и тот же граф можно изобразить на плоскости (если можно) разными способами, см. рис. 4.

Граф называется *планарным* (или *реализуемым на плоскости* или *вложимым в плоскость*), если его можно изобразить без самопересечений на плоскости. Более строго, граф называется **планарным**, если некоторый плоский граф является его изображением.

2.4.2. Следующие графы планарны:

(a) граф K_5 без одного из ребер (рис. 15); (b) любое дерево;

(c) граф любого выпуклого многогранника.

Проблема реализуемости графов (или графов с дополнительной структурой) на плоскости, торе, ленте Мебиуса и других поверхностях (см. конец этого пункта) — одна из основных в топологической теории графов [MT01].

2.4.3. (a) Граф K_5 не планарен. (b) Граф $K_{3,3}$ не планарен.

(c) Для любого плоского связного графа с V вершинами и $E > 1$ ребрами, $E \leqslant 3V - 6$.

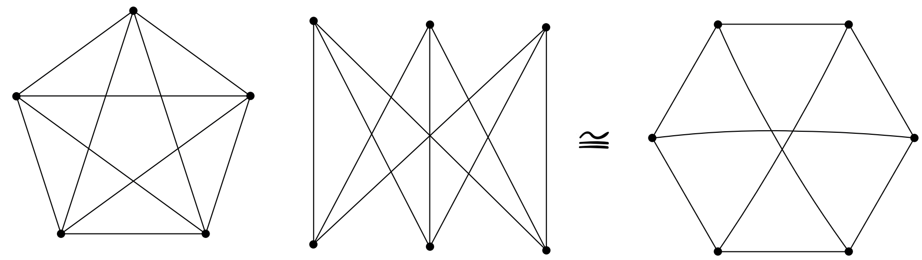

Рис. 5: Непланарные графы K_5 и $K_{3,3}$

(d) В любом плоском графе есть вершина, из которой выходит не более 5 ребер.

Плоский граф делит плоскость на части, называемые *гранями* графа. Приведем строгое определение.

Подмножество плоскости называется **связным**, если любые две его точки можно соединить ломаной, лежащей в этом подмножестве. (Осторожно, в для более общих подмножеств, чем рассматриваемые здесь, определение связности другое!)

Гранью плоского графа G называется каждая из связных частей, на которые распадается плоскость $\mathbb{R}^2$ при разрезании по всем ломаным (=ребрам) плоского графа G, т.е. любое максимальное связное подмножество в $\mathbb{R}^2 - G$. Заметим, что одна из таких частей будет «бесконечной».

2.4.4. (a) Нарисуйте плоский граф, в границе некоторой грани которого имеется три попарно непересекающхся цикла.

(b) Для любого плоского графа с $E > 1$ ребрами и F гранями верно неравенство $3F \leqslant 2E$.

(c)* **Формула Эйлера.** *Для любого связного плоского графа с V вершинами, E ребрами и F гранями верно равенство $V - E + F = 2$.*

(d) Найдите аналог формулы Эйлера для плоского графа с c компонентами связности.

Для п. (b) подумайте, скольким граням принадлежит ребро? какое наименьшее число рёбер может ограничивать грань?

Обсуждение доказательства формулы Эйлера приведено в [S15, п. 1.2 «Графы на плоскости и раскраски карт»]. Здесь используйте ее без доказательства.

2.4.5. (a) В любом плоском графе есть грань, имеющая не более 5 соседних граней. (Это аналог утверждения 2.4.3.d для граней.)

(b) Если каждая вершина плоского связного графа с E ребрами имеет степень d, граница каждой грани состоит из ровно $k \geqslant 3$ рёбер, и к каждому ребру с двух разных сторон примыкают две разные грани, то

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}.$$

(c)* Верен ли аналог п. (b) без предположения «к каждому ребру...»?

(d) Перечислите все связные плоские графы (с точностью до изоморфизма, см. определение в п. 2.3), у которых степени всех вершин равны и «степени» всех граней равны (т. е. граница каждой грани состоит из одного и того же числа рёбер).

Предостережение: не забудьте доказать изоморфность графов с одинаковыми степенями вершин и граней.

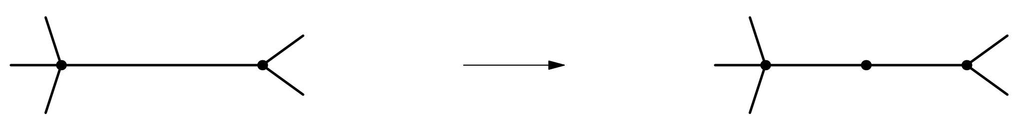

Рис. 6: Подразделение ребра

Операция *подразделения ребра* графа показана на рисунке.

Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним; или, эквивалентно, если существует граф, полученный из каждого из данных графов операциями подразделения ребра.

Ясно, что гомеоморфные графы являются или не являются планарными одновременно.

Ясно, что любой подграф планарного графа планарен.

Теорема Куратовского. *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$ (рис. 5).* (Простое доказательство этой теоремы приведено в п. 2.9.)

Теорема Фари. *Плоский граф можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, что все рёбра будут отрезками.* (Доказательство см., например, в [Pr].)

2.4.6. (a) Придумайте алгоритм распознавания планарности графа. (Используйте без доказательства теорему Куратовского или Фари.)

(b) Найдите асимптотику сложности вашего алгоритма в зависимости от числа e рёбер графа. т. е. асимптотику максимума по графам с e рёбрами от числа шагов в алгоритме, примененному к данному графу. См. «определение» нахождения асимптотики в §6.1.

Подробнее об алгоритмах распознавания планарности графов см., например, [S, §1 «Инварианты изображений графов на плоскости»], [Ta].

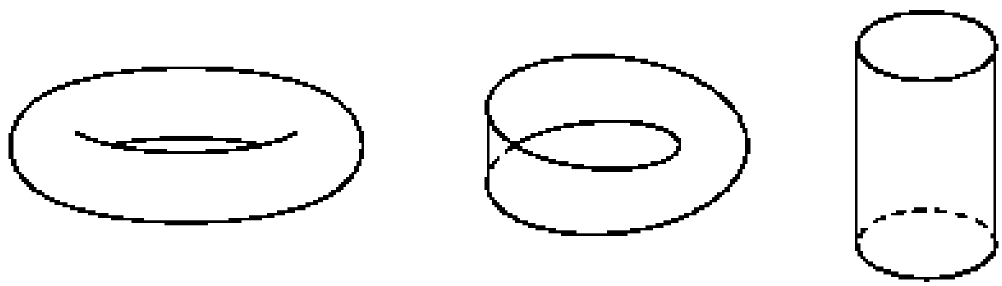

Рис. 7: Тор, лента Мёбиуса и цилиндр

Тор и лента Мёбиуса изображены на рис. 7. Эти фигуры предполагаются *прозрачными*, т. е. точка (или подмножество), «лежащая на одной стороне поверхности», «лежит и на другой стороне». Это аналогично тому, что при изучении геометрии мы говорим, например, о треугольнике на плоскости, а не о треугольнике на верхней (или нижней) стороне плоскости.

2.4.7. Нарисуйте без самопересечений на торе граф

(5) K_5; (33) $K_{3,3}$; (6) K_6; (34) $K_{3,4}$; (7) K_7; (44) $K_{4,4}$.

2.4.8. Нарисуйте без самопересечений на ленте Мёбиуса граф

(5) K_5; (33) $K_{3,3}$; (6) K_6; (34) $K_{3,4}$.

2.4.9. *Картой на торе* называется разбиение тора на конечное число (криволинейных и изогнутых) многоугольников. Раскраска карты на торе называется *правильной*, если разные многоугольники, имеющие общую граничную кривую, имеют разные цвета. Любую ли карту на торе можно правильно раскрасить в

(5) 5 цветов; (6) 6 цветов; (7) 7 цветов?

Подробнее см. [S15, §2].

2.5 Эйлеровы пути и циклы

Мультиграфом (или *графом с петлями и кратными рёбрами*) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел, симметричная относительно главной диагонали. (Мы не используем более правильную, но более громоздкую, терминологию: *мультиграф — граф с кратными рёбрами*, *псевдограф* — граф с петлями, *псевдомультиграф — граф с петлями и кратными рёбрами.*) При этом число, стоящее на пересечении i-й строки и j-го столбца, интерпретируют как число рёбер (или *кратность ребра*) между вершинами с номерами i и j при $i \neq j$ и как число петель в вершине с номером i при $i = j$. Ребро называется *кратным*, если его кратность больше единицы.

Степенью вершины мультиграфа называется число выходящих из нее рёбер. При этом ребро кратности k, соединяющее вершину с другой вершиной, «вносит вклад» k в степень, а петля кратности k «вносит вклад» $2k$ в степень.

Ориентированным мультиграфом (или ориентированным графом с петлями и кратными рёбрами) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел. Если в некоторой клетке (неважно, диагональной или нет) стоит число, большее 1, то говорят, что ориентированный мультиграф имеет кратные рёбра.

Читатель легко сообразит, как определить *(ориентированный) путь* и *цикл* в (ориентированном) мультиграфе, а также как изображать с самопересечечениями на плоскости (ориентированные) мультиграфы.

2.5.1. Сколько всего мультиграфов с данными n вершинами

(a) ориентированных без кратных рёбер, но, возможно, с петлями?

(b) неориентированных без петель, но, возможно, с кратными рёбрами?

2.5.2. Сколько всего мультиграфов с данными n вершинами, имеющих k рёбер и
(a) неориентированных без петель и кратных рёбер?
(b) неориентированных, у которых допускаются кратные рёбра и петли?

Эйлеров цикл (путь) в мультиграфе — цикл (путь), проходящий по каждому ребру мультиграфа ровно один раз.

2.5.3. (a) В связном мультиграфе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины чётна.
(b) В связном мультиграфе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда множество его ребер распадается на несамопересекающиеся циклы.
(c) При каком условии в мультиграфе существует эйлеров путь?
(d) При каком условии в ориентированном мультиграфе существует ориентированный эйлеров цикл?
(e) При каких n граф K_n имеет эйлеров цикл?
(f) То же для графа $K_{m,n}$.

Входящей степенью вершины ориентированного мультиграфа называется число входящих в нее рёбер (с учетом кратности). Аналогично определяется исходящая степень. При этом петля кратности k «вносит вклад» k и во входящую, и в исходящую степень.

2.5.4. (a) Если количество вершин нечётной степени в связном графе равно $2k$, то множество его рёбер можно представить в виде объединения k путей, ни один из которых не проходит ни по какому ребру дважды и никакие два из которых не имеют общих рёбер.
(b) На рёбрах графа, у которого степень каждой вершины чётна, можно поставить стрелки так, что у каждой вершины входящая степень будет совпадать с исходящей.
(c) Все рёбра связного графа раскрашены в два цвета. Из каждой вершины выходит поровну рёбер обоих цветов. Тогда из любой вершины до любой другой можно добраться, каждый раз меняя цвет ребра.

(d) В нарисованном на плоскости без самопересечений связном графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда грани можно раскрасить в 2 цвета *правильно*, т.е. так, что при переходе через каждое ребро цвет меняется.

2.5.5. Математик забыл трёхзначный код своего замка́. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если перед этим были набраны другие цифры). Математик набирает одну цифру в секунду; набранная цифра добавляется в конец. Докажите, что математик сможет открыть замок за

(a) 29 секунд, если в коде могут быть использованы только цифры 1, 3 и 7;

(b) 1002 секунды, если в коде могут быть использованы десять цифр.

(c) Сформулируйте и докажите правило «$0 < 1 < 2 \ldots < 8 < 9$» открытия замка за 1002 секунды.

Последовательность де Брёйна (П. д. Б.) с параметрами n и k — последовательность, элементы которой принадлежат заданному множеству из k элементов (обычно — $\{0, 1, \ldots, k-1\}$), причём все её подпоследовательности длины n различны и среди этих подпоследовательностей встречаются все k^n возможных последовательностей. (Таким образом, длина П. д. Б. равна $k^n + n - 1$.)

(Также П. д. Б. называют бесконечную периодическую последовательность с периодом k^n, каждая подпоследовательность которой длины $k^n + n - 1$ является П. д. Б. с параметрами n и k.)

2.5.6. Постройте последовательность де Брёйна с параметрами $k = 2$ («двоичную») и

(a) $n = 3$, начинающуюся с 111;

(b) $n = 4$, начинающуюся с 1011;

(c) $n = 4$, заканчивающуюся на 1010.

2.5.7. *Правило «0 лучше 1».* Рассмотрим последовательность из нулей и единиц, построенную по следующим правилам. Она начинается с k единиц. Дальше мы пишем 1, только если при написании 0 не все подпоследовательности длины k новой последовательности различны. Если даже при написании 1 не все подпоследовательности длины k новой последовательности различны, то заканчиваем написание последовательности. Докажите, что таким образом получится последовательность де Брёйна.

2.5.8. Дан связный ориентированный мультиграф с n вершинами. Входящая степень d_k каждой вершины k равна исходящей.
(a) Существует дерево, содержащее все вершины этого мультиграфа, все рёбра которого направлены в сторону вершины 1.
(b) Фиксируем дерево T из (a). Будем обходить этот граф (по стрелкам), проходя по каждому ребру не более одного раза. Сначала выйдем из вершины 1 в произвольном направлении. Далее, пусть мы пришли в некоторую вершину v. Выходим из нее по любому ребру, не принадлежащему T, если это возможно. А если невозможно, то выходим из нее по ребру, принадлежащему T (такое ребро единственно). Докажите, что движение закончится в вершине 1, и что в результате получится ориентированный эйлеров цикл.
(c) Число ориентированных эйлеровых циклов в этом мультиграфе кратно числу $(d_1 - 1)! \cdot \ldots \cdot (d_n - 1)!$.

2.5.9. Все рёбра связного графа раскрашены в два цвета. Из каждой вершины выходит поровну рёбер обоих цветов. Докажите, что из любой вершины до любой другой можно добраться, каждый раз меняя цвет ребра.

2.5.10.* Город состоит из нескольких площадей, соединённых непересекающимися дорогами. Площади — круги (а не точки), дороги — прямолинейные отрезки. Известно, что существует замкнутый маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз (этот маршрут может проходить по площадям несколько раз). Докажите, что существует *несамопересекающийся* маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз.

(Иными словами, в любом нарисованном на плоскости без самопересечений эйлеровом графе существует эйлеров цикл, аппроксимируемый несамопересекающимися циклами.)

2.6 Гамильтоновы пути и циклы

Гамильтонов путь (цикл) в графе — путь (цикл), проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.

2.6.1. (a) Никакой граф, гомеоморфный графу $K_{3,2}$, не является гамильтоновым.

(b) Нарисуйте гамильтоновы циклы в графах правильных многогранников.

(c) Грани гамильтонова плоского графа можно правильно раскрасить в 4 цвета.

Напомним (§2.1), что *длина* пути — число его ребер (а не вершин).

2.6.2. (a) Если граф связен и $2e \geqslant n^2 - 3n + 6$, то в нём есть гамильтонов цикл.
(b) *Теорема Дирака-Оре.* Граф, сумма степеней любых двух несмежных вершин которого не меньше n, имеет гамильтонов цикл.
(c) *Лемма Дирака.* Если $a_0 \dots a_s$ — максимальный из путей в графе, проходящих по каждой своей вершине только один раз, $s \geqslant 3$ и $\deg a_0 + \deg a_s > s$, то в этом графе есть несамопересекающийся цикл длины s.
(d) Если в связном графе есть несамопересекающийся цикл длины $s < n$, то в этом графе есть путь длины s, проходящий по каждой своей вершине только один раз.
(e) Граф, сумма степеней любых двух несмежных вершин которого не меньше $n - 1$, имеет гамильтонов путь.

2.6.3. *Теорема Хватала-Эрдёша.* Пусть для некоторого графа и некоторого целого $k \geqslant 2$ среди любых $k+1$ вершин графа есть ребро и после удаления любого набора из $k - 1$ вершины граф остается связным. Тогда в этом графе есть гамильтонов цикл.

2.6.4. Пусть среди любых $k + 1$ вершин графа есть ребро и после удаления любого набора из $k - 1$ вершины граф остается связным.
(a) В этом графе есть хотя бы один несамопересекающийся цикл.
(b) Обозначим через $v_1, \dots, v_s$ максимальный несамопересекающийся цикл в этом графе. Обозначим через W любую компоненту связности графа, полученного удалением вершин этого цикла из исходного графа. Обозначим через X множество вершин этого цикла, соседних с W.
Тогда $|X| \geqslant k$.

(c) Вершины v_i, v_{i+1} не лежат одновременно в X.
(d) Если $v_i, v_j \in X$, то в графе нет ребра $v_{i+1}v_{j+1}$.

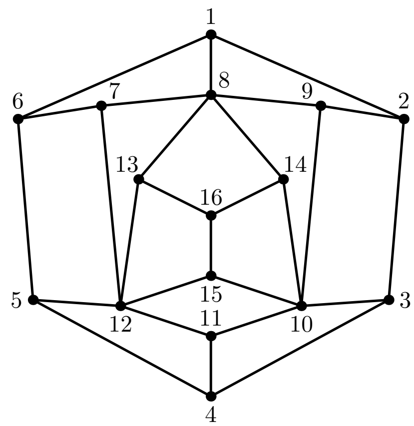

Рис. 8: Есть ли в этом графе гамильтонов путь?

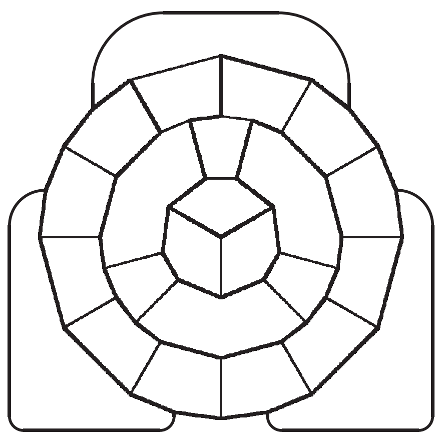

Рис. 9: Граф многогранника Гринбергса. Есть ли в нем графе гамильтонов цикл?

2.6.5. (a) Есть ли гамильтонов путь в графе на рисунке 8?
(b) Есть ли гамильтонов цикл в графе на рисунке 9?
(c) Для каких n есть гамильтонов цикл в графе, вершинами которого являются 3-элементные подмножества n-элементного множества, и два подмножества соединены ребром, если они пересекаются ровно по одному элементу?

2.6.6. Максимальное число попарно непересекающихся по рёбрам гамильтоновых циклов в графе K_n равно $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$.

2.6.7. (a) В любом турнире имеется ориентированный гамильтонов путь.
(b) Для любого n существует турнир с n вершинами, в котором имеется не менее $n!/2^n$ ориентированных гамильтоновых путей.

2.6.8. *Рёберным графом* графа G называется граф, вершины которого — рёбра графа G; две вершины рёберного графа соединены ребром, если соответствующие рёбра графа G имеют общую вершину. Найдите в терминах графа G необходимое и достаточное условие наличия гамильтонова цикла в его рёберном графе.

Ориентированный граф называется *сильносвязным*, если от любой его вершины можно добраться до любой другой, двигаясь по направлению стрелок на ребрах.

2.6.9. (a) Турнир сильносвязен тогда и только тогда, когда в нем есть гамильтонов ориентированный цикл (т.е. несамопересекающийся цикл, идущий по направлениям стрелок на ребрах и проходящий по всем вершинам).

(b) В сильносвязном турнире через любую вершину проходит несамопересекающийся ориентированный цикл любой длины от трех до количества вершин турнира.

2.6.10. * *Это задача для иследования, ответ и решение нам не известны. Она предложена Д.А. Пермяковым.* Найдите наименьшее количество несамопересекающихся циклов длины k в сильносвязном турнире с n вершинами.

См. также п. 2.13.

2.7 Экстремальные задачи (теорема Турана)

2.7.1. Пункты этой задачи, кроме (b), являются различными версиями и частными случаями *теоремы Турана.*

Треугольником в графе называется цикл длины 3.

(a) Если граф не содержит треугольников, то $e \leqslant n^2/4$.
(b) Если $e = [n^2/4] + 1$, то в графе есть по крайней мере $[n/2]$ треугольников.
(c) Если $n = km$ и граф не содержит $(k+1)$-клики, то $2e \leqslant k(k-1)m^2$. (Переходя к дополнительному графу, получаем, что если $n = km$ и граф не содержит $(k+1)$-антиклики, то $2e \geqslant km(m-1)$.)
(d) Если граф не содержит $(k+1)$-антиклики, то $2e \geqslant km(m-1) + 2mr$, где $m := [n/k]$ и $r := k\{n/k\}$.

2.7.2. (a) Если граф не содержит несамопересекающегося цикла длины 4, то $e < n^{3/2}$.
(b) Если граф не содержит подграфа $K_{3,2}$, то $e < n^{3/2}$.
(c) Если граф не содержит подграфа $K_{3,3}$, то $e < 2n^{5/3}$.
(d)* Для любых целых $s, t,\ \ 2 \leqslant s \leqslant t$, если граф не содержит подграфа $K_{s,t}$, то $e < tn^{2-1/s}$.

2.7.3. Для любых n точек на плоскости существует не более n *диаметров*, т. е. (неупорядоченных) пар точек, расстояние между которыми равно максимуму из всех возможных расстояний между парами из этих n точек.

2.7.4. Для любых n точек $A_1, \ldots, A_n$ в $\mathbb{R}^d$ обозначим через $D(A_1, \ldots, A_n)$ число (неупорядоченных) пар точек, расстояние между которыми равно 1. Обозначим

$$E_n(d) = \max\{D(A_1, \ldots, A_n)\ :\ A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^d\}.$$

Тогда:
(a) $E_n(2) > n[\log_2 n]/4$; (b) $E_n(2) \leqslant 2n^{3/2}$; (c) $E_n(3) \leqslant 2n^{5/3}$;
(d) $\dfrac{(n-1)^2}{4} \leqslant E_n(4) \leqslant \dfrac{2(n+4)^2}{5}$.

2.7.5. (a) Пусть V — 11^q-элементное подмножество пространства $\mathbb{R}^q$ (определение пространства $\mathbb{R}^q$ см. в главе 7) любое 10^q-элементное подмножество которого содержит две точки x, y на расстоянии 1: $|x-y| = 1$. Докажите, что для достаточно большого q количество единичных расстояний между точками множества V больше, чем $12^q/2$:

$$\frac{1}{2}\,|\{(x,y) \in V \times V\colon\ |x-y| = 1\}| > \frac{12^q}{2}.$$

(b) Докажите, что в условиях предыдущего пункта можно заменить число $12^q/2$ на 12^q.

2.7.6. Можно рассмотреть обобщение задачи Турана (см. задачу 2.7.1), вместо клик заданного размера запретив другие подграфы. Обозначим через $\mathrm{ex}_H(n)$ максимальное количество рёбер в графе с n вершинами, не содержащем подграфов, изоморфных H. Например, $\mathrm{ex}_{K_{k+1}}(n)$ — это максимальное число рёбер в графе с n вершинами, не содержащем $(k+1)$-клики.

Докажите, что если H_1 — подграф графа H_2, то $\mathrm{ex}_{H_1}(n) \leqslant \mathrm{ex}_{H_2}(n)$.

См. также задачи 6.1.2 и 6.1.3.

2.8 Теорема Менгера

2.8.1. Из каждого связного мультиграфа можно удалить вершину (вместе со всеми выходящими из нее рёбрами) так, что он останется связным.

Граф или мультиграф называется *двусвязным*, если он отличен от K_2 и остается связным после удаления любой вершины.

2.8.2. (a) *Частный случай вершинной теоремы Менгера.* Любые две различные вершины двусвязного мультиграфа, не соединённые ребром, лежат на некотором несамопересекающемся цикле.
(b) Верно ли, что для любого пути P в мультиграфе, имеющем не менее трёх вершин, найдётся другой путь в том же мультиграфе с теми же концами, не пересекающийся с P нигде, кроме концов?

2.8.3. *Частный случай рёберной теоремы Менгера.* Если в мультиграфе есть хотя бы одно ребро и при удалении любого ребра найдётся путь между вершинами a и b, то в мультиграфе найдутся два пути между вершинами a и b, не имеющие общих рёбер.

2.8.4. (a) Для любого ребра u двусвязного графа G, отличного от K_3, хотя бы один из графов $G-u$ и G/u двусвязен.
(b) Для любых двух вершин выпуклого многогранника существуют три непересекающихся (нигде, кроме этих вершин) пути по его

рёбрам из одной вершины в другую. (Такие графы называют *трёхсвязными.*)
(c) Для трёхсвязного графа G с ребром xy (вершины которого — x, y) граф G/xy трёхсвязен тогда и только тогда, когда граф $G - x - y$ двусвязен.

2.8.5. (a) *Теорема Уитни (вершинная).* Мультиграф остается связным после удаления любых $k-1$ вершин тогда и только тогда, когда любые две его вершины можно соединить k путями, пересекающимися только в этих двух вершинах.
(b) *Теорема Менгера (вершинная).* Если вершины a и b мультиграфа G, не соединённые ребром, остаются в одной компоненте связности после удаления любых $k-1$ других вершин, то a и b можно соединить k путями, пересекающимися только в этих двух вершинах.

2.8.6. Вершины A и B графа назовем *эквивалентными*, если существует такая последовательность вершин $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$, что любые две соседние вершины A_i и A_{i+1} можно соединить k путями, не имеющими общих промежуточных вершин. Тогда любые две эквивалентные вершины можно соединить k путями, не имеющими общих рёбер.

2.9 Простое доказательство теоремы Куратовского

Формулировка теоремы Куратовского приведена в п. 2.4. Приводимое в этом пункте доказательство в основном принадлежит Ю. Макарычеву (он придумал свое доказательство, еще будучи школьником!) [Ma], ср. [Th, §5]. Некоторые упрощения сделаны А. Заславским, В. Прасоловым, А. Скопенковым и А. Телишевым. По-видимому, это доказательство является наиболее простым.

Необходимость в теореме Куратовского следует из утверждения 2.4.5.a. Приведем доказательство достаточности. Ее достаточно доказать для графов без петель и кратных ребер. Поэтому будем рассматривать только такие графы. Под стягиванием ребра будем понимать стягивание ребра вместе с заменой каждого получившегося ребра кратности больше 1 на ребро кратности 1.

2.9.1. Утверждение. *Если связный граф G не изоморфен ни K_5, ни $K_{3,3}$, и для любого ребра e графа G оба графа $G - e$ и G/e планарны, то G планарен.*

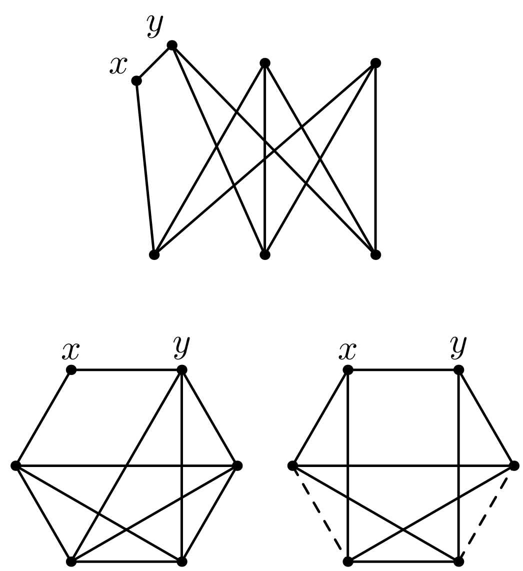

Рис. 10: «Растягивание ребра» в графах Куратовского

Доказательство достаточности в теореме Куратовского с использованием Утверждения. Используем индукцию по количеству ребер в графе. Свойство «*граф G содержит подграф, гомеоморфный графу H*» будем сокращенно записывать в виде «$G \supset H$». Шаг индукции следует из Утверждения, поскольку если для некоторого ребра e графа G

- $G - e \supset K_5$, то $G \supset K_5$.
- $G - e \supset K_{3,3}$, то то $G \supset K_{3,3}$.
- $G/e \supset K_{3,3}$, то $G \supset K_{3,3}$.
- $G/e \supset K_5$, то $G \supset K_5$ или $G \supset K_{3,3}$ (рис. 10). □

Назовем *θ-подграфом* подграф, гомеоморфный $K_{3,2}$.

2.9.2. Лемма о графах Куратовского. *Для произвольного графа K следующие три условия равносильны:*

(1) Для любого ребра xy графа K граф $K - x - y$ не содержит θ-подграфа, и из каждой вершины графа $K-x-y$ выходит не менее двух ребер.

(2) Для любого ребра xy графа K граф $K-x-y$ является циклом (содержащим $n \geqslant 3$ вершин).

(3) K изоморфен K_5 или $K_{3,3}$.

Импликации (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) в лемме о графах Куратовского очевидны и не используются в доказательстве теоремы Куратовского.

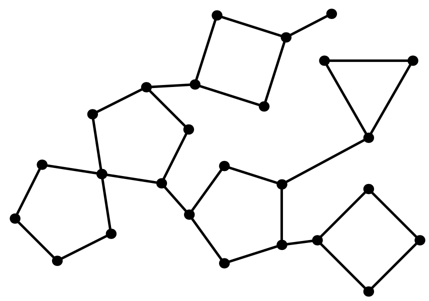

Рис. 11: «Дерево» из циклов

Доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (2) *в лемме о графах Куратовского.* Два цикла, имеющих общее ребро, содержат θ-подграф. Поэтому ввиду (1) в графе $K-x-y$ существует «висячий» цикл, т.е. цикл C, имеющий с остальным графом только одну общую вершину v (ибо граф $K-x-y$ представляет собой одно или несколько «деревьев», «вершинами» которых служат циклы, рис. 11; формально говоря, каждым блоком графа $K-x-y$ является цикл). В этом цикле C есть еще по крайней мере две вершины p и q. Так как в графе K нет вершин, из которых выходит менее трех ребер, то каждая из этих вершин p и q соединена либо с x, либо с y. Поэтому в объединении цикла C и ребер графа K, соединяющих вершины x, y, p, q, можно выделить θ-подграф. Значит, по (1) каждое ребро графа $K-x-y$ имеет конец на цикле C. Поскольку по (1) граф $K-x-y$ не содержит висячих вершин, то $K-x-y=C$. □

Доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (3) *в лемме о графах Куратовского.* При $n=3$ для любых двух вершин b и c цикла $K-x-y$ граф $K-b-c$ является циклом, поэтому оставшаяся вершина цикла $K-x-y$ соединена (ребром) в K и с x, и с y. Поэтому $K=K_5$.

При $n \geqslant 4$ возьмем любые четыре последовательные вершины a, b, c, d цикла $K-x-y$. Поскольку граф $K-b-c$ является циклом, то в K одна из вершин a и d соединена с x (и не соединена с y), другая соединена с y (и не соединена с x), а отличные от a, b, c, d вершины цикла $K - x - y$ (которых нет при $n = 4$) не соединены ни с x, ни с y. При $n \geqslant 5$ получаем противоречие. При $n = 4$ получаем, что четыре вершины цикла $K - x - y$ соединены с x и y попеременно, откуда $K = K_{3,3}$. □

Доказательство утверждения. Так как G не изоморфен ни K_5, ни $K_{3,3}$, то по лемме о графах Куратовского существует ребро $e = (xy)$ графа G, для которого в графе $G - x - y$ найдется либо вершина степени меньше 2 (в $G - x - y$), либо θ-подграф.

Если в графе G из некоторой вершины выходит одно или два его ребра, и при стягивании одного из них получается планарный граф, то и граф G планарен. Поэтому далее будем считать, что из каждой вершины графа G выходит не менее трех его ребер.

Поэтому в графе $G - x - y$ нет изолированных вершин, и если есть висячая вершина p, то она соединена и с x, и с y в графе G. Нарисуем граф $G - (xy)$ на плоскости без самопересечений. Так как в графе G из p выходит три ребра, то «с одной стороны» от пути xpy из p не выходит ребер. «Подрисуем» ребро xy вдоль пути xpy «с этой стороны» от пути. Получим изображение графа G на плоскости без самопересечений.

Рассмотрим теперь случай, когда в графе $G - x - y$ найдется θ-подграф.

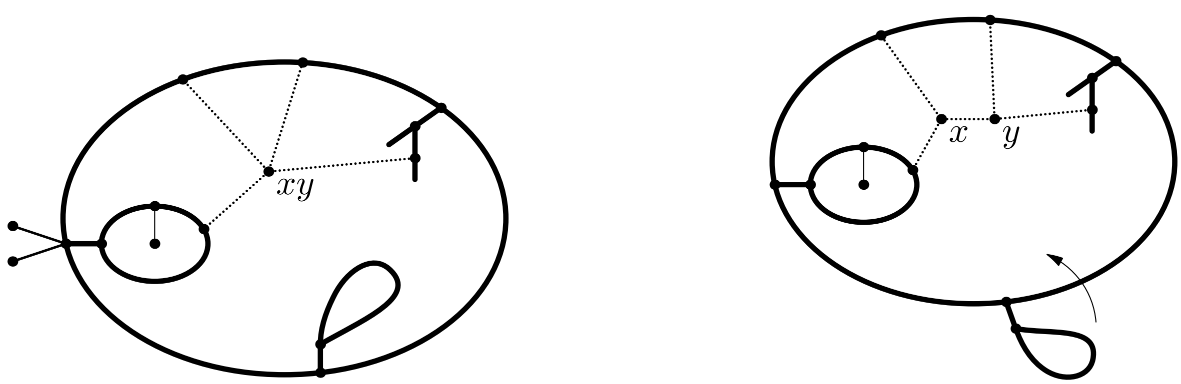

Рис. 12: Изображение на плоскости графов G/xy и G

Нарисуем без самопересечений на плоскости граф G/xy (рис. 12 слева). Отождествим графы $G - x - y$ и $G/xy - xy$. Изображение графа $G-x-y$ на плоскости получается стиранием ребер графа G/xy, выходящих из вершины xy. Обозначим через $\overline{C}$ границу той грани изображения графа $G-x-y$, которая содержит вершину xy графа G/xy. (Определение грани приведено в п. 2.4.)

В следующем абзаце мы докажем, что *граница грани не может содержать θ-подграфа.*

Это утверждение можно вывести из леммы о четности или теоремы Жордана [S, п. 1.3 «Число пересечения для ломаных на плоскости»]. Другое доказательство получается от противного: если граница грани содержит θ-подграф, то возьмем точку внутри этой грани и соединим ее тремя ребрами с тремя точками на трех «дугах» θ-подграфа. Получим изображение графа $K_{3,3}$ на плоскости без самопересечений. Противоречие.

Поэтому $G-x-y\neq\overline{C}$. Тогда ребра графа $G-x-y-\overline{C}$ [6] находятся в грани изображения графа $G-x-y$, не содержащей вершины xy. Значит, граф $\overline{C}$ разбивает плоскость. Поэтому найдется цикл $C\subset\overline{C}$, относительно которого вершина xy лежит, не уменьшая общности, внутри, а некоторое ребро графа $G-x-y-\overline{C}$ — вне.

Обозначим через R подграф в $G-x-y=G/xy-xy$, образованный всеми ребрами графа G/xy, лежащими вне цикла C. (Возможно, $R\neq G-x-y-\overline{C}$.) Так как R — подграф в $G-x-y$, то R — подграф в G.

Граф $G-R$ можно нарисовать на плоскости без самопересечений (сплошные линии на рис. 12 справа). Можно считать, что ребра графа G, выходящие из x или y, на изображении графа $G-R$ лежат *внутри* цикла C.

В следующем абзаце мы докажем, что *каждая компонента связности графа $G-x-y-R-C$ пересекается с C не более чем по одной точке.*

Если это не так, то в $G-x-y-R-C$ есть путь, соединяющий две точки на C. На изображении графа G/xy соответствующий путь лежит внутри цикла C. Значит, этот путь разбивает внутреннюю

---

[6] Удаление подграфа — удаление всех его ребер и всех вершин, из которых выходят только ребра этого подграфа. Заметим, что удаление вершины — не то же самое, что удаление подграфа из этой вершины.

часть цикла C на две части, одна из которых содержит xy, а другая не лежит в грани, ограниченной $\overline{C}$. Поэтому $C \not\subset \overline{C}$ — противоречие.

Поэтому можно перекинуть внутрь цикла C каждую компоненту связности графа $G - x - y - R - C$ (см. стрелочку на рис. 12 справа). Значит, граф $G - R - C$ можно нарисовать внутри цикла C. Нарисуем R вне C, как для изображения графа G/xy (рис. 12 слева). Получим изображение графа G на плоскости без самопересечений. □

Запрещенные подсистемы

Завершим этот пункт формулировками некоторых версий теоремы Куратовского.

Начнем с неформального изложения идеи. Если некоторая подсистема системы N не реализуема в другой системе M, то и N не реализуема в M. Естественная идея — попытаться найти список «запрещенных» систем, не реализуемых в M, со следующим свойством: *для того, чтобы система N была реализуема в M необходимо и достаточно, чтобы N не содержал ни одной из этих «запрещенных» подсистем.*

Классический пример теоремы такого рода — теорема Куратовского. Аналогично описание графов, вложимых в данную поверхность [RS], а также других классов графов или более общих обьектов [Cl] (например, графы и даже пеановские континуумы, *базисно* вложимые в плоскость [S95, Ku]).[7] Приведем формулировки некоторых результатов такого рода (доказательства оставляем читателю в качестве задач).

2.9.3. Теорема Шартрана-Харари. *Граф G можно нарисовать на плоскости без самопересечений так, чтобы он был границей некоторой* одной *грани тогда и только тогда, когда G не содержит θ-подграфа.*

[7]Заметим, что список запрещенных подграфов для вложимости графа в лист Мебиуса содержит целых 103 графа [GHW]. Даже *существование* такого конечного списка для произвольной поверхности доказывется сложно [AH, RS]. Список запрещенных полиэдров бесконечен для вложимости двумерных полиэдров в $\mathbb{R}^3$ или n-мерных полиэдров в $\mathbb{R}^{2n}$, где $n \geqslant 2$ [Sa]. Поэтому интересны другие препятствия к вложимости. Одно из самых полезных препятствий строится с помощью *конфигурационного пространства* упорядоченных пар различных точек данного пространства [S08, §5].

Назовем несамопересекающийся цикл C в связном графе G *граничным*, если существует изображение без самопересечений графа G на плоскости, при котором цикл C изображается границей некоторой грани.

Рис. 13: Цикл C не может быть границей внешней грани

2.9.4. Относительная версия теоремы Куратовского. *Цикл C является граничным тогда и только тогда, когда граф G планарен и цикл C не содержится в подграфе графа G, как на рис. 13.*

Этот результат можно вывести из теоремы Куратовского.

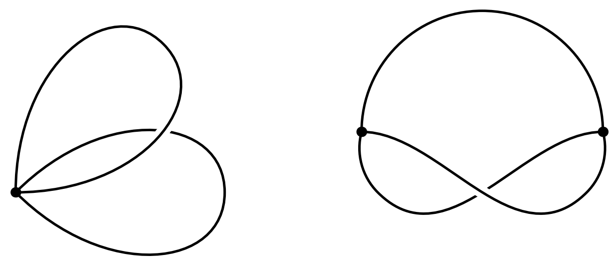

Рис. 14: Графы с циклическими порядками, не реализуемые на плоскости

2.9.5. Теорема о 8 и θ. *Граф G с заданными (ориентированными) циклическими порядками ребер, выходящих из каждой вершины, можно так изобразить без самопересечений на плоскости, чтобы указанные циклические порядки получались бы при обходах по часовой стрелке вокруг вершин, тогда и только тогда, когда G не содержит «восьмерки» или «буквы θ» с циклическими порядками, изображенными на рис. 14.*

А этот результат проще доказать, не используя теорему Куратовского (подробнее см. [S15, §2]).

2.10 Метод минимального контрпримера. А.Я. Канель

При решении многих задач используется так называемый *метод минимального контрпримера* (разновидность *принципа крайнего* или *метода спуска*). Он заключается в следующем. Пусть надо доказать, что объекта, удовлетворяющего некоторым свойствам, не существует. Предположим противное — тогда найдется (в некотором смысле) *минимальный* контрпример. После чего строят еще «меньший» контрпример и получают противоречие. Понятие «меньше» подбирается в процессе доказательства.

Особенно распространен такой метод решения в задачах на графы. Простейшие примеры — доказательства теорем Эйлера 2.4.4.c о плоских графах [S15, §1], Куратовского (п. 2.4 и 2.9) и Менгера (п. 2.8). Более содержательный пример — следующая знаменитая теорема Дилуорса о частично упорядоченных множествах.

2.10.1. Множество A с отношением $\prec$ называется *частично упорядоченным*, если отношение $\prec$ удовлетворяет следующим свойствам:

(1) $a \not\prec a$,

(2) $a \not\prec b$ либо $b \not\prec a$,

(3) если $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a \prec c$.

Если $a \prec b$ или $b \prec a$, то элементы a и b называются *сравнимыми*. Если же $a \not\prec b$ и $b \not\prec a$, то они называются *несравнимыми*. *Цепью* называется множество попарно сравнимых элементов, а *антицепью* — попарно несравнимых. *Диаметром* частично упорядоченного множества называется максимальный размер антицепи.

(a) Количество цепей, на которые можно разбить частично упорядоченное множество, не меньше его диаметра.

(b) *Теорема Дилуорса.* Количество цепей, на которые можно разбить частично упорядоченное множество, равно его диаметру.

2.10.2. В каждый город ведет 3 дороги: красная, синяя и белая. В зависимости от цветов входящих дорог, считая по часовой стрелке, города разделяются на два типа КСБ и КБС. Докажите, что разность количеств городов разных типов делится на 4.

2.10.3. (a) С графом разрешается производить следующую операцию: выбрать произвольный цикл длины 4 и выбросить из него произвольное ребро. Какое минимальное число ребер можно оставить с помощью этой операции из полного графа с n вершинами?

(b) Если в графе любые две 3-клики имеют общую вершину и нет 5-клик, то существуют две вершины, удаление которых разрушает все 3-клики.

2.10.4. Для любых $m < n$ любой граф с n вершинами содержит $m+1$ вершин, степени которых отличаются не больше чем на $m-1$.

2.11 Степенны́е последовательности. М.Н. Вялый и А.Б. Скопенков

2.11.1. (a) При каких e и n существует граф с n вершинами и e ребрами, каждая вершина которого имеет степень 3? (Такие графы называют *кубическими* или *правильными степени 3*.)

(b) При каких n и d существует граф с n вершинами, каждая вершина которого имеет степень d?

2.11.2. Последовательность n целых положительных чисел является последовательностью степеней вершин некоторого дерева тогда и только тогда, когда сумма её членов равна $2n-2$.

2.11.3. Даны целые положительные числа $n, d_1, \dots, d_n$. При каких условиях существует

(a) мультиграф (возможно, имеющий петли и кратные ребра)
(b) мультиграф без петель
(c)* граф
с n вершинами степеней $d_1, \dots, d_n$, соответственно?

Последовательность целых неотрицательных чисел называется *степенной* (графической), если она является последовательностью степеней вершин некоторого графа. *Основной вопрос*: какие последовательности являются степенными? Это задача 2.11.3.c; неотрицательность введена для удобства индуктивных построений. Здесь мы подведем читателя к ответу и доказательству, которые приводятся в п. 2.12.

2.11.4. Является ли степенной последовательность
(a) $(4^3, 1^6)$, (b) $(6^4, 2^3)$, (c) $(5^3, 3^3)$,

(d) $(18^{10}, 12^3, 6^8)$, (e) $(15^8, 10^6, 3^4)$?

(Мы используем «экспоненциальную» запись невозрастающих целочисленных последовательностей: a^k означает, что k последовательных членов последовательности равны a.)

2.11.5. Для любой степенной последовательности $d_1, \ldots, d_n$

(a) $d_i \leqslant n - 1$;

$$(b) \quad \sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i) \text{ для любого } k = 1, \ldots, n-1.$$

2.11.6. (a) Приведите пример числа n и не степенной последовательности из n чисел, лежащих в промежутке $[1000, n/1000]$, сумма которых четна.

(b) Любая последовательность из n чисел, меньших $\sqrt{n}/2$, сумма которых четна — степенная.

2.11.7. Если последовательность целых положительных чисел степенная, то последовательность, полученная из нее каждым из следующих двух преобразований — степенная.

(a) Выкинем максимальное число d и отнимем по единице от следующих по возрастанию d чисел.

(b) Отнимем по единице от наибольшего и наименьшего из чисел.

Каждый из двух пунктов этой задачи (вместе с очевидным обратным утверждением) дает алгоритм распознавания того, является ли данная последовательность степенной. Имеется и «явный» ответ, см. п. 2.12.

2.11.8. Пусть a, b, c, d — различные вершины графа, причем (ab), (cd) — ребра, а $(ac), (bd)$ — не ребра. Назовем *обменом* преобразование графа, состоящее в удалении ребер $(ab), (cd)$ и добавлении ребер $(ac), (bd)$.

Пусть G_1, G_2 — два графа с одинаковыми (упорядоченными по неубыванию) последовательностями степеней вершин. Докажите, что обменами можно перевести граф G_1 в граф G_2.

2.11.9. Пусть для последовательности $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n > 0$ (не обязательно степенной) выполнены неравенства из задачи 2.11.5.b.

(a) Тогда $d_1 \leqslant n-1$.

(b) Переставим по невозрастанию последовательность, полученную преобразованием из задачи 2.11.7.a. Докажите неравенства из задачи 2.11.5.b с заменой d на полученную последовательность c:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\} \text{ для любого } k = 1, \ldots, n-1.$$

Сделайте это для

(b1) $k \geqslant d_1$; (b2) таких k, что $c_i = d_{i+1} - 1$ при любом $i \leqslant k$;

(b3) остальных случаев.

2.11.10. Пусть для последовательности $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n > 0$ (не обязательно степенной) выполнены неравенства из задачи 2.11.5.b. Переставим в порядке невозрастания последовательность, полученную преобразованием из задачи 2.11.7.b. Докажите неравенства из задачи 2.11.5.b с заменой d на полученную последовательность c при

(a) $k \geqslant t := \min\{i : d_i > d_{i+1}\}$; (b) $d_k \leqslant k-1 \leqslant t-2$;

(c) $d_k = k \leqslant t-1$; (d) $d_k \geqslant k+1 \leqslant t$.

В заключение приведем несколько задач для исследования.

2.11.11. (a,b,c) То же, что в задаче 2.11.3, для *связных* графов.

(a',b',c') Сформулируйте и решите аналог задачи 2.11.3 для *ориентированных* графов.

(a",b",c") То же, что в задаче 2.11.3 для *планарных* графов.

(a"',b"',c"'*) То же, что в задаче 2.11.3, для графов, реализуемых на торе (рис. 7).

(a"",b"",c""*) То же, что в задаче 2.11.3, для графов, реализуемых на ленте Мебиуса (рис. 7).

Необходимые определения можно найти в п. 2.4. Для тора и ленты Мебиуса будет полезно неравенство Эйлера [S15, §2].

Задачи 2.11.11.(a",b",c") при помощи конструкции *двойственного* графа связаны со следующими задачами. Даны целые положительные числа $n, d_1, \ldots, d_n$. При каких условиях существует

(a) мультиграф (возможно, имеющий петли и кратные ребра)
(b) мультиграф без петель
(c)* граф

нарисованный без самопересечений на плоскости, имеющий n граней, в границе которых $d_1, \ldots, d_n$ ребер, соответственно?

Аналогичное замечание справедливо для реализуемости на торе и на ленте Мебиуса. Все эти задачи интересно обобщить на сферу с g ручками и на диск с m листами Мебиуса [S15, §2].

2.11.12. * (a) Можно ли опустить какие-нибудь неравенства из задачи 2.11.5.b так, чтобы достаточность (т.е. теорема из п. 2.12.c) осталась верной? Если да, то попробуйте найти минимальный набор неравенств.

(b) Если слить две степенные последовательности, то получится степенная последовательность. А какие степенные последовательности нельзя разбить на две степенные последовательности?

2.12 Теорема о степенны́х последовательностях. В.А. Волков и А.Б. Скопенков

Теорема. *Невозрастающая последовательность является степенной тогда и только тогда, когда сумма ее членов четна и выполнены неравенства задачи 2.11.5.b.*

Доказательство С.А. Чоудама. Индукция по $\sum d_i$. Случай, когда все d_i равны, рассмотрен в задаче 2.11.1.b. Пусть теперь не все d_i равны. Можно считать, что $d_n > 0$.

Определим последовательность c, как в задаче 2.11.10. Более формально, обозначим $t = \min\{i : d_i > d_{i+1}\}$ и определим последовательность

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad \text{формулой} \quad c_i := \begin{cases} d_i, & i \neq t, n, \\ d_i - 1, & i = t, n. \end{cases}$$

Обозначим $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i$, $S'_k = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i$. По задаче 2.11.7.b достаточно доказать неравенства

$$(*) \qquad S'_k \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}.$$

При $k \geqslant t$

$$S'_k = S_k - 1 \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} - 1 \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}.$$

Пусть теперь $k \leqslant t-1$. Тогда $S'_k = S_k = kd_k$.

Для $d_k \leqslant k-1$ неравенство (*) тривиально.

Для $d_k = k$

$$S'_k - k(k-1) = k^2 - k(k-1) = k \overset{(3)}{=} d_{k+1} \overset{(4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant d_{k+1} + \left(\sum_{i=k+2}^{n} d_i - 2\right) \overset{(5)}{=} \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}, \quad \text{где}$$

• равенство (3) выполнено, поскольку $k \leqslant t-1$;

• неравенство (4) очевидно, если $k+2 < n$; если же $k+2 = n$, то $d = ((n-2)^{(n-1)}, d_n)$ и $d_n \geqslant 2$ в силу четности суммы $d_1 + d_2 + \dots + d_n$.

• равенство (5) выполнено, поскольку $\min\{k, c_i\} = c_i$ при $i \geqslant k+1$.

Случай $d_k \geqslant k+1$. Если $d_n \geqslant k+1$, то $\min\{k, d_i\} = \min\{k, c_i\} = k$ при $i \geqslant k+1$ и неравенство (*) следует из аналогичного для S_k.

Пусть теперь $d_n \leqslant k$. Имеем

$$\min\{k, c_i\} = \begin{cases} \min\{k, d_i\} & k+1 \leqslant i < n \\ \min\{k, d_n\} - 1 & i = n \end{cases}.$$

В нашем случае $S'_k = S_k$, поэтому достаточно показать, что

$$(**) \qquad S_k \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\} = k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} - 1.$$

Учитывая, что $d_{k+1} = d_k \geqslant k+1$, получаем

$$S_{k+1} = (k+1)d_k = \frac{k+1}{k} S_k \overset{(3)}{\leqslant} (k+1)(k-1) + \frac{k+1}{k} \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} =$$

$$= (k+1)(k-1) + (k+1) + \frac{k+1}{k} \sum_{i=k+2}^{n} \min\{k, d_i\} \overset{(5)}{>}$$

$$> (k+1)k + \sum_{i=k+2}^{n} \min\{k+1, d_i\} \geqslant S_{k+1}.$$

Неравенство (5) выполнено, так как при всех $k+2 \leqslant i < n$ имеем нестрогое неравенство и при $i = n$ строгое. Значит, в (3) неравенство строгое. Отсюда вытекает (**). □

Набросок другого доказательства. Первый абзац такой же, как в предыдущем доказательстве. Определим последовательность c, как в задаче 2.11.9. По задаче 2.11.7.a достаточно доказать неравенства из задачи 2.11.5.b для последовательности c.

Выполнение этих неравенств несложно проверить для $k \geqslant d_1$.

Докажем неравенства *для тех k, для которых $c_i = d_{i+1} - 1$ при любом $i \leqslant k$.*

(Рассмотрите самостоятельно случай остальных k.)

Обозначим $S := \sum_{j=k+1}^{n-1} \min(k, c_j)$.

Случай 1. Среди чисел $d_{k+2}, d_{k+3}, \ldots, d_n$ более $d_1 - k$ чисел, больших k. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant kd_1 = k(k-1) + k(d_1 - k + 1) \leqslant k(k-1) + S.$$

Первое неравенство выполнено, так как каждое слагаемое в первой сумме не больше d_1. Последнее неравенство выполнено, так как среди чисел $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_{n-1}$ более $d_1 - k$ чисел, не меньших k.

Случай 2. Среди чисел $d_{k+2}, d_{k+3}, \ldots, d_n$ не более $d_1 - k$ чисел, больших k. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i = -d_1 - k + \sum_{i=1}^{k+1} d_i \leqslant k(k+1) - d_1 - k + \sum_{j=k+2}^{n} \min(k+1, d_j) \leqslant$$

$$\leqslant k^2 - d_1 + S + d_1 - k = k(k-1) + S.$$

Первое и четвертое равенства очевидны. Второе неравенство — известное для старой последовательности. Докажем третье неравенство. Среди чисел $d_{k+2}, d_{k+3}, \ldots, d_n$ ровно $d_1 - k$ чисел было уменьшено на 1 при переходе к новой последовательности. Поэтому в сумме $\sum_{j=k+2}^{n} \min(k+1, d_j)$ при переходе к S первые $d_1 - k$ слагаемых уменьшились на 1, а остальные не изменились. □

2.13 Обобщенная гамильтоновость: задачи для исследования. А.Ю. Веснин и А.Б. Скопенков

Пусть H — граф. Граф X называется *H-гамильтоновым,* если в X существует подграф, содержащий все вершины графа X и гомеоморфный графу H.

Например, гамильтоновость равносильна K_3-гамильтоновости.

Следующая задача (кроме (g)) проста и приводится для того, чтобы помочь решателю войти в курс дела. Задачи, отмеченные звездочкой, являются нерешенными. Обычно при решении сложной задачи полезно рассмотреть частные случаи, попытаться решить близкие задачи. Это позволяет заметить закономерности, которые можно сформулировать в виде гипотез и затем доказать. Мы не будем подсказывать эти гипотезы, а предлагаем вам самим исследовать нерешенные задачи и высказывать ваши предположения.

Обозначим $\theta := K_{3,2}$.

2.13.1. (a) Любой гамильтонов граф, отличный от цикла, является θ-гамильтоновым.

(b) Существует θ-гамильтонов граф, не являющийся гамильтоновым.

(c) Существует ли гамильтонов граф, отличный от цикла, не гомеоморфный графу θ и не являющийся K_4-гамильтоновым?

(d) Существует ли K_4-гамильтонов граф, не являющийся θ-гамильтоновым?

(e) Для любого ли графа G существует граф, не являющийся G-гамильтоновым?

(f) Для любых ли графов G и H существует G-гамильтонов граф, не являющийся H-гамильтоновым?

(g)* Опишите «иерархию» графов по их гамильтоновости: когда H-гамильтонов граф является G-гамильтоновым?

2.13.2. (a) Постройте не гамильтонов граф многогранника.

(b,c*,d*,e*,f*,g*) То же, что в задаче 2.13.1, для графов многогранников.

Граф Погорелова — граф выпуклого многогранника в трехмерном пространстве,

(1) из каждой вершины которого исходит три ребра,

(2) каждая замкнутая несамопересекающаяся ломаная на поверхности многогранника, разделяющая какие-либо две его грани, пересекает по крайней мере пять ребер многогранника.

Из (2) вытекает, что в границе каждой грани не менее пяти ребер.

2.13.3. (a) Правильный додекаэдр является графом Погорелова.

(b) Граф с рис. 9 является графом Погорелова.

(c)* Охарактеризуйте графы Погорелова в теоретико-графовых терминах (подобно характеризации Штейница графов многогранников).

Негамильтонов граф Погорелова с рис. 9 является θ-гамильтоновым (задача 2.13.2.b).

2.13.4. (c*,d*,e*,f*,g*) То же, что в задаче 2.13.1, для графов Погорелова.

2.13.5. * Постройте минимальный (по числу граней) граф Погорелова,

(a) являющийся K_4-гамильтоновым, но не θ-гамильтоновым.

(b) не являющийся K_4-гамильтоновым.

(c) не являющийся H-гамильтоновыми ни для какого подграфа H данного графа G. (Например, для $G = K_4$.)

См. подробнее [Ve].

2.14 Подсказки

2.1.1. Обозначим данный граф через G. Посчитайте двумя способами количество таких пар (A, x), что $A \subset V(G)$, $x \in E(G)$ и ровно один конец ребра x лежит в A.

2.2.3. Используйте взаимно-однозначное соответствие из следующей задачи 2.2.4.

2.7.4. В этой и следующей задаче удобно использовать понятие *дистанционного графа*. Это граф, множество вершин которого — заданное множество точек и в котором ребром соединены вершины на расстоянии 1.

2.8.5. (b) Пусть G — минимальный по числу рёбер контрпример к доказываемой теореме для $k=3$. Докажите, что *вершины a и b оказываются в разных компонентах после удаления некоторых трёх вершин x, y, z, две из которых соединены ребром.*

2.11.2. Индукция с откидыванием висячей вершины.

2.11.3. Обозначим $e := (d_1 + \dots + d_n)/2$.

Ответы: (a) e целое. (b) e целое и $d_i \leqslant e$ для любого i.

(c) См. п. 2.12.

2.11.5. (b) Оцените сверху количество ребер, выходящих из первых k вершин (и снизу количество ребер, выходящих из последних $n-k$ вершин).

2.11.7. Используйте обмены (определенные в задаче 2.11.8).

(b) Удалим ребро между вершиной наибольшей степени и вершиной наименьшей степени, если это возможно.

2.11.8. *Первый способ.* Рассмотрите вершину наибольшей степени и ребра (в графах G_1 и G_2), выходящие из нее.

Второй способ. Рассмотрим граф с теми же вершинами. Его красные ребра — те, которые есть в G_1, но не в G_2. Его синие ребра — те, которые есть в G_2, но не в G_1. Докажите, что в нем есть цветочередующийся цикл.

2.11.11. (a',b',c') См., например, [Ru].

(a",b",c") Используйте формулу Эйлера 2.4.4.c.

(a",b"), (a"' ,b"'), (a"", b"") Следующие ответы для сферы с g ручками (или диска с m листами Мебиуса) получены в [Mo]. Здесь g, m даны вместе с n и $d_1, \dots, d_n$.

(a) e целое и $e \geqslant n-1+2g$ (или $e \geqslant n-1+m$).

(b) e целое, $e \geqslant \max d_i$ и $e \geqslant n-1+2g$ (или $e \geqslant n-1+m$).

2.13.2. (a) См. рис. 9.

2.15 Указания

2.4.1. (a) Этот факт выводится из утверждения 2.4.5.a по индукции. Или при помощи конструкции *двойственного графа* он сводится к аналогичному факту о раскраске вершин плоского графа, который следует из утверждения 2.4.3.d.

Другой способ — доказать формулу Эйлера для графа, являющегося разбиением треугольника на выпуклые многоугольники, при помощи подсчета сумм углов многоугольников.

(b) Докажем аналогичный факт о раскраске вершин плоского графа. Покажем, как раскрасить граф с n вершинами в 5 цветов, в предположении, что для графов с $n-1$ и $n-2$ вершинами это возможно. По утверждению 2.4.3.d существует вершина a степени не больше 5.

Если $\deg a \leqslant 4$, то удалим вершину a, покрасим остальные, добавим вершину a и покрасим её в «недостающий» цвет.

Если $\deg a = 5$, то среди соседей вершины a найдутся две вершины b, c, не соединённые ребром (иначе граф содержит K_5). Удалим a и склеим b и c. Покрасим полученный граф. Потом разделим вершины b и c и добавим a.

Ср. [CR], разбор двух случаев на стр. 291 и рассуждение в начале стр. 290.

(e) При $n \geqslant 3$ в конце игры все грани треугольные. Поэтому $n - E + \frac{2E}{3} = 2$, откуда $E = 3(n-2)$.

Ответ: первый выигрывает при $n = 2$ или нечётном $n \geqslant 3$, второй — в остальных случаях.

2.4.2. (a) Смотри!

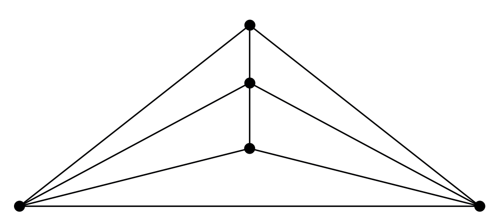

Рис. 15: Граф K_5 без одного из рёбер

2.4.3. (a) Пусть граф K_5 нарисован без самопересечений на плоскости. Тогда по формуле Эйлера $5 - 10 + F = 2$. Значит, $F = 7$.

Воспользовавшись утверждением 2.4.4.b, получаем $21 = 3F \leqslant 20$. Противоречие.

Методическое замечание. Полезно разобрать это решение, не ссылаясь на утверждение 2.4.4.b, а доказав его для частного случая. После разбора этого решения полезно заметить, что оно близко к порочному кругу. Действительно, при доказательстве формулы Эйлера используется утверждение, близкое к непланарности графа K_5 ([S15, лемма о пересечении 1.3.7]). Доказательство непланарности графа K_5, не содержащее порочного круга, получается из этой леммы или аналогично, см. [S, §1.4 «Инвариант самопересечения изображения графа»].

(b) Доказательство аналогично пункту (a). Так как граф $K_{3,3}$ не содержит циклов длины три, то в границе каждой грани не менее четырех стрелок.

(c) По формуле Эйлера и неравенству 2.4.4.b имеем $6 = 3(V - E + F) \leqslant 3V - E$. Отсюда $E \leqslant 3V - 6$.

(d) Можно считать, что граф связен и $E \geqslant 1$. Если степень каждой вершины не меньше 6, то $2E \geqslant 6V$. Это проиворечит п. (c).

2.4.4. (b) *Идея доказательства.* Граница каждой грани состоит не менее чем из трёх рёбер. Следовательно,

$3 \leqslant$ количества рёбер, ограничивающих первую грань

$3 \leqslant$ количества рёбер, ограничивающих вторую грань

$\ldots$

$3 \leqslant$ количества рёбер, ограничивающих F-ую грань

Просуммируем значения в колонках. Сумма значений левой колонки равна $3F$. В сумме значений из правой колонки каждое ребро посчитано не более двух раз, так как принадлежит двум граням. Следовательно, сумма не превосходит $2E$.

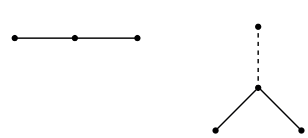

Рис. 16: К контрпримеру и его исправлению

Замечание. Приведённое рассуждение не является строгим, поскольку

• каждое из указанных неравенств неверно, например, для графа, указанного на рис. 16 слева, и

слова «посчитано», «граница грани состоит», «количество рёбер, ограничивающих грань» не имеют строгого смысла.

Однако это рассуждение формализуется методом *подсчёта двумя способами.*

Доказательство. Поставим около каждого ребра плоского графа две стрелки в две грани, примыкающие к ребру (даже если эти грани совпадают, стрелок две). Тогда число стрелок (иными словами, «гранерёбер») равно $2E$. В границе каждой грани не менее трех стрелок (этот факт мы не доказываем аккуратно). Поэтому $2E \geqslant 3F$.

(d) $V - E + F = 1 + c$.

2.4.5. (b) Следует из равенств $2E = dV$, $2E = kF$ и формулы Эйлера.

(c) Возьмем граф, состоящий из цикла 1234 и висячих ребер $11', 22', 33', 44'$.

(d) Ответ: отрезок, цикл C_n произвольной длины n и 5 графов правильных многогранников. [CR, стр. 266].

2.4.6. (b) Сложность экспоненциальная.

2.4.7. Смотри! (Рис. 17.)

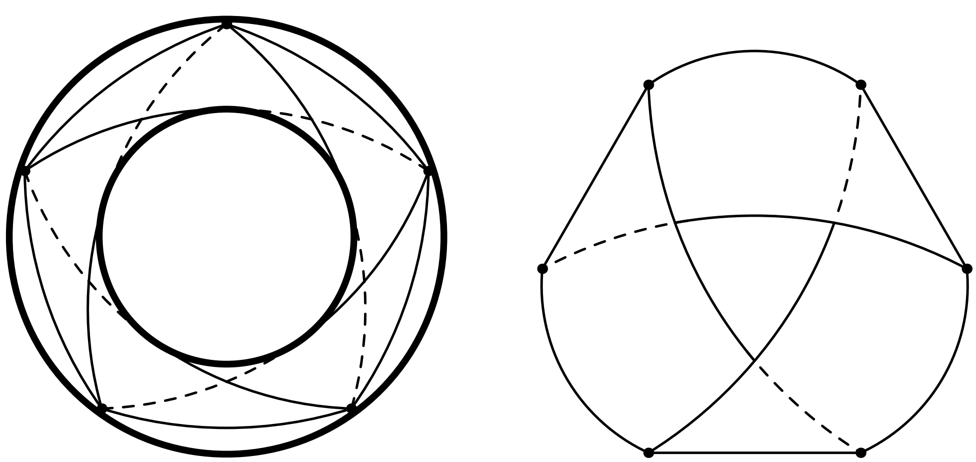

Рис. 17: Реализация графов Куратовского

удалено ребро, соединяющее две из вершин x, y, z, то в мультиграфе G_a меньше рёбер, чем в G. Значит, в G_a есть тройка $a - b'$ путей.

Аналогично определяем мультиграф G_b и находим в нём тройку $a' - b$ путей. Построенные шесть путей дают тройку $a - b$ путей в G.

2.8.6. Утверждение задачи вытекает из следующего факта.

Утверждение. Вершины A и B графа назовем *эквивалентными*, если существуют такие вершины $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$, что любые две соседние вершины A_i и A_{i+1} можно соединить k путями, не имеющими общих рёбер. Любые две эквивалентные вершины можно соединить k путями, не имеющими общих рёбер.

Доказательство утверждения. Если удалить любые $k - 1$ рёбер, то для любого i вершины A_i и A_{i+1} окажутся в одной компоненте связности. Значит, вершины A_0 и A_n также окажутся в одной компоненте связности. Остается применить рёберную теорему Менгера. $\square$

2.10.1. (a) Следует из того, что цепь и антицепь могут пересекаться не более чем по одному элементу.

2.11.1. (a) *Ответ*: такой граф существует при $(V, E) = (2k, 3k)$ для произвольного целого $k > 1$.

Рассмотрим произвольный кубический граф: каждая его вершина имеет степень 3. Сумма степеней всех вершин есть $2E$. Поэтому $3V = 2E$. Тогда пары чисел (V, E) имеют вид $(2k, 3k)$ для некоторого натурального k. Так как нет петель и кратных ребер, то $k = 1$ невозможно.

При $k > 1$ условию удовлетворяют, например, $2k$-угольник с проведенными в нем диагоналями, соединяющими i-тые и $(i + k)$-тые вершины.

(b) *Ответ*: такой граф существует при $d \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ и dn четном.

Для доказательства достаточности расположим вершины графа в вершинах правильного n-угольника. Соединим ребрами вершины, расстояние между которыми по окружности не превосходит $d/2$. Для четного d построение графа закончено. Для нечетного d число n четно, поэтому можно и нужно добавить большие диагонали.

2.11.3. (b) *Доказательство (написано А. Руховичем).* Необходимость целочисленности e вытекает из того, что e равно числу ребер в графе. Второе условие необходимо, поскольку в графе нет петель, а значит степень каждой вершины не больше суммы степеней остальных вершин.

Докажем достаточность индукцией по e. База индукции: утверждение для $e = 0$ очевидно. Докажем шаг индукции. Пусть утверждение для $e < k$. Докажем, что оно верно и для $e = k \geqslant 1$. Из $k \geqslant 1$ и условия $d_i \leqslant e$ следует, что найдутся хотя бы две вершины ненулевой степени. Можно считать, что $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$. Рассмотрим набор $d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, \ldots, d_n$. Условия теоремы для него выполнены, поскольку сумма степеней вершин уменьшилась на 2, а степень каждой вершины понизилась не более, чем на 1. Поэтому можно воспользоваться предположением индукции: существует граф для набора $d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, \ldots, d_n$. В этом графе соединим ребром вершины 1 и 2. Поскольку эти вершины различны, то петель не появилось. Следовательно, новый граф не содержит петель. Ясно, что набор степеней его вершин — $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$.

2.11.4. *Ответы:* (a,c) да. (b,d,e) нет.

2.11.7. (b) Возьмем граф, реализующий исходную последовательность. Если в нем вершина M наибольшей степени и вершина O наименьшей степени соединены ребром, то удалим это ребро. Иначе имеется ребро OX с $X \neq M$.

Пусть X не соединена с M. Тогда среди вершин, соединенных с M, есть вершина N, не соединенная с X. Добавим ребро NX и удалим ребра MN и OX.

Рассмотрите самостоятельно случай, когда X соединена с M.

2.11.9 и 2.11.10. См. п. 2.12.

2.11.11. (a,b) *Ответы:* то же, что в соответствующих пунктах задачи 2.11.3, с добавлением условия $n - 1 \leqslant e$.

Доказательство п. (b) (предложено А. Руховичем). Для доказательства необходимости обозначим через e количество ребер в графе. Необходимость условий (1), (2) и (3) (т.е. четности, условия на степень и на число ребер) легко проверяется.

Для доказательства достаточности рассмотрим граф, полученный по ответу к задаче 2.11.3.b. Обозначим через c количество компонент связности этого графа.

Докажем, что если $c > 1$, то можно уменьшить количество компонент связности, не меняя степеней вершин. Из условия (3) получаем $e \geqslant n - 1 > n - c$. Поэтому хотя бы в одной компоненте связности есть цикл. Тогда можно взять ребро a_1a_2 этого цикла и ребро b_1b_2 из другой компоненты связности. Удалим эти ребра, и вместо них добавим ребра a_1b_1 и a_2b_2 (ср. с задачей 2.11.8). Тогда степени вершин сохранятся, а количество компонент связности уменьшится на 1.

Такими операциями можно понизить количество компонент связности до 1. Получится связный граф без петель с заданными степенями вершин.

3 Раскраски графов и многочлены

3.1 Раскраски графов

Раскраска графа (т.е. вершин графа) в несколько цветов называется *правильной*, если концы любого ребра окрашены в разные цвета. В этом параграфе «раскраска в t цветов» означает «раскраска в не более, чем в t цветов».

3.1.1. Следующие три условия эквивалентны:
- граф двудолен;
- граф можно правильно раскрасить в 2 цвета;
- граф содержит циклы только чётной длины.

3.1.2. (a) Если в графе степень каждой вершины не превосходит d, то его можно правильно раскрасить в $d+1$ цвет.
(b) Если в связном графе степень каждой вершины не превосходит d и есть вершина степени менее d, то его можно правильно раскрасить в d цветов.
(c) Если в связном графе степень каждой вершины не превосходит d, и есть вершина, после удаления которой граф перестает быть связным, то граф можно правильно раскрасить в d цветов.
(d) Если связный граф G, имеющий более двух вершин, при удалении некоторого ребра распадается на два графа, каждый из которых можно правильно раскрасить в d цветов, то и исходный граф можно правильно раскрасить в d цветов.

3.1.3. Если для некоторого k в графе с n вершинами среди любых $k+1$ вершин есть две, соединенные ребром, то граф невозможно правильно покрасить менее, чем в n/k цветов.

3.1.4. В выпуклом многоугольнике провели несколько диагоналей, не имеющих общих внутренних точек. Полученный плоский граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.

3.1.5. (a) В связном графе степень каждой вершины не превосходит трёх. Известно, что его можно правильно раскрасить в 3 цвета так, чтобы соседи некоторой вершины были одного цвета. Добавили

одну вершину и выходящие из нее рёбра так, что по-прежнему степени всех вершин не превосходят трёх. Докажите, что полученный граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.
(b) В связном графе степень каждой вершины не превосходит трёх. Известно, что его можно правильно раскрасить в 3 цвета и при любой такой раскраске у каждой вершины есть разноцветные соседи. Добавили одну вершину и выходящие из нее рёбра так, что по-прежнему степени всех вершин не превосходят трёх и полученный граф отличен от K_4. Докажите, что полученный граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.
(c) *Теорема Брукса.* Пусть $d \geqslant 3$. Если степень каждой вершины графа не превосходит d и нет $(d+1)$-клики, то граф можно правильно раскрасить в d цветов.

3.1.6. Натуральные числа $d, k, d_1, \ldots, d_k$ таковы, что $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = d + 1 - k$. Степень любой вершины графа не превосходит d. Докажите, что вершины можно разбить на k групп так, что любая вершина i-й группы соединена не более чем с d_i вершинами своей группы.

3.1.7. Трем смышлёным девочкам Ире, Тане и Юле выдали по копии одного и того же графа. Юля и Таня раскрасили свои графы правильно. Юля использовала меньше цветов, чем Таня, зато у Тани в каждый цвет покрашено не менее двух вершин. Докажите, что Ира может правильно раскрасить свой граф, использовав не больше цветов, чем Юля, и чтобы в каждый цвет было покрашено не менее двух вершин.

3.1.8. (a) Если граф невозможно правильно раскрасить в $k-1$ цвет, то для любой его правильной раскраски в k цветов существует путь, в котором встречается ровно по одной вершине каждого цвета.
(b) Если максимальный из путей в графе, проходящих по каждой своей вершине только один раз, проходит через d вершин, то граф можно правильно раскрасить в d цветов.
(c) Если максимальный нечётный несамопересекающийся цикл в графе проходит через $d-1$ вершину, то граф можно правильно раскрасить в d цветов.

3.1.9. Ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более d рёбер, можно правильно раскрасить в $2d+1$ цвет.

3.1.10. Имеется несколько цветов. Каждой вершине двудольного графа с $n \leqslant 2^{k-1}$ вершинами сопоставлено не менее, чем k цветов. («Списки» цветов, сопоставленные разным вершинам, могут быть и одинаковыми, и различными.) Тогда существует правильная раскраска графа, приписывающая каждой вершине некоторый сопоставленный ей цвет.

Раскраска рёбер графа называется *правильной*, если любые два ребра, имеющие общую вершину, были окрашены в разные цвета.

3.1.11. (a) *Теорема Визинга.* Если степень каждой вершины графа не превосходит d, то *рёбра* графа можно правильно раскрасить в $d+1$ цвет.

(b) Существует такая раскраска *рёбер* графа $K_{m,n}$ в два цвета, что число одноцветных подграфов $K_{a,b}$ не больше $\binom{m}{a}\binom{n}{b}2^{1-ab}$.

3.2 Хроматические число и индекс

Хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называется минимальное количество цветов, в которые можно правильно покрасить вершины графа G.

3.2.1. Если при удалении из графа любой вершины хроматическое число уменьшается, то $\chi(G) \leqslant 1+[2e/n]$.

3.2.2. (a) На какое число может измениться хроматическое число графа, если добавить к графу одно ребро? Или, формально, найдите все целые k, для которых существует граф G и его ребро u такие, что $\chi(G)-\chi(G-u)=k$.

(b) $\chi(V,E_1 \cup E_2) \leqslant \chi(V,E_1)\chi(V,E_2)$. (Напомним, см. §2.1, что через (V,E) обозначается граф со множеством вершин V и множеством ребер E.)

(c) Для любых целых $r_1,r_2>0$ постройте такие графы (V,E_1) и (V,E_2), что $\chi(V,E_1 \cup E_2)=\chi(V,E_1)\chi(V,E_2)$, $\chi(V,E_1)=r_1$ и $\chi(V,E_2)=r_2$.

3.2.3. Следующий алгоритм раскраски вершин графа называется *жадным.* Сначала все вершины произвольно нумеруются. После этого последовательно каждую вершину, начиная с первой, красим в цвет с минимальным номером, отсутствующим среди уже покрашенных соседей этой вершины.

(a) Вершины произвольного графа G можно занумеровать так, чтобы жадный алгоритм его раскраски использовал ровно $\chi(G)$ цветов.

(b) Для каждого целого $k > 0$ постройте такие двудольный граф и нумерацию его вершин, что раскраска графа, построенная жадным алгоритмом, отвечающим построенной нумерации, имеет не менее k цветов.

Эта задача показывает, что «качество» раскраски, построенной жадным алгоритмом, сильно зависит от упорядочения вершин.

Раскраска рёбер графа называется *правильной*, если любые два ребра, имеющие общую вершину, окрашены в разные цвета. *Хроматический индекс* графа — минимальное число цветов, в которые можно правильно раскрасить рёбра этого графа.

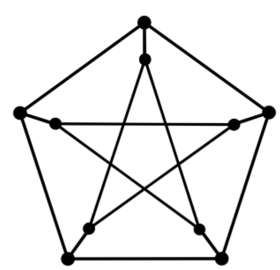

Рис. 18: Граф Петерсена

3.2.4. Исследуйте на планарность (§2.4), найдите хроматическое число и хроматический индекс графов:

(a) *графа Петерсена*, изображённого на рисунке 18;

(b) графов с рисунка 19.

5 Системы множеств (гиперграфы)

5.1 Пересечения подмножеств

Когда речь идет о множестве подмножеств, употребляют синонимы «система», «семейство» или «набор» подмножеств.

5.1.1. В любом семействе попарно пересекающихся подмножеств n-элементного множества не более 2^{n-1} подмножеств.

5.1.2. Пусть $2 \leqslant t \leqslant n-2$.
(a) Постройте семейство из 2^{n-t} подмножеств n-элементного множества, любые два из которых пересекаются не менее, чем по t элементам.
(b) Существует ли такое семейство из $2^{n-t}+1$ подмножеств?

5.1.3. *Теорема Эрдеша—Ко—Радо.* Пусть $\mathcal{F}$ — любое семейство k-элементных подмножеств n-элементного множества.
(a) Если $2k \leqslant n$ и любые два подмножества из $\mathcal{F}$ пересекаются, то $|\mathcal{F}| \leqslant \dbinom{n-1}{k-1}$.
(b) Если $2k \geqslant n$ и объединение никаких двух подмножеств из $\mathcal{F}$ не есть все n-элементное множество, то $|\mathcal{F}| \leqslant \dbinom{n-1}{k}$.
(c) Если $n, k \geqslant t$, то существует $\binom{n-t}{k-t}$ подмножеств n-элементного множества, в каждом из которых ровно k элементов и любые два из которых пересекаются не менее чем по t элементам.

5.1.4. (a) Любое семейство из двадцати 5-элементных подмножеств 15-элементного множества можно так разбить на 6 подсемейств, чтобы любые два непересекающихся подмножества лежали бы в разных подсемействах.

Замечание. В таких ситуациях (см. п. 7.1) обычно вместо разбиении на подсемейства говорят о раскраске в разные цвета. Тогда вопреки наглядному представлению о раскраске красятся множества, но при этом не красятся их элементы.

(b) На кружок пришло 20 школьников. Каждой (неупорядоченной) пятерке из них нужно дать одну из 12 задач по комбинаторике.

(Задачу получает именно пятерка, а не школьник.) Как это сделать, чтобы непересекающиеся пятерки получили разные задачи?

(c) В условиях п. (b) 11 задач недостаточно.

5.1.5. Для $l < k$ обозначим через $M(n,k,l)$ минимальное количество таких k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, что любое l-элементное подмножество множества $\mathcal{R}_n$ целиком содержится хотя бы в одном из них. Например, задача 1.5.2.a утверждает, что $M(n,k,l) \geqslant \binom{n}{l}/\binom{k}{l}$.

(a) Найдите $M(n,k,1)$.

(b) Найдите $M(6k+3,3,2)$.

(c)* Найдите $M(n,3,2)$.

(d) Докажите, что $M(n,k,l) \geqslant nM(n-1,k-1,l-1)/k$.

5.1.6. Существует k подмножеств R-элементного множества по n элементов в каждом, никакие два из которых имеют не более s общих элементов, для

(a) $k = 2^a = R$, $n = 2^{a-1}$, $s = 2^{a-2}$;

(b) $k = 60$, $R = 1600$, $n = 80$, $s = 4$;

(c) p простое, $k = p^2 + p$, $R = ps^2$, $n = ps$.

Ср. с п. 5.7 и 7.1.

5.2 Системы общих представителей

5.2.1. В группе студентов Яндекса 20 человек. Из них ровно 5 человек — специалисты по поиску в интернете, 5 — по борьбе со спамом и т.д., всего 18 проблем (так что, очевидно, некоторые студенты являются специалистами по разным проблемам). Требуется составить из этих студентов сильную команду разработчиков. При этом хочется, чтобы для каждой проблемы в команде нашелся специалист по ней и чтобы размер команды был как можно меньше (для экономии зарплаты).

(a) При любом раскладе получится набрать такую команду из семи человек.

(b) При некотором раскладе не получится набрать такую команду из пяти человек.

5.7 Лемма Виссера и теоремы о возвращении

5.7.1. В парламенте из 100 000 депутатов образовано k комиссий по 2 000 человек в каждой.

(a) Если $k \geqslant 100$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 21 общего члена.

(b) Если $k \geqslant 5\,000$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 29 общих членов.

(c) Если $k \geqslant 250\,000$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 32 общих члена.

(d) Если $k \geqslant 2 \cdot 50^{30}$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 40 общих членов.

Подмножество отрезка $[0,1]$ называется *хорошим*, если оно является объединением конечного количества попарно непересекающихся интервалов. *Длиной* $|E|$ хорошего множества E называется сумма длин его интервалов.

5.7.2. (a) Пересечение и объединение хороших множеств — хорошее множество.

(b) Если $E_1, \ldots, E_k$ — попарно непересекающиеся хорошие множества длины $1/k$ каждое и E_0 — хорошее множество длины $1/k$, то $|E_0 \cap E_j| \geqslant 1/k^2$ для некоторого $j \geqslant 1$.

(c) Придумайте пример бесконечного семейства хороших множеств длины $1/2$ каждое, длина пересечения любых двух из которых не превосходит $1/4$.

(d) То же для длины $1/k$ и длины пересечения не более $1/k^2$.

5.7.3. (a) Если дана бесконечная последовательность хороших множеств длины $m \in \mathbb{R}$ каждое, то длина пересечения некоторых двух из них не меньше $m^2/2$.

(b) *Лемма Виссера.* То же для $0,99m^2$.

(Задача 5.7.2 поясняет роль множителей 0,99 и m^2.)

(c)* Для любого r при предположениях п. (a) найдутся r множеств с длиной пересечения более $0,99m^r$.

Пусть заданы числа $0 = \alpha_0 < \ldots < \alpha_{k-1} < \alpha_k = 1$. *Перекладыванием отрезков* называется отображение $f\colon [0,1) \to [0,1)$, определенное некоторой перестановкой отрезков $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$. Более аккуратно, возьмем перестановку $\sigma : [k] \to [k]$. Для любых $j \leqslant k$ и $x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ определим $f(x) := x - \alpha_{j-1} + \sum\limits_{i\in[k]\ :\ \sigma(i)<\sigma(j)} (\alpha_i - \alpha_{i-1})$.

Через f^n обозначим n-ю итерацию отображения $f\colon [0,1) \to [0,1)$: $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n раз).

5.7.4. (a) (Загадка) Найдите n-ю итерацию нетривиального перекладывания двух отрезков, если дано α_1.

(b) Если длины всех отрезков рациональны, то некоторая итерация перекладывания отрезков — тождественное отображение.

(c) Придумайте перекладывание отрезков, один из которых имеет иррациональную длину, причем квадрат перекладывания — тождественное отображение.

(d) Придумайте перекладывание отрезков, никакая итерация которого не является тождественным отображением.

5.7.5. Пусть $E \subset [0,1)$ — хорошее непустое множество и f — перекладывание отрезков.

(a) Множество $f(E)$ хорошее.

(b) *Теорема Пуанкаре-Каратеодори о возвращении множеств.* Существует сколь угодно большое n, для которого $|E \cap f^n(E)| > 0$.

(c) *Теорема Хинчина о возвращении множеств.* Существует сколь угодно большое n, для которого $|E \cap f^n(E)| \geqslant 0,99|E|^2$.

(d) Число n из п. (b,c) найдется на любом достаточно большом интервале (т.е. существует такое L, что для любого целого M число n из п. (b,c) найдется среди чисел $M, M+1, \ldots, M+L$).

(e) *Теорема о многократном возвращении.* При любом целом $r > 0$ существуют сколь угодно большие $n_1, \ldots, n_r$, для которых $|f^{n_1}(E) \cap f^{n_2}(E) \cap \ldots \cap f^{n_r}(E)| > 0$.

(f) *Теорема о многократном возвращении.* При любом целом $r > 0$ существуют сколь угодно большие $n_1, \ldots, n_r$, для которых $|f^{n_1}(E) \cap f^{n_2}(E) \cap \ldots \cap f^{n_r}(E)| \geqslant 0,99|E|^r$.

5.7.6. Назовем *хорошим* объединение конечного количества многоугольников (лежащих на одной плоскости) без границы с непересекающимися внутренностями. Сформулируйте и докажите аналоги

(a) теоремы Пуанкаре-Каратеодори; (b) теоремы Хинчина

для взаимно-однозначного отображения единичного квадрата в себя, сохраняющего хорошие подмножества и их площади.

Ср. с п. 5.1 и 7.1.

5.8 Структуры на конечном множестве

Ранее рассмотрены некоторые классические комбинаторные задачи 1.1.1, 1.1.2, 1.1.4, 1.4.3.b, 1.4.4, 1.4.5, 7.3.5, 1.4.7.efg. В этом пункте мы поясним связь между различными объектами, возникающими в этих задачах.

Алгеброй на множестве $[n]$ называется семейство его подмножеств, которое вместе с любыми подмножествами A и B содержит также их объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и дополнение $\overline{A} := [n] - A$.

Например, $2^{[n]}$ — алгебра на $[n]$, а $\{\varnothing, [3]\}$ и $\{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, [3]\}$ — алгебры на $[3]$.

5.8.1. (a) Найдите все алгебры на $[n]$ для $n = 1, 2, 3$.

(b) Количество элементов произвольной алгебры есть степень двойки.

(c) Количество алгебр на $[n]$ равно количеству разбиений множества $[n]$. (*Разбиением* (неупорядоченным) множества $[n]$ называется неупорядоченный набор $\{X_1, X_2, \dots X_k\}$ подмножеств $X_i \subset [n]$, для которого $[n] = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$ при любых $i \neq j$.)

(d) (Загадка) Найдите рекуррентную формулу для числа $N_A(n)$ всех алгебр на $[n]$ (*числа Белла*).

Базисом алгебры называется наименьшее (по включению) её подсемейство $\{X_1, \dots, X_k\}$ такое, что любой элемент алгебры можно выразить через $X_1 \dots X_k$ с помощью операций пересечения, объединения и дополнения. Задача 1.4.2.a равносильна нахождению наименьшего числа множеств в базисе алгебры $2^{[n]}$.

5.8.2. Существует алгебра и два ее базиса, в которых разное число множеств.

Линейным пространством на множестве $[n]$ называется семейство его подмножеств, которое вместе с любыми подмножествами A и B содержит также их симметрическую разность $A \oplus B$. Например, любая алгебра является линейным пространством;

$$\{\varnothing\}, \quad \{\varnothing, [2]\}, \quad \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, [2]\} \quad \text{и} \quad \{\varnothing, \{1, 3\}, \{2, 3\}, [2]\}$$

— линейные пространства на [3]. Определение *базиса* линейного пространства аналогично случаю алгебр. Линейные пространства изучаются в задачах 1.4.4, 7.3.5, 1.4.7.efg и 6.1.12.a (на другом языке).

Топологией на множестве $[n]$ называется семейство его подмножеств, которое содержит $\varnothing$, $[n]$ и вместе с любыми подмножествами A и B содержит также $A\cap B$, $A\cup B$. Например, любая алгебра является топологией;

$$\{\varnothing,\{1\},[3]\}\quad \text{и}\quad \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,3\},[3]\}$$

— топологии на [3].

5.8.3. (a) Найдите все топологии на $[n]$ для $n=1,2,3$.

(b) Любая ли топология является линейным пространством? Можно ли симметрическую разность выразить через пересечение и объединение?

Решение задачи 5.8.3.a показывает, что существует топология, число подмножеств в которой не является степенью двойки. Найти количество топологий на $[n]$ — нерешенная задача.

Определение *базиса* топологии аналогично случаю алгебр.

5.8.4. (a) Существует топология и два ее базиса, в которых разное число множеств.

(b) Найдите наименьшее число множеств в базисе топологии $2^{[n]}$.

(c) Для каждого n найдите наибольший (по все топологиям на $[n]$) минимальный размер базиса топологии.

5.8.5. *Цепью топологий* называется последовательность различных топологий

$$\{\varnothing,[n]\}=T_0\subset T_1\subset T_2\ldots\subset T_k=2^{[n]},$$

между любыми двумя соседними членами которой нельзя вставить ещё одну топологию (т.е. для любого i не существует топологии T, для которой $T_i\subsetneq T\subsetneq T_{i+1}$). Аналогично определяются *цепи* алгебр и линейных пространств.

(a) Все цепи алгебр (линейных пространств) на $[n]$ имеют одинаковую длину (какую?).

(b) Приведите пример цепей топологий различной длины.

(c)* Найдите наибольшую длину цепи топологий на $[n]$.

(d) Найдите наименьшую длину цепи топологий на $[n]$.

5.8.6. (a) Найдите максимальное количество линейных пространств на $[n]$, ни одно из которых не содержится (собственно) в другом.

(Это число называется *шириной* $W_L(n)$ семейства всех линейных пространств на $[n]$.)

(b)* $W_L(2n) \sim C \cdot 2^{n^2}$ для некоторого числа C.

(c) Найдите максимальное количество алгебр на $[n]$, ни одна из которых не содержится в другой.

По-видимому, найти максимальное количество топологий на $[n]$, ни одна из которых не содержится в другой — нерешенная задача.

Нарисуем все алгебры («на $[n]$» — эти слова мы дальше опускаем). Проведем стрелку от алгебры A к алгебре B, если $A \subsetneq B$ и между ними нельзя вставить никакую другую алгебру. Полученный граф называют *решёткой алгебр.*

Разбиение $H = H_0 \sqcup H_1 \sqcup \ldots \sqcup H_m$ множества всех алгебр называется *разбиением на этажи*, если для любых двух соединенных стрелкой алгебр $A \subset B$ номер этажа алгебры A на единицу меньше номера этажа алгебры B. Ясно, что решётка алгебр допускает разбиение на этажи. (Какие алгебры находятся на k-м этаже?)

Аналогично случаю алгебр вводятся понятия *решётки линейных пространств* и ее *разбиения на этажи.* Ясно, что решётка линейных пространств допускает разбиение на этажи. (Какие линейные пространства находятся на k-м этаже?)

Аналогично случаю алгебр вводятся понятия *решётки топологий* и ее *разбиения на этажи.* Но решётка топологий не допускает разбиения на этажи.

Базой на множестве $[n]$ называется семейство его подмножеств, которое содержит $[n]$ и вместе с любыми подмножествами A и B содержит также $A \cap B$. Примеры баз: любая топология; $\{[2], \{2, 3\}, \{2\}, [4]\}$ — база на $[4]$. См. задачу 1.4.5 о наименьшем базисе базы $2^{[n]}$.

Вообще, *структурой* на множестве, соответствующей заданному набору операций, называется семейство его подмножеств, замкнутое относительно этого набора операций. Например, если за-

6 Аналитические и вероятностные методы

6.1 Асимптотики

Если не оговорено противное, то o, O (рукописные обозначения: $\overline{o}$, $\underline{O}$), асимптотики и пределы рассматриваются при $n \to \infty$. Запись $f(n) \ll g(n)$ означает, что $f(n) = o(g(n))$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$. Запись $f(n) \gtrsim g(n)$ означает, что $f(n) > (1+o(1))g(n)$.

Найти асимптотику для функции $f(n)$ означает найти «явную» функцию $a(n)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{a(n)} = 1$.

6.1.1. Найдите асимптотику для

(a,b,c) сумм из задачи 1.1.6;

(d) количества A_n подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, не содержащих двух подряд идущих чисел;

(e)* То же, что в (d), для *трёх* подряд идущих чисел.

В ответе можно использовать функцию $x_P(a, b)$, которая по числам a, b и многочлену P, имеющему единственный корень на отрезке $[a, b]$, выдает этот корень.

6.1.2. Найдите асимптотику наибольшего количества рёбер в графе с n вершинами, не содержащем k-клики. Здесь $k = k_n = o(n)$.

6.1.3. Докажите следующие соотношения, предполагая в асимптотиках, что $n \to \infty$, а k фиксировано. (Число $\mathrm{ex}_H(n)$ определено в задаче 2.7.6.)

(a) $\mathrm{ex}_{P_k}(n) \gtrsim \frac{k-2}{2}n$. (b) $\mathrm{ex}_{C_{2k+1}}(n) \gtrsim \frac{n^2}{4}$. (c) $\mathrm{ex}_{K_{1,k}}(n) \sim \frac{k-1}{2}n$.

Замечание. Знаменитая теорема Эрдеша-Стоуна-Шимоновича утверждает, что для любого фиксированного H такого, что $\chi(H) > 2$, при $n \to \infty$ выполнено $\mathrm{ex}_H(n) \sim \dfrac{n^2}{2}\dfrac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$. (Для двудольных H известно лишь, что $\mathrm{ex}_H(n) = o(n^2)$.) То есть, если мы запрещаем графу иметь некоторый фиксированный подграф H, то доля рёбер, которые при этом можно провести, среди всевозможных рёбер определяется хроматическим числом графа H. Удивительно, что хроматическое число возникает в этой задаче! Доказательство теоремы можно прочесть по ссылке [1]. (Этой теоремой нельзя пользоваться при решении задачи 6.1.3.b.)

6.1.4. (a) $n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^n=(2+o(1))^n$. По определению, это означает, что существует функция $\psi(n)=o(1)$, для которой $n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^n=(2+\psi(n))^n$; или, что то же самое, $\sqrt[n]{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}-2=o(1)$.

(b) $3^{\sqrt{n}}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n=(2+o(1))^n$.

6.1.5. (a) Найдите асимптотику для $\sqrt[n]{\binom{n}{[n/2]}}$ (ср. с задачами 1.4.3.b и 6.1.10.b).

(b) $\dfrac{2^n}{n+1}<\dbinom{n}{[n/2]}<2^n$.

(c) Найдите асимптотику для $\sqrt[m]{\binom{3m}{m}}$.

(d) $\dfrac{3^{3m}}{3m+1}<2^{2m}\dbinom{3m}{m}<3^{3m}$.

(e) $\dbinom{n}{[an]}=(a^{-a}(1-a)^{a-1}+o(1))^n$ для любого $a\in(0,1)$.

(f) $\dfrac{n!}{[a_1n]!\ldots[a_sn]!}=(e^{-a_1\ln a_1-\ldots-a_s\ln a_s}+o(1))^n$ для любых $a_k\in(0,1)$, $a_1+\ldots+a_s=1$.

6.1.6. (a) Найдите асимптотику для $\ln(n!)$.

(b) Найдите асимптотику для $\sqrt[n]{n!}$.

(c) $n^ne^{-n+1}\leqslant n!\leqslant n^{n+1}e^{-n+1}$;

(d) $n!\leqslant n^ne^{-n+1}\sqrt{n}$.

(e)* *Формула Стирлинга.* $n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}}=1$.

6.1.7. (a) $\dbinom{n}{k}<\dfrac{n^k}{k!}$.

(b) $\ln\dfrac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k}=-\dfrac{k(k+1)}{2n}\left(1+O\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$ для $k=k_n<n/2$. Это означает, что существует функция $\psi(n)=O\left(\frac{k}{n}\right)$, для

которой $\ln\dfrac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n^k} = -\dfrac{k(k+1)}{2n}(1+\psi(n))$; или, что то же самое, $-1-\dfrac{2n}{k(k+1)}\ln\dfrac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n^k} = O\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

(c) $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n^k}{k!}e^{-\frac{k(k-1)}{2n}+O(k^3/n^2)}$ для $k=k_n<n/2$.

(Сформулируйте сами, что здесь означает $e^{-\frac{k(k-1)}{2n}+O(k^3/n^2)}$.)

(d) $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$ для $k=k_n=o(\sqrt{n})$.

Неформально, это означает, что для $k \ll \sqrt{n}$ вероятность выпадения ровно k орлов при n подбрасываниях монеты приближенно равна $\dfrac{n^k}{k!}2^{-n}$. В неформальном замечании к этому и следующему пунктам достаточно интуитивного понимания того, что такое вероятность.

(e) $\dbinom{2n}{n-k}\Big/\dbinom{2n}{n} = e^{-\frac{k^2}{n}(1+o(1))}$ для $k=k_n=o(n)$.

(Сформулируйте сами, что здесь означает $e^{-\frac{k^2}{n}(1+o(1))}$.)

Неформально, это означает, что для $k \ll n$ вероятность P_k выпадения ровно $n-k$ орлов при $2n$ подбрасываниях монеты приближенно равна $P_0e^{-k^2/n}$ (*нормальное распределение*).

6.1.8. (a) Верно ли, что записи $e^{o(n)}$ и $o\left(e^n\right)$ «равнозначны»? т. е., верно ли, что для любой функции $f:\mathbb{Z}\to(0,+\infty)$ условия $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln f(n)}{n}=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)e^{-n}=0$ равносильны?

(b) Подберите функции $f,g:\mathbb{Z}\to(0,+\infty)$ такие, что $f(n)\sim g(n)$, но $e^{f(n)}\neq O(e^{g(n)})$.

(c) Могут ли функции $f,g:\mathbb{Z}\to(0,+\infty)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(n)=o(g(n))$ и $g(n)=o(f(n))$?

(d) Могут ли функции $f,g:\mathbb{Z}\to(0,+\infty)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(n)=O(g(n))$ и $g(n)=O(f(n))$?

(e) Следует ли из двух соотношений из (d), что $f(n)\sim g(n)$?

6.1.9. (a) Какая функция растет быстрее: $x^{(x^x)}$ или $(x!)^{(2^x)}$? т. е. найдите $\lim\limits_{x\to\infty} x^{(x^x)}(x!)^{(-2^x)}$.

(b) Существует ли функция $\psi(n) = o(1)$, для которой $(2+\psi(n))^n 2^{-n} e^{-\sqrt{n}} \to \infty$?
(Как в любой математической задаче, нужно обосновать ответ: привести пример такой функции или доказать её существование или доказать, что такой функции не существует.)

В задачах 6.1.10.(b)-(g), в отличие от остальных, можно пользоваться без доказательства *формулой Стирлинга* 6.1.6.e.

6.1.10. Найдите асимптотику для

(a) $\ln\dbinom{n^2}{n}$; (b) $\dbinom{n}{[n/2]}$; (c) $\dbinom{n^2}{n}$;

(d)* $\dbinom{n}{[n^\alpha]}$, $\alpha \in (0,1)$; (e) $(2n-1)!! := (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot1$;

(f) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}^2$; (g)* $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}^4$.

6.1.11. Найдите асимптотику функции $s = s(n)$, заданной как
(a) $s^s = n$;
(b) $s^{s^3} = n$;
(c) $s(n) := \max\{k \mid k! \leqslant n\}$;
(d) $s(n) := \min\left\{m \in \mathbb{Z} \ \middle|\ m > 0,\ \binom{n}{m} < 2^{\binom{m}{2}}\right\}$;
(e) $s(n) := \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m > 0,\ 2^m/m > n\}$ (функция $2^m/m$ возникает как сложность реализации функций алгебры логики);
(f) $s(n) := \min\left\{m \in \mathbb{Z} \ \middle|\ m > 0,\ \binom{m}{[m/2]} > n\right\}$ (ср. с задачей 1.4.3.b).

6.1.12.* В ответах можно использовать константы, заданные в виде суммы рядов. Найдите асимптотику для
(a) количества линейных подпространств в $\mathbb{Z}_2^n$ (см. задачу 1.4.7 и определение перед ней);
(b) количества унициклических графов с n вершинами (см. задачу 2.2.5.b и определение перед ней).

подмножество тех раскрасок, для которых α одноцветно. Тогда для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \subset [400] - [8]$ подмножество $A_{[8]}$ не зависит от пересечения $A_{\alpha_1} \cap \ldots \cap A_{\alpha_n}$.

Подробнее о независимости см. [KZP].

Лемма Ловаса

Приведем задачи, которые подведут нас к лемме Ловаса 6.2.15.

6.2.12. (a) В городе доля богатых горожан больше $2/3$, доля здоровых больше $2/3$ и доля умных больше $2/3$. Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин?

(b) В городе доля богатых горожан больше $3/4$, доля здоровых больше $3/4$ и доля умных больше $3/4$. Обязательно ли среди здоровых умных большинство богаты?

(c) В городе есть богатый горожанин, есть здоровый горожанин и есть умный горожанин. Богатство, здоровье и ум попарно независимы (т.е., например, доля богатых здоровых среди богатых такая же, как и доля здоровых среди всех жителей). Доля богатых здоровых умных среди богатых здоровых такая же, как и доля умных среди всех жителей. (Вместе с условием попарной независимости последнее условие называется *независимостью в совокупности.*) Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин?

(d) Тот же вопрос, если в городе богатых горожан больше половины, здоровых больше половины, умных больше половины, богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы.

(e) В городе доля богатых горожан больше $2/3$, доля здоровых больше $2/3$ и доля умных больше $2/3$. Богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы. Может ли доля богатых здоровых умных быть меньше $1/5$?

(f) В городе доля богатых горожан больше $5/8$, доля здоровых больше $5/8$ и доля умных больше $5/8$. Богатство и здоровье независимы. Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин?

Задача 6.2.12 показывает, что чем сильнее условие, характеризующее независимость нескольких множеств, тем меньшей доли каждого множества достаточно, чтобы гарантировать непустоту пересечения. Причем наиболее интересные результаты (6.2.12.def) получаются «посередине» между крайними условиями — полного отсутствия независимости (6.2.12.ab) и независимости в совокупности (6.2.12.c). Так часто бывает: наиболее полезные соображения находятся между «крайними» точками зрения.

Для леммы Ловаса нужно еще более «хитрое» условие независимости на несколько множеств, чем рассмотренные ранее.

6.2.13. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше 3/4.

(a) Пусть A_1 независимо с $A_3 \cap A_4$. Тогда $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| > \frac{1}{2}|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

(b) Пусть A_1 независимо с $A_3 \cap A_4 \cap A_5$. Тогда $|A_1 \cap \ldots \cap A_5| > \frac{5}{6}|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$.

(c) Пусть A_k независимо с $A_{k+2} \cap \ldots \cap A_n$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-3$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

6.2.14. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше 7/8.

(a) Тогда $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| > \frac{4}{5}|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

(b) Пусть A_1 независимо с $A_4 \cap A_5$. Тогда $|A_1 \cap \ldots \cap A_5| > \frac{13}{16}|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$.

(c) Пусть A_k независимо с $A_{k+3} \cap \ldots \cap A_n$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-4$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

6.2.15. Локальная лемма Ловаса в симметричной форме. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества. Пусть для некоторого d и любого k*

- *доля подмножества A_k не меньше $1 - \dfrac{1}{4d}$, и*
- *из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно вычеркнуть не более d множеств, среди которых есть A_k, так что пересечение любого набора из оставшихся множеств будет независимо с A_k.*

Тогда $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.[11]

[11] Вот формулировка на вероятностном языке, которая не используется в дальнейшем. *Пусть дано вероятностное пространство и $A_1, \ldots, A_n$ — события. Пусть для некоторого d и любого k вероятность события A_k не меньше*

6.3 Случайные графы

Начнем с интересных задач, которые можно решить при помощи случайных графов. (Более простые решения без случайных графов неизвестны. Известны такие же или более сложные, и то не для всех задач.)

6.3.1. Если в графе $G = (V, E)$ с n вершинами минимальная степень вершины равна δ, то
(a) Для любого $p \in (0,1)$ существует такое множество вершин $A \subset V$, что в объединении A и множества всех вершин, не соединённых ни с какой вершиной из A, имеется не более $np+n(1-p)^{\delta+1}$ вершин.
(b) Существует такое множество вершин $D \subset V$, что любая вершина из $V \setminus D$ соединена ребром с некоторой вершиной из D и $|D| \leqslant n\dfrac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$.

Для решения следующих задач 6.3.2 и 6.3.3.c нужна приведенная ниже теория. К их решению разумно вернуться после задачи 6.3.9.

6.3.2. (a) Если $\dbinom{k}{m}p^{\binom{m}{2}} + \dbinom{k}{n}(1-p)^{\binom{n}{2}} < 1$ для некоторого $p \in (0,1)$, то $R(m,n) > k$ (здесь $R(m,n)$ — числа Рамсея, см. п. 4.1).
(b)* $R(4,n) \geqslant \Omega\left(\dfrac{n^2}{\ln^2 n}\right)$ (мы пишем $g \geqslant \Omega(f)$, если $f = O(g)$).

6.3.3. (a) *Cherchez la femme.* На русско-французской встрече не было представителей других стран. Суммарное количество денег у французов оказалось больше суммарного количества денег у русских, и суммарное количество денег у женщин оказалось больше суммарного количества денег у мужчин. Обязательно ли на встрече была француженка?
(b) Денежные купюры разного достоинства и разных стран упакованы в два чемодана. Средняя стоимость купюры равна 100 рублям. Общее число купюр в левом чемодане больше, чем в правом. Обязательно ли в левом чемодане найдется купюра стоимостью не более 200 рублей? (Ср. с неравенством Маркова 6.3.9.a.)

(c) Для любых целых $l, q > 0$ существует граф, не содержащий обходов длины менее l и который невозможно правильно раскрасить в q цветов. (См. определение правильности раскраски в п. 3.1.)

Зафиксируем $p \in (0,1)$ и назовем *вероятностью* графа (в модели, или в вероятностном пространстве, Эрдеша-Реньи) с n вершинами $\{1,2,\ldots,n\}$ и e рёбрами число $\mathrm{P}(G) = \mathrm{P}_p(G) := p^e(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-e}$. *Вероятностью* семейства (или, что то же самое, свойства) графов с вершинами $1,2,\ldots,n$ называется сумма вероятностей входящих в него графов.

Если Ω — множество всех графов с n вершинами, то $P(\Omega) = 1$. При вышеприведенном формальном определении это теорема. Вот ее доказательство:

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{k} p^k (1-p)^{\binom{n}{2}-k} = (p + (1-p))^{\binom{n}{2}} = 1.$$

Случайной величиной называется функция, определённая на множестве графов с вершинами $1,2,\ldots,n$.

Например, количество рёбер графа — случайная величина.

Пусть случайная величина Y принимает k различных значений $y_1,\ldots,y_k$. Тогда *математическим ожиданием* (мат. ожиданием) случайной величины Y называется её «взвешенное среднее»

$$\mathbb{E}Y := \sum_{s=1}^{k} y_s \mathrm{P}(Y^{-1}(y_s)),$$

где $Y^{-1}(y_s)$ – множество всех графов G, для которых $Y(G) = y_s$. Последнюю вероятность обозначают $\mathrm{P}(Y = y_s)$.

6.3.4. Для данных n и p вероятность наличия k вершин, между которыми нет рёбер, меньше $e^{k\ln n - pk(k-1)/2}$.

6.3.5. Для данных n и p найдите мат. ожидание количества

(a) изолированных вершин;

(b) треугольников;

(c) k-клик;

(d) k-клик, являющихся компонентами связности;
(e) гамильтоновых циклов;
(f) несамопересекающихся циклов длины k;
(g) несамопересекающихся циклов длины k, являющихся компонентами связности с ровно k ребрами;
(h) деревьев с k вершинами;
(i) древесных компонент данного размера k, т.е. деревьев с k вершинами, являющихся компонентами связности;
(j) вершин в древесных компонентах;
(k) вершин в циклических компонентах.

6.3.6. Для данного p найдите асимптотику (при постоянном k и $n \to \infty$) функции $\mathbb{E}^{(k)}(Y) := \mathbb{E}\,(Y(Y-1)\dots(Y-k+1))$ (т. е. *k-го факториального момента*), если Y — число изолированных вершин.

Дисперсией случайной величины X называется число $\mathbb{D}X := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$.

6.3.7. Для данных n и p найдите дисперсию количества
(a) изолированных вершин; (b) треугольников.

6.3.8. Для любых случайных величин X и Y выполнены следующие свойства.
(a) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$;
(b) $\mathbb{D}(X+Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y$, если X и Y независимы (т.е. для любых x, y выполнено $\mathrm{P}(X = x, Y = y) = \mathrm{P}(X = x) \cdot \mathrm{P}(Y = y)$).

6.3.9. Пусть X — случайная величина (определенная перед задачей 6.3.4) и $a > 0$.
(a) *Неравенство Маркова.* $\mathrm{P}(|X| > a) \leqslant \mathbb{E}|X|/a$. (Ср. с задачей 6.3.3.a.)
(b) *Неравенство Чебышева.* $\mathrm{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) \leqslant \mathbb{D}X/a^2$.

Событие A_n *происходит асимптотически почти наверное (или с асимптотической вероятностью 1) относительно последовательности* $f(n)$, если $\mathrm{P}_{f(n)}(A_n) \to 1$. Общепринятое сокращение: при $p(n) = f(n)$ событие A_n происходит а.п.н. (формально, эта фраза не имеет смысла, поскольку означает «если $p(n) = f(n)$, то событие A_n происходит а.п.н.», а без указания последовательности $f(n)$ фраза «событие A_n происходит а.п.н.» не может быть определена как надо). Напомним, что здесь n — число вершин графа.

6.3.10. При $p(n) = 1/(2n)$

(a) а.п.н. имеется более $n/2$ изолированных вершин.

(b)* для некоторого $C > 0$ а.п.н. каждая компонента связности имеет менее $C \ln n$ вершин (специалисты говорят: менее $O(\ln n)$ вершин).

(c)* а.п.н. каждая компонента связности является деревом или унициклическим графом.

(d)* для некоторого $C > 0$ а.п.н. имеется менее C уникцилических компонент.

6.3.11. (a) При $p(n) = o\left(n^{-3/2}\right)$ а.п.н. рёбра попарно не пересекаются.

(b) При $p = p(n) = o\left(n^{-3/2}\right)$ и $pn^2 \to \infty$ существует такая функция $r = r(n) = o(pn^2)$, что а.п.н. число вершин степени 1 больше $pn^2 - r$ и меньше $pn^2 + r$, а степени всех остальных вершин равны нулю.

6.3.12. Теорема о связности случайного графа. *Если $c > 1$ ($0 < c < 1$), то при $p(n) = c \ln n/n$ а.п.н. случайный граф связен (несвязен).*

6.3.13. (a) Найдите хотя бы одну такую функцию $p^*(n)$, что

• при $p(n)/p^*(n) \to 0$ а.п.н. граф не содержит треугольника,

• при $p(n)/p^*(n) \to +\infty$ а.п.н. граф содержит треугольник.

(b) То же с заменой треугольника на подграф, изоморфный K_4.

Замечание. Такая функция p^* называется *пороговой вероятностью.* Пороговая вероятность существует для любого монотонного семейства графов. Монотонно возрастающим (убывающим) семейством графов называется такое семейство графов, которое вместе с каждым графом содержит любой его надграф (подграф).

6.3.14. Хроматическое число графа а.п.н. не больше

(a) одного при $p(n) = o(1/n^2)$;

(b) двух при $p(n) = o(1/n)$;
(c) трёх при $p(n) = c/n$, где $c < 1$.

6.3.15. * (a) Жадный алгоритм раскраски (см. задачу 3.2.3) для любого положительного ε а.п.н. (при $p(n = 1/2)$) ошибается не более чем в $2+\varepsilon$ раз.

(b) Для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует такая последовательность G_n графов с n вершинами, что при случайной нумерации вершин графа G_n (т.е. для вероятности каждой нумерации, равной $1/n!$) вероятность того, что отношение числа цветов в жадной раскраске к $\chi(G_n)$ больше $n^{1-\varepsilon}$, больше δ. (Иными словами, с одной стороны, почти для любого графа в любой нумерация жадная раскраска хороша, но, с другой стороны, есть графы, которые почти как ни нумеруй, а все дрянь получится!)

6.3.16. (a) Если $p_n = o\left(n^{-\frac{k}{k-1}}\right)$ для некоторого целого $k > 1$, то в случайном графе почти наверное нет компонент связности, являющихся деревьями на k вершинах.

(b) Если $p_n = \frac{1}{2}$, то а.п.н. среди любых $[2\log_2 n + 10\log_2\log_2 n]$ вершин есть ребро.

(c)* *Граф расстояний* на плоскости – граф, вершины которого являются точками плоскости, и ребрами соединены пары вершин, находящиеся на расстоянии 1. Докажите, что если $p_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то а.п.н. случайный граф может быть реализован как граф расстояний на плоскости, а если $p_n > \frac{1000}{n}$, то а.п.н. выполнено обратное свойство.

Замечание. См. подробнее [R10, R08, R12]. В частности, в [R08] доказаны следующие результаты.

Первая теорема Боллобаша. *Существует последовательность* $f_n = o\left(\dfrac{n}{2\log_2 n}\right)$, *для которой при* $p(n) = 1/2$ *а.п.н.* $\left|\chi(G) - \dfrac{n}{2\log_2 n}\right| < f_n$. [R08, теорема 17]

(Эта теорема обобщается на практически любые значения p [JLR].)

Вторая теорема Боллобаша. *Для любого* $\alpha > 2/3$ *существуют последовательности* $a_n = a_{\alpha,n}$ *и* $b_n = b_{\alpha,n}$, *для которых при* $p(n) = n^{-\alpha}$ *а.п.н.* $\chi(G) \in \{a_n, b_n\}$.

7 Алгебраические методы

Напомним, что для множества F

$$F^n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ : \ a_1, a_2, \ldots, a_n \in F\}.$$

Элементы этого множества называются *векторами* (или *упорядоченными наборами*, или *точками*). Если $F \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, то векторы можно покомпонентно складывать:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Если $F \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, то вектор можно покомпонентно умножить на число $\lambda \in F$:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

(Это можно делать и для $F = \mathbb{Z}_2$, но не интересно.)

Расстояние между точками пространства $\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$|(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Для $F \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ *скалярное произведение* $F^n \times F^n \to F$ определяется формулой

$$x \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Векторы $x, y \in F^n$ называются *ортогональными*, если $x \cdot y = 0$.

7.1 Линейно-алгебраический метод в комбинаторике

7.1.1. *Теорема о линейной зависимости.*

($\mathbb{Z}_2$) Среди любых $n+1$ наборов длины n из нулей и единиц найдется несколько (не ноль) наборов, покомпонентная сумма по модулю два которых есть нулевой набор.

($\mathbb{Q}$) Для любых $n+1$ векторов $v_1, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{Q}^n$ найдутся рациональные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$, не все равные нулю, для которых $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+1} v_{n+1} = (0, \ldots, 0)$.

($\mathbb{R}$) Аналог теоремы ($\mathbb{Q}$) справедлив для вещественных, комплексных и целых чисел.

Наборы из задач 7.1.1.($\mathbb{Z}_2$),($\mathbb{Q}$) называются *линейно зависимыми* — над $\mathbb{Z}_2$ и над $\mathbb{Q}$ соответственно. *Линейная независимость* — отрицание *линейной зависимости*. Аналогично определяется линейная (не)зависимость многочленов над $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Q}$ соответственно. (Эти и следующие понятия используются в формулировках задач 7.1.4.c, 7.1.5.c и в решениях некоторых задач.)

Линейным подпространством называется подмножество $L \subset \mathbb{Q}^n$, замкнутое относительно сложения векторов и умножения на рациональные числа.

Линейное подпространство L называется *n-мерным*, если найдутся такие линейно независимые векторы $v_1, \ldots, v_n \in L$, что любой вектор $v \in L$ линейно выражается через данные векторы, т. е. найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$, для которых $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Число n называют *размерностью* пространства L. Ср. с определением перед задачей 1.4.7.

Замечание. Аналогичные определения можно дать и в более общей ситуации — это приводит к понятию *кольца* и *модуля* над ним. Попытка доказать (и использовать!) аналог теоремы о линейной зависимости (задачи 7.1.1) приводит к понятиям *поля* и *линейного пространства* над ним. (Для случая целых чисел уже не все обобщения проходят.) Подробности можно найти в учебнике по линейной алгебре.

Фраза «N элементов» (в частности, подмножеств) означает «N попарно различных элементов» (в частности, подмножеств).

7.1.2. Дано семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества $\mathcal{R}_n$.

(a) Если в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ нечётное число элементов, а в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ чётное число элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(b) Постройте пример, когда эта оценка достигается.

(c) Если в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно q элементов и в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ более q элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(d) Если $q > 0$ и в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно q элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

7.1.3. (a) Существуют 2^k подмножеств $2k$-элементного множества, в каждом из которых чётное число элементов и в пересечении любых двух из которых чётное число элементов.

(b) Больше чем 2^k подмножеств в условиях п. (a) быть не может.

7.1.4. (a) Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n$ с равными попарными расстояниями равно $n+1$.
(b) Постройте $n(n-1)/2$ точек в $\mathbb{R}^n$, попарные расстояния между которыми принимают только два различных значения.
(c) Для $a \in \mathbb{R}$ и точек $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $P_v(x) := |x - v|^2 - a^2$. Если попарные расстояния между k точками $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ равны a, то многочлены $P_{u_1}, \ldots, P_{u_k}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.
(d) Если попарные расстояния между k точками в $\mathbb{R}^n$ принимают только два различных значения, то $k \leqslant (n+1)(n+4)/2$.

7.1.5. (a) Среди любых 327 попарно пересекающихся 9-элементных подмножеств 25-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 3 или ровно 6 элементов.
(b) Для $n, k \in \mathbb{Z}$ обозначим

$$V_{n,k} := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \ : \ \sum_s x_s = k \right\}.$$

Среди любых 327 точек в $V_{25,9}$ есть две, скалярное произведение которых делится на 3.
(c) Для любого $\vec{a} \in V_{25,9}$ раскроем скобки в произведении

$$(\vec{a} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{25}))^2 - 1$$

по модулю 3, где $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ — переменные. Каждый из полученных одночленов λx_i^2 заменим на λx_i. Полученный многочлен (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_3$) обозначим $F_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_{25})$.
Докажите, что если скалярное произведение никаких двух векторов среди $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \in V_{25,9}$ не делится на 3, то многочлены $F_{\vec{a}_1}, \ldots, F_{\vec{a}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}_3$.
(d) Укажите 326 многочленов, линейными комбинациями которых с рациональными коэффициентами можно получить каждый многочлен $F_{\vec{a}}$, $\vec{a} \in V_{25,9}$.

7.1.6. (a) Среди любых 107 пятиэлементных подмножеств 14-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 2 элемента.
(b) То же для 93 подмножеств.
(c) То же для 92 подмножеств.
(d) Невозможно раскрасить в 21 цвет все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества так, чтобы любые два пятиэлементные подмножества, пересекающиеся ровно по двум элементам, были разноцветны.
(Ср. с замечанием в задаче 5.1.4. Вот эквивалентная формулировка. Вершинами графа являются все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества. Его ребрами являются пары подмножеств, пересекающиеся ровно по двум элементам. Докажите, что этот граф нельзя правильно раскрасить в 21 цвет.)

7.1.7. (a) *Теорема Франкла-Уилсона.* Если p простое и $n > k$ целые, то среди любых $1+\sum\limits_{j=0}^{p-1}\binom{n}{j}$ подмножеств n-элементного множества, в каждом из которых k элементов, найдутся два подмножества, число элементов в пересечении которых делится на p.

(b) То же, только задано целое a и «делится на p» заменено на «сравнимо с a по модулю p».

7.1.8. *Теорема Фрэнкла-Уилсона.* Пусть $p > 2$ простое и в множестве из $n = 4p^\alpha$ элементов выбрано $2\binom{n-1}{n/4-1}$ подмножеств по $n/2$ элементов в каждом. Тогда найдутся два множества, имеющие ровно $n/4$ общих элементов.

7.1.9. (a) Если множество рёбер графа K_n является объединением множеств рёбер s полных двудольных графов, не пересекающихся по рёбрам, то $s \geqslant n-1$.
(b) Постройте набор двудольных графов, на котором эта оценка достигается.

Ср. с п. 5.1, 5.7 и 7.3. Более подробное и развернутое изложение можно найти в [Mk, R15], а более продвинутое — в [BF].

Теорема 7.3.1 (Борсук)**.** *Любое ограниченное подмножество плоскости, в котором более двух точек, можно разбить на три непустые части меньшего диаметра.* [14]

Диаметром непустого подмножества плоскости называется наибольшее расстояние между его точками (точнее, супремум таких расстояний). Подмножество плоскости называется *ограниченным*, если его диаметр конечен.

Борсук предложил следующее обобщение своего результата, которое долгие годы было одной из наиболее интригующих проблем комбинаторной геометрии.

Диаметр и *ограниченность* подмножества n-мерного евклидова пространства определяется точно так же, как и в случае плоскости.

Гипотеза Борсука утверждает, что любое ограниченное подмножество n-мерного евклидова пространства, содержащее более n точек, можно разбить на $n+1$ непустых частей меньшего диаметра.

(Нетрудно придумать подмножество n-мерного евклидова пространства, которое нельзя разбить на n частей меньшего диаметра. Для $n = 3$ годится правильный тетраэдр, для произвольного n годится n-мерный симплекс.)

В 1993 Д. Кан и Дж. Калаи, следуя идеям Болтянского, Эрдеша и Лармана о применении комбинаторики для построения контрпримера, нашли контрпример к гипотезе Борсука [KK93]. Подробно история вопроса описана в [AZ04], [R14].

Теорема 7.3.2. *Существует n и ограниченное подмножество n-мерного евклидова пространства, содержащее более n точек и которое невозможно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра.*

Мы приведем (ср. [S13]) простейшее из известных доказательств, принадлежащее Н. Алону, ср. [N94, S96, G99, R04, AZ04], [R14]. (При этом другие доказательства дают более сильные результаты.)

[14] *Указание к доказательству.* Сначала, используя «соображения непрерывности», докажите, что любую плоскую фигуру диаметра 1 можно заключить в правильный шестиугольник, диаметр вписанной окружности которого равен 1. Затем докажите, что хотя диаметр полученного правильного шестиугольника больше 1, его можно разрезать на три части диаметра меньше 1. Ср. [Y10].

Это удивительный пример важного результата в современной математике, не требующего для полного понимания полугодового специального университетского курса (после двухгодового обязательного курса). Более простые применения аналогичных алгебраических соображений в комбинаторике можно найти в п. 7.1.

Доказательство теоремы 7.3.2. Обозначим

$$M \;=\; \{(x_1,\dots,x_n) \mid$$

$$\mid x_1 = 1,\ x_2,\dots,x_n \in \{1,-1\} \text{ и среди } x_2,\dots,x_n \text{ число минус единиц четно}\}.$$

Вершина n^2-мерного куба — набор длины n^2 из плюс или минус единиц. Его удобно представлять себе как таблицу $n\times n$. (Впрочем, если Вам удобнее работать с набором длины n^2, то можно и так!) Поставим в соответствие каждой точке $x=(x_1,\dots,x_n)\in M$ таблицу $x^T\otimes x$, определенную формулой $(x^T\otimes x)_{ij} := x_ix_j$. Например,

$$(1,-1,-1)^T\otimes(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= (1,-1,-1,-1,1,1,-1,1,1).$$

Докажем, что контрпримером к гипотезе Борсука является множество M' всех таблиц $x^T\otimes x$, $x\in M$, для достаточно большого простого числа p и $n=4p$.

Пусть $x,y\in M$. Тогда $(x_ix_j-y_iy_j)^2 = (1-x_iy_ix_jy_j)^2$. Обозначим через $a=a(x,y)$ количество индексов i, для которых $x_i=y_i$. Тогда $x_iy_i=1$ для a индексов i и $x_iy_i=-1$ для $n-a$ индексов i. Поэтому $|x^T\otimes x, y^T\otimes y|^2 = 4a(n-a)$. Это выражение максимально при $a=n/2$. Значит, условие $|x^T\otimes x, y^T\otimes y| = \mathrm{diam} M'$ равносильно условию $a=n/2$ и равносильно условию $x\cdot y=0$.

Поэтому если множество M' разбито на k частей $Z_1',\dots,Z_k'$ меньшего диаметра, то в каждом подмножестве Z_j множества M, отвечающем одной части Z_j', никакие два вектора не ортогональны. Так как $x_1=1$ для любого $x\in M$, то $x^T\otimes x\ne y^T\otimes y$ при $x\ne y$. Значит, $|Z_i|=|Z_i'|$. Теперь доказываемая теорема вытекает из следующей леммы 7.3.3 об оценке, ибо $|M|=2^{n-2}$. QED

Лемма 7.3.3 (Оценка). *Если p — достаточно большое простое число и $n = 4p$, то среди любых $\lfloor 2^{n-2}/(n^2+1) \rfloor$ векторов в M найдется два ортогональных.*

Мы предлагаем читателю самостоятельно подумать над доказательством лемм утверждений перед тем, как читать их доказательства. При доказательстве леммы 7.3.3 об оценке можно забыть про конструкцию $x \otimes x$.

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 7.3.4. *Для простого p и целого t число*

$$G(t) := (t-1)(t-2)\dots(t-p+1)$$

делится на p тогда и только тогда, когда t не делится на p.

Рациональной линейной комбинацией многочленов $F_1, \dots, F_s$ называется любой многочлен $\lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_s F_s$ с рациональными $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Например, многочлен x_2 является рациональной линейной комбинацией многочленов $2x_1$, 1 и $x_1 + x_2$.

Многочлены называются *линейно независимыми*, если любая их рациональная линейная комбинация, в которой не все λ_k нулевые, не равна нулю. Например, n многочленов $1, x_2, x_3, \dots, x_n$ являются линейно независимыми.

Многочлен с рациональными коэффициентами от $n-1$ переменной $x_2, \dots, x_n$ *имеет степень менее $n/4$*, если он является рациональной линейной комбинацией многочленов

(*) $x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ — целые неотрицательные числа, сумма которых меньше $n/4$.

Лемма об оценке 7.3.3 вытекает из нижеследующих леммы 7.3.5 о линейной независимости и утверждения 7.3.6.

Лемма 7.3.5 (Линейная независимость). *Пусть p простое, $n = 4p$, $A \subset M$ и никакие два вектора из A не ортогональны. Для каждого вектора $a \in A$ определим многочлен F_a с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ от $x_2, \dots, x_n$ формулой*

$$F_a(x_2, \dots, x_n) := G(a \cdot (1, x_2, \dots, x_n)).$$

Тогда многочлены F_a, $a \in A$, имеют степени меньше $n/4$ и линейно независимы.

Утверждение 7.3.6. *Пусть q простое и n достаточно большое целое (число $n/4$ не обязательно простое и равно q). Тогда любое линейно независимое над $\mathbb{Z}_q$ семейство многочленов с коэффициентами в $\mathbb{Z}_q$ от $x_2, \ldots, x_n$ степени менее $n/4$ содержит менее $\lfloor 2^{n-2}/(n^2+1) \rfloor$ многочленов.*

Доказательство леммы о линейной независимости. Утверждение о степени очевидно. Докажем линейную независимость. Пусть, напротив, $\lambda_1 F_{a_1} + \cdots + \lambda_s F_{a_s} = 0$ для некоторых $a_1, \ldots, a_s \in A$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{Z}_p$, причем не все λ_k нулевые. Здесь $a_1, \ldots, a_s$ — векторы, а не координаты. Не уменьшая общности, $\lambda_1 \neq 0 \in \mathbb{Z}_p$. Подставим в полученное равенство значения $x_2 = (a_1)_2, \ldots, x_n = (a_1)_n$.

Напомним, что скалярное произведение векторов — целое число (а не вычет по модулю p).

Из $a_1 \cdot a_1 = n = 4p$ и утверждения 7.3.4 вытекает, что $\lambda_1 F_{a_1} \neq 0$.

Так как n делится на 4 и для любых различных $a, b \in A$ число минус единиц в a и в b нечетно, то $a \cdot b$ делится на 4. Поэтому $a \cdot b \notin \{\pm p, \pm 2p, \pm 3p\}$. Из этого и $a \cdot b \neq 0$ вытекает, что $a \cdot b$ не делится на p. Значит, по утверждению 7.3.4 $\lambda_k F_{a_k} = 0$ при любом $k > 1$. Противоречие. QED

Доказательства утверждения 7.3.6. Количество упорядоченных решений $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ уравнения $\alpha_2 + \ldots + \alpha_n = d$ в целых неотрицательных числах равно $\binom{n+d-2}{d}$. При $d < p := \lfloor n/4 \rfloor$

$$\binom{n+d-2}{d} = \frac{(n+d-2)(n+d-3)\ldots(n-1)}{d!} <$$

$$< \binom{n+p-3}{p-1} < \binom{5p}{p-1} < \frac{(4+1)^{5p}}{4^{4p+1}} < 13^p.$$

Здесь предпоследнее неравенство получается из бинома Ньютона для $(4+1)^{5p}$ (ср. с доказательством утверждения 6.1.5.e), а последнее неравенство вытекает из $5^5 < 2^7 \cdot 5^2 < 2^8 \cdot 13$.

Поэтому и ввиду неравенства $13 < 2^4$ для достаточно большого n количество r многочленов в семействе (*) не превосходит $n 13^{n/4} < \lfloor 2^{n-2}/(n^2+1) \rfloor$.

Обозначим через $Q_1, \ldots, Q_r$ семейство многочленов (*), а через $F_1, \ldots, F_k$ данное линейно независимое семейство. Возьмем табли-

Литература

[AH] *D. Archdeacon and P. Huneke*, A Kuratowski theorem for non-orientable surfaces, J. Comb. Th., Ser. B, 46 (1989) 173–231.

[AM] *Акопян А. В. , Мусин О. Р.* О множествах с двумя расстояниями. Мат. Просвещение, 17 (2013), 136–151.

[AS] *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: Бином, 2011.

[AZ] *M. Aigner, G. Ziegler,* Proofs from the Book, Springer, 2004.

[BF] *Babai L., Frankl P.* Linear algebra methods in combinatorics, Part 1. Department of Computer Science, The University of Chicago, 1992.

[BKK] *О. Бурсиан, Д. Кохась, К. Кохась,* Вокруг теоремы Кэли, `https://www.turgor.ru/lktg/2018/3/index.html`

[BM] *I. Bogdanov and A. Matushkin.* Algebraic proofs of linear versions of the Conway–Gordon–Sachs and the van Kampen–Flores theorems, `http://arxiv.org/abs/1508.03185`

[Bo] *Bollobás B.* Random Graphs. Cambridge studies in advanced mathematics, 2001.

[Cl] *S. Claytor*, Peanian continua not embeddable in a spherical surface, Ann. of Math. 38 (1937) 631–646.

[EL] *P. Erdős, L. Lovász*, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions, *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, Amsterdam: North Holland, 1973, 609–627.

[Ga] *Гарднер М.* Рамсеевская теория графов. // Квант, 1988, N4, с. 15–20, 82. `http://kvant.mccme.ru/1988/04/ramseevskaya_teoriya_grafov.htm`

[Ge] *М. Л. Гервер,* О разбиении множеств на части меньшего диаметра: теоремы и контрпримеры, Мат. Просвещение, 3 (1999), 168-183.

[GHW] *H. H. Glover, J. P. Huneke and C. S. Wang*, 103 graphs that are irreducible for the projective plane, J. Comb. Th., 27:3 (1979) 332–370.

[GIF] *С. А. Генкин, И. В. Итенберг и Д. В. Фомин*, Ленинградские математические кружки, Киров, 1994.

[GIM] Основы комбинаторики и теории чисел. Сборник задач. А.А. Глибичук, Д.Г. Ильинский, Д.В. Мусатов и др. ИД «Интеллект», Долгопрудный, 2015.

[GKP] *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник А.* Конкретная математика. М.: Мир, 1998.

[Gr] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.

[Har] *Харари Ф.* Теория графов. М.: УРСС, 2003.

[Hal] *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[IRS] *Ильинский Д., Райгородский А., Скопенков А.* Независимость и доказательства существования в комбинаторике. Мат. Просвещение, 19 (2015). `http://arxiv.org/abs/1411.3171`

[IKRS] *Ильинский Д., Купавский А., Райгородский А., Скопенков А.* Дискретный анализ для математиков и программистов (подборка задач). Мат. Просвещение, 17 (2013), с. 162–181.

[Ig] *Игнатьев М.В.* Квантовая комбинаторика. Мат. Просвещение. 18 (2014), с. 66–111.

[JLR] *Janson S., Luczak T., Rucinski A.* Random Graphs. John Wiley, 2000.

[Ju] *Jukna S.* Extremal Combinatorics With Applications in Computer Science. Springer-Verlag, XVII (2001).

[KK] *J. Kahn and G. Kalai*, A counterexample to Borsuk's conjecture, Bull. AMS, 29:1 (1993) 60–62.

[CR] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2001. `http://ilib.mccme.ru/pdf/kurant.htm`

[KS] *Калужнин Л. А., Сущанский В. И.* Преобразования и перестановки. М.: Физматлит, 1985. http://lib.mexmat.ru/books/3692.

[Ku] *V. A. Kurlin*, Basic embeddings into products of graphs, Topol. Appl. 102 (2000) 113–137.

[KZP] *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.,* Введение в теорию вероятностей. Серия «Библиотечка «Квант» », выпуск 23. М.: Наука, 1982.
`http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/teorver.htm`

[Lo] *Lovász L.* Combinatorial Problems and Exercises. North-Holland, Amsterdam, 1979.

[Ma] *Yu. Makarychev*, A short proof of Kuratowski's graph planarity criterion, J. of Graph Theory, 25 (1997) 129–131.

[Mk] *J. Matoušek.* Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra, Amer. Math. Soc., 2010

[Mn] *А. Матушкин,* Непустота пересечения цепочки множеств, Мат. Просвещение, 20 (2016), 247–248.

[Mo] *B. Mohar,* 2-cell embeddings with prescribed face lengths and genus, Ann. Combin. 14 (2010) 525-532.
`http://www.fmf.uni-lj.si/~mohar/Reprints/Inprint/BM06_AC_Mohar_2cellEmbeddings.pdf.`

[MS] *Медников Л. Э., Шаповалов А.В.* Турнир городов: мир математики в задачах. МЦНМО, 2012.

[MT01] *B. Mohar*, *C. Thomassen*. Graphs on Surfaces. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 2001.

[Ni] *A. Nilli*, On Borsuk's problem, Contemp. Math., 178 (1994) 209–210.

[NPP] *Ф.К. Нилов, А.А.Полянский, Н.А. Полянский.* Теорема Семереди - Троттера Мат. Просвещение, 21 (2017).

[Pr] *В. Прасолов.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. `http://www.mccme.ru/prasolov/`.

[PS] *В.В. Прасолов и М.Б. Скопенков.* Рамсеевская теория зацеплений // Мат. Просвещение. 2005. 9. С. 108-115.

[PT] *А.А.Полянский, П.Б.Тарасов.* Избранные задачи экзамена по дискретному анализу, Мат. Просвещение, 21 (2017).

[R04] *A. M. Raigorodskii*, The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary, Math. Intelligencer, 26:3 (2004) 4–12.

[R08] *Райгородский А.М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2008. `http://www.mccme.ru/free-books/dubna/raigor-4.pdf`

[R10] *Райгородский А.М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2010.

[R12] *Райгородский А.М.*, Комбинаторика и теория вероятностей. М.: Изд-во МФТИ, 2012.

[R13] *Райгородский А.М.*, Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии. М.: МЦНМО, 2013. `http://www.mccme.ru/free-books/dubna/raigor-2.pdf`

[R14] *Райгородский А.М.* Проблема Борсука. М.: МЦНМО, 2014.

[R15] *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.

[RS] *N. Robertson and P. D. Seymour*, Graph minors VIII, A Kuratowski graph theorem for general surfaces, J. Comb. Theory, 48B (1990) 255–288.

[Ru] *Рухович А.* Степенные последовательности ориентированных графов, `http://www.mccme.ru/mmks/dec09/ruhovich.pdf`

[S] *Скопенков А.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения. `http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`

[S05] *Skopenkov A.* On the Kuratowski graph planarity criterion. `http://arxiv.org/abs/0802.3820`

Русскоязычная версия: *Скопенков А.* Вокруг критерия Куратовского планарности графов, Мат. Просвещение, 9 (2005), 116–128 и 10 (2006), 276–277.

[S06] *Скопенков А.* Олимпиады и математика. Мат. Просвещение, 10 (2006), с. 57–63.

[S08] *A. Skopenkov*, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, in: Surveys in Contemporary Mathematics, Ed. N. Young and Y. Choi, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342. arXiv:math/0604045

[S12] *Скопенков А.* Объемлемая однородность, МЦНМО, Москва, 2012. `http://arxiv.org/abs/1003.5278`

[S13] *Skopenkov A.* A two-page disproof of the Borsuk partition conjecture. `http://arxiv.org/abs/0712.4009`, v2.

Русскоязычная версия: *Скопенков А.* Короткое опровержение гипотезы Борсука. Мат. Просвещение, 17 (2013), с. 88–92.

[S14] *A. Skopenkov.* Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory, `http://arxiv.org/abs/1402.0658`

[S15] *Скопенков А.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. М.: МЦНМО, 2015. `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf`

[S95] *A. Skopenkov*, A description of continua basically embeddable in $\mathbb{R}^2$, Topol. Appl. 65 (1995) 29–48.

[S96] *A. Skopenkov*, The Borsuk problem, Quantum, 7:1 (1996) 16–21, 63.

[Sa] *K. S. Sarkaria*, Kuratowski complexes, Topology, 30 (1991) 67–76.

[So] *Соловьева Ф. И.* Введение в теорию кодирования. Новосибирск, 2006. http://tc.nsu.ru/uploads/codingtheory.pdf

[Su] *Д. Судзуки, Основы дзэн-буддизма.* Наука дзэн — ум дзэн. Киев: Преса України. 1992.

[SVY] *А. Волостнов, А. Скопенков и Ю. Яровиков,* Этюд о рекуррентных соотношениях, Мат. Просвещение 21 (2017), 213-218.

[Ta] Handbook of Graph Drawing and Visualization. Ed. R. Tamassia, CRC Press. https://cs.brown.edu/~rt/gdhandbook/.

[Th] *C. Thomassen, Kuratowski's theorem*, J. Graph. Theory, 5 (1981) 225–242.

[Ve] *Веснин А.Ю.* Гамильтоновы графы и остовные подграфы: задачи для исследования, материалы Московской математической конференции школьников.
http://www.mccme.ru/mmks/mar08/vesnin3.pdf

[Vi] *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.

[VS88] *Волков М., Силкин Н.* Кого послать на Марс? // Квант (1988) N8, с. 51–57.
http://kvant.mccme.ru/1988/08/kogo_poslat_na_mars.htm

[VS97] *Н.Б. Васильев и А.Б. Скопенков.* Решение задачи М1566. // Квант (1997) N2, с. 24.

[Ya] *Dian Yang*, An elementary proof of Borsuk theorem, http://arxiv.org/abs/1010.1990.

[ZSS] Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. Изд-во МЦНМО, 2017. `http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf`

[1] `https://www.dpmms.cam.ac.uk/~dc340/EGT3.pdf`

[2] `http://www.cs.rit.edu/~spr/ElJC/ejcram14.pdf`

[3] `http://www.math.upenn.edu/~wilf/website/Three\%20problems.pdf`

[4] `http://www.unn.ru/math/no/5/_nom5_001_ilyin.pdf`

[5] `http://www.sosmath.com/calculus/sequence/stirling/stirling.html`

[6] `http://www.spbstu.ru/publications/m_v/n_002/Polischook/Stirling.pdf`

[7] `http://arxiv.org/pdf/1109.2546.pdf`

[8] `http://dainiak.blogspot.ru`

Мат. Просвещение: `http://www.mccme.ru/free-books/matpros`

10 Программа курса ДА 2014-18 уч. годов

Нужно уметь решать задачи, аналогичные пп. 2.1-2.7, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.5, 5.1, 5.2, 5.5, 6.1-6.3, 7.1, 7.2 книги

Элементы дискретной математики в задачах, А.А. Глибичук, А.Б. Дайняк, Д.Г. Ильинский, А.Б. Купавский, А.М. Райгородский, А.Б. Скопенков, А.А. Чернов, Изд-во МЦНМО, 2016, `http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf`

В скобках указана ориентировочная сложность пункта программы. Формального смысла эти баллы не имеют (ср. со сценарием экзамена на `https://www.mccme.ru/circles/oim/home/bally.pdf`). Но мы надеемся, что они помогут студентам разумно организовать подготовку к экзамену: не изучать «сложных» пунктов программы, пока не изучены «простые». Пункты «на 5 и меньше» могут использоваться в дальнейших курсах без повторения материала.

«Без доказательства» сокращается до «б/д». В пунктах программы приводятся ссылки на вышеуказанную книгу (или на имеющийся в ней список литературы или на другую литературу).

Образцы вопросов приведены после программы и в [PT].

Спасибо студентам за вопросы, благодаря которым появились мелкие уточнения.

Глава 2. Графы (1-й семестр)

1. (3) Определение графа, графов с петлями и кратными ребрами. Ориентированые графы. Соотношение между числом вершин и ребер дерева. (П. 2.1 и задачи 2.2.1.)

2. (5) Код Прюфера. Формула Кэли.(Задачи 2.2.3.a и 2.2.4.c.)

3. (6) Точная формула для числа унициклических графов. (Задача 2.2.5.b.)

4. (5) Определение плоских и планарных графов. Формула Эйлера (б/д). Примеры непланарных графов. Критерий Понтрягина–Куратовского планарности графов (б/д).(П. 2.4 и задачи 2.4.4.c.)

5. (только в 2014-2016) (6) Классификация правильных многогранников с точностью до изоморфизма их графов. 6-раскрашиваемость любой карты на плоскости. (Задачи 2.4.5.cdefg и 2.4.1.a.)

6. (3) Пути и циклы. Простые пути и циклы. Критерии эйлеровости графа и ориентированного графа. (Задачи 2.5.3.ac.)

7. (5) Последовательности и графы де Брёйна.
(только в 2014-2016) Правило «ноль лучше единицы».
(Задачи 2.5.5–2.5.8.)

8. (5) Гамильтоновы пути и циклы. Достаточное условие Дирака гамильтоновости графа. (Задача 2.6.2.b.)

9. (7) Вершинная связность и число независимости графа. Достаточное условие гамильтоновости в их терминах. Гамильтоновость графа 1-пересечений 3-элементных подмножеств n-элементного множества. (Задачи 2.6.3, 2.6.4 и 2.6.5.c.)

10. (3) Гамильтоновы цепи в турнирах. Нижняя оценка с доказательством, верхняя — без. (Задача 2.6.7.)

11. (5) Теорема Турана о числе ребер в графе с данным числом вершин и числом независимости. Асимптотика наибольшего числа ребер в графе с n вершинами без k-клик. (Задачи 2.7.1 и 6.1.2.)

12. (6) Оценка числа ребер у дистанционного графа на плоскости и в пространстве произвольной размерности. Сравнение с теоремой Турана. (Задачи 2.7.2, 2.7.4, 2.7.5.)

Глава 3. Раскраски графов (1-й семестр)

13. (4) Соотношения между хроматическим числом, числом независимости и кликовым числом. (Задача 3.1.3 из главы 3.)

Глава 4. Основы теории Рамсея (2-й семестр)

14. (3) Числа Рамсея $R(s,t)$: точные значения для $s+t \leqslant 7$. Рекуррентная верхняя оценка Эрдеша–Секереша. (Задачи 4.1.1, 4.1.2.ac.)

15. (4) Следствие рекуррентной верхней оценки Эрдеша–Секереша для недиагональных и диагональных чисел Рамсея. Уточнение Конлона (б/д). Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея с помощью простого вероятностного метода. (Задачи 4.1.2.b, 4.1.5.)

16. (5) Многоцветные числа Рамсея $R_k(l_1, \ldots, l_r)$ и их рекуррентная верхняя оценка. Следствие для $R_3(s,t)$. Нижняя вероятностная оценка для $R_3(s,s)$. (Задачи 4.2.2.b, 4.2.7, 4.3.3, 4.3.4.)

17. (9) Верхняя оценка Конлона для двудольных чисел Рамсея: лемма с конкретными l, m, r, s и ее аналог с последовательностями (б/д); доказательство оценки с использованием леммы. (Есть оригинальная статья Conlon'а, скачивается с его домашней страницы.)

18. (8) Конструктивная нижняя оценка Франкла–Уилсона для $R(s,s)$. Доказательство лемм для кликового числа и для числа независимости. [R10]

Глава 5. Системы множеств (гиперграфы) (19-26 1-й семестр, 21-30 2-й семестр)

19. (7) Гиперграфы. Гиперграфы t-пересечений. Теорема Эрдеша–Ко–Радо (о максимальном числе ребер в гиперграфе 1-пересечений). (Задача 5.1.3.)

20. (6) История последовательных продвижений: теорема Эрдеша–Ко–Радо (общий случай), теорема Франкла, теорема Уилсона, теорема Алсведе–Хачатряна. (Все б/д, но с подробными комментариями. Нужно продемонстрировать четкое понимание, что за параметры выбираются в теореме АХ: когда эта теорема превращается в ЭКР; когда оценка становится тривиальной ($\binom{n}{k}$); примеры конструкций, в которых можно явно посчитать, что оценка ЭКР не самая лучшая и АХ ее превосходит.) (Задачи 5.1.2, 5.1.3.)

21. (3) Системы общих представителей (с.о.п.). «Тривиальные» нижние и верхние оценки.

22. (5) Верхняя оценка размера минимальной с.о.п. с помощью жадного алгоритма. (Задачи 5.2.1, 5.2.5, 5.2.6.a.)

23. (8) Конструктивная нижняя оценка размера минимальной с.о.п. (Задача 5.2.6.b.)

24. (7) Нижняя оценка размера минимальной с.о.п. с помощью обобщенных с.о.п. (Задача 5.2.6.c.)

25. (9) Вероятностная нижняя оценка размера минимальной с.о.п. Следствие из нее. (Задача 5.2.6.def.)

26. (5) Системы различных представителей. Теорема Холла.

27. (5) Перманент. Формула разложения по строке. Связь с количеством систем различных представителей.

28. (6) С.о.п. в геометрии (теорема о треугольниках на плоскости, б/д). Размерность Вапника–Червоненкиса. Теорема Радона (б/д). Подсчет размерности семейства полупространств. Лемма о числе областей в пространстве заданной мощности и размерности. Лемма о размерности измельчения (достаточно доказать существование верхней оценки, не обязательно такой, как на лекции) (Задачи 5.5.1 и 5.5.2.bc.)

(только в 2014-16) Оценка числа подмножеств в семействе заданной размерности на n-элементном множестве. (Задача 5.5.9.)

29. (8) Эпсилон-сети. Теорема Вапника–Червоненкиса об эпсилон-сетях и теорема о треугольниках как частный случай.

30. (4) Теорема Вапника–Червоненкиса (б/д). Приложения в статистике: равномерная сходимость в ЗБЧ (УЗБЧ) и теорема Гливенко–Кантелли как частный случай.

Глава 6. Аналитические и вероятностные методы (31-35 1-й семестр, 36-48 2-й семестр)

31. (3) Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Оценки для $\binom{n}{n/2}$ с помощью тождества. (Задачи 6.1.7.a и 6.1.5.ab.)

32. (5) Асимптотика $\ln n!$ и $\sqrt[n]{n!}$ с доказательством без использования формулы Стирлинга. Формула Стирлинга (б/д). (Задача 6.1.6.)

33. (5) Оценки биномиальных коэффициентов вида $\binom{n}{[an]}$, $a \in (0,1)$. Аналогичный результат для полиномиальных коэффициентов. (Задача 6.1.5.cdef.)

34. (5) Асимптотика для $\binom{n}{k}$ при $k^2 = o(n)$. Оценки той же величины при больших k. Асимптотики для $\binom{n}{n/2}/\binom{n}{n/2-x}$. (Задача 6.1.7.bcde.)

35. (8) Асимптотика числа унициклических графов. (Задача 6.1.12.b.)

36. (5) Симметричный случай ЛЛЛ (б/д). Вывод оценки диагонального числа Рамсея (теорема Спенсера). (Задачи 6.2.15, 6.2.23.b и 6.2.28.a.)

37. (8) Симметричный и несимметричный случай ЛЛЛ (с доказательством симметричного либо напрямую, либо с доказательством несимметричного и выводом из него). (Задачи 6.2.15 и 6.2.28.a.)

38. (10+) Вывод из несимметричного случая ЛЛЛ нижней оценки для $R(3,t)$ (с выписыванием неравенств, требуемых для применения ЛЛЛ, но без их доказательства). Самые точные известные оценки для $R(3,t)$ (б/д). (Задача 6.2.28.b и замечание после нее.)

39. (5) Двудольные числа Рамсея: нижние оценки простым вероятностным методом и с помощью ЛЛЛ. Отличие нижних оценок для двудольных чисел Рамсея от аналогичных нижних оценок для $R(s,t)$. (Литературы нет; делается совершенно аналогично тому, как то же самое делается для обычных чисел Рамсея.)

40. (6) Случайные графы. Неравенства Маркова и Чебышёва. Неравенство для случайного блуждания. (п. 6.3, [R08, п. 1.11 и 1.12])

41. (7) Связность случайного графа: случай $p = c\ln n/n$ при $c < 1$. Теоремы о $\dfrac{\ln n + \gamma + o(1)}{n}$ и о гигантской компоненте (б/д). [R08, п. 2.5]

42. (8) Связность случайного графа: случай $p = c\ln n/n$ при $c > 1$. [R08, п. 2.5]

43. (4) Теоремы Боллобаша о хроматическом числе случайного графа (б/д). Оценки хроматического числа случайного графа при $p = o(1/n^2)$ и $p = o(1/n)$. [R08, п. 2.6]

44. (только в 2014-17) (9) Теоремы Боллобаша о хроматическом числе случайного графа (б/д). Оценки хроматического числа случайного графа при $p = c/n$, $c < 1$. Случай, когда функция из второй теоремы Боллобаша может стремиться к бесконечности.[R08, п. 2.6]

45. (только в 2017-18) (8) Оценка отклонения для липшицевой по вершинам случайной величины (б/д). Теорема Боллобаша о концентрации в четырех значениях.

46. (7) Сравнение оценок хроматического числа через кликовое число и число независимости в терминах случайных графов: одна «почти всегда» значительно лучше другой (распределение кликового числа и числа независимости). [R08, п. 2.7]

47. (10) Теорема о том, что почти наверное жадный алгоритм найдет множество, размер которого лишь, как максимум, в 2 раза отличается от реального. Теорема Кучеры о слабости жадного алгоритма на специальных графах (б/д). (А. Райгородский, "Экстремальные задачи теории графов и Интернет" , Интеллект.)

48. (8) Теорема Эрдеша о графе с большим обхватом и большим хроматическим числом. (Задача 6.3.3.с.)

Глава 7. Алгебраические методы (49-56 1-й семестр, 57-61 2-й семестр)

49. (5) Кнезеровский граф. Верхняя оценка его хроматического числа. Простые нижние оценки. Примеры конкретных кнезеровских графов. Кликовое число и число независимости кнезеровского графа. ([R7] := А. Райгородский, "Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике" , МЦНМО.)

50. (6) Верхняя оценка хроматического числа кнезеровского графа. Теорема Ловаса о хроматическом числе кнезеровского графа (б/д; с доказательством — на ‘8’). [R7]

51. (только в 2014-16) (7) Теорема Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана в разных формулировках, но с доказательством только в случае плоскости и трехмерного пространства. [R7]

52. (6) Максимальное число $m(n,k,t)$ подмножеств n-элементного множества, в каждом из которых ровно k элементов и среди которых любые два множества пересекаются не по t элементам. Точное значение для $m(n,3,1)$: явная конструкция и оценка по индукции. Линейно-алгебраическая оценка для $m(n,3,1)$. Аналогичная оценка для $m(n,5,2)$ и ее асимптотическая неулучшаемость. [R15]

53. (7) Общая теорема Франкла–Уилсона для $m(n, k, k-p)$ при $k < 2p$. (Задача 7.1.7 и [R15].)

54. (только в 2015) (9) Теорема Франкла–Уилсона об $m(n, k, k-p)$ при $k \geqslant 2p$. [R15]

55. (только в 2015) (7) Точность обеих теорем Франкла–Уилсона при постоянных k, t. Максимальное число k-элементных подмножеств n-элементного множества, из которых любые два множества пересекаются не более чем по t элементам. Связь с теорией кодирования, теорема Редля (б/д). [R15]

56. (6) Хроматические числа пространств. Интерпретация величины $m(n, k, t)$ как числа независимости дистанционного графа. Нижняя оценка хроматического числа пространства с помощью результатов для $m(n, k, t)$. Возможные улучшения. ([R15] и А. Райгородский, "Хроматические числа".)

57. (5) Матрицы Адамара. Необходимое условие существования. Гипотеза Адамара. Нормализация. Теорема о плотности порядков матрицы Адамара в натуральном ряде (б/д).(Задачи 7.2.1-7.2.3, определения и гипотеза в §7.2, [Hal, AS].)

58. (6) Задача о раскраске гиперграфа: верхняя оценка уклонения величиной $\sqrt{2n \ln(2s)}$ с доказательством и величиной $6\sqrt{n}$ б/д. [R10]

59. (8) Задача о раскраске гиперграфа: нижняя оценка уклонения величиной $\sqrt{n}/2$ с помощью матриц Адамара.[R10]

60. (4) Интерпретация матриц Адамара в терминах дистанционного графа, возникающего в теореме Франкла–Уилсона (клики).

61. (только в 2014 и 2018) (9) Проблема Борсука. Нижняя оценка числа Борсука. (п. 7.3 и [R14])

ОБРАЗЦЫ ВОПРОСОВ НА ЭКЗАМЕНЕ

Предварительная часть (вариант 2014 года). *Нужен только ответ/формулировка; доказательства приводить не нужно.*

1. Найдите асимптотику биномиального коэффициента $\binom{n}{k}$ при $k^2 = o(n)$.

2. Найдите количество деревьев с данными n вершинами, с точностью до изоморфизма.

3. Дайте определение гамильтонова цикла в графе. (Можно использовать только определение графа. Если Вы используете другие определения — например, цикла — то их тоже нужно дать.)

4. Сформулируйте теорему о хроматическом числе случайного графа в модели $G(n,p)$ при $p = o(1/n)$ и $n \to \infty$.

5. У дистанционного графа на плоскости $4n$ вершин, и среди любых $n+1$ вершин есть ребро. Сформулируйте наилучшую оценку на количество ребер такого графа, доказанную в курсе.

6. Найдите кликовое число графа, вершины которого — все 5-элементные подмножества 20-элементного множества, и ребро между вершинами проводится в том и только в том случае, когда множества не пересекаются?

7. Найдите $R_4(15,4,4,4)$.

8. Найдите максимальную VC-размерность семейства подмножеств множества $\{1,\dots,10\}$ в каждом подмножестве которого более 5 элементов.

Основная часть (точно таких вопросов на экзамене не будет). *Здесь главное — не ответы, а доказательства. В частности, формулировки и доказательства всех используемых студентом результатов из курса ДА (в частности, всех результатов из курса ДА, используемых для доказательства других результатов из курса ДА). При этом можно пользоваться без доказательства результатами из других курсов.*

Вопрос из билета. Существует ли 57 подмножеств 60-элементного множества, в каждом из которых 30 элементов, и любые два из которых пересекаются по 15 элементам?

Критерии. Максимальное количество очков 7.

Конструкция с использованием задачи 7.2.4 без ее доказательства — 2 очка.

За подсказку ‘вспомните матрицы Адамара’ снимается 2 очка.

Доп. вопрос попроще. Каково наибольшее число ребер в графе с 52 вершинами, в котором среди любых 5 вершин есть 2, не соединенные ребром?

Критерии. Максимальное количество очков 6.

Правильный ответ без доказательства — 1 очко.

Правильный ответ с выводом из теоремы Турана без ее доказательства — 2 очка.

Правильный ответ с выводом из теоремы Турана плюс конструкция ‘максимального графа’ без доказательства верхней оценки — 3 очка.

За подсказку ‘вспомните теорему Турана’ снимается 2 очка.

Доп. вопрос посложней. Укажите функцию $f(n)$, для которой $R(n,n) \gtrsim f(n)$. (Чем больше функция, тем выше Ваша оценка.)

Критерии. Максимальное количество очков 9.

За оценку типа $R(n,n) \gtrsim n^2$ ставится 1 очко.

За оценку типа 4.1.5.b ставится 6 очков.

За оценку типа 6.2.21.b ставится 9 очков.

Если при этом не доказывается неравенство $n! \geqslant (n/e)^n$ (6.1.6.c), то снимается 2 очка (это неравенство несложно доказывается без использования формулы Стирлинга; его вывод из формулы Стирлинга, не доказанной в курсе, не считается доказательством).

Если при этом не доказывается ЛЛЛ в симметричной форме (6.2.15.b), то снимается 5 очков (ЛЛЛ в симметричной форме студент может либо напрямую, либо *доказав* ЛЛЛ в несимметричной форме и выведя ЛЛЛ в симметричной форме; вывод симметричной формы из несимметричной в этом месте не считается доказательством симметричной, хотя и входит в программу).

За подсказку — формулировку 4.1.5.c — снимается 2 очка. За подсказку — формулировку каждого следующего пункта этой задачи — снимается еще по 1.

Призовой вопрос. Существуют ли хотя бы одно k и подмножество k-мерного пространства, которое невозможно разбить на $2k^2$ частей меньшего диаметра?