

# НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Курс А.Б. Скопенкова

На спецкурсе изучаются важные приложения алгебраической топологии к классической проблеме классификации заузливаний многообразий в евклидовых пространствах.

Для его изучения достаточно знания основ гомотопической топологии и теории гомологий [S20, §§3-8]. Однако для работы с новыми понятиями потребуется математическая культура. Каждое следующее занятие рассчитано на тех, кто решил большинство простых задач на понимание предыдущих.

## Программа

1. Двойственность Александера и невложимость проективных пространств [S20, §11]
2. Трюк Уитни и сильная теорема Уитни о вложении. [S06, §4], [P06]
3. Лемма о поглощении и теорема Пенроуза-Уайтхеда-Зимана о вложимости замкнутого  $k$ -связного многообразия в  $\mathbb{R}^{2n-k}$ . [PWZ], [S06, §8]
4. Инвариант Хефлигера-Ву вложений. Теорема Хефлигера о его полноте (без доказательства). Примеры неполноты. [S06, §5]
5. Конструкция Понтрягина. Применение к гомотопической классификации отображений  $S^3 \rightarrow S^2$ . [S20, §8] [P06]
6. Препятствия к гомотопности отображений комплекса в сферу. [FF, §18] Эквивариантная версия для  $\mathbb{Z}_2$ -комплекса и сферы с антиподальной инволюцией. [A93, Ch. 7]
7. Связь эквивариантных и обычных когомологий: точная последовательность Тома-Смита-Гизина-Ричардсона. [FF, §15], [A93, Ch. 7], [GS12]
8. Изотопическая классификация вложений замкнутого  $k$ -связного многообразия в  $\mathbb{R}^{2n-k+1}$ . (Здесь и в п. 9 можно использовать без доказательства теорему Хефлигера, а также и лемму о когомологиях и непрерывных отображениях [GS12, Lemma 2].) [A93, Ch. 7]
9. То же в  $\mathbb{R}^{2n-2k+1}$  (без доказательства перехода от погружений к непрерывным отображениям). [BG]
10. Параметрическая связная сумма (без доказательства леммы о стандартизации изотопий). [S15, §2], [CS, §2]
11. Изменение формы Зейферта при параметрической связной сумме. [CS, §2, §3]
12. Применение параметрической связной суммы к реализации значений формы Зейферта. [CS, §2]

## Литература

- [A93] *M. Adachi*. Embeddings and Immersions. AMS, 1993.
- [BG] *J. Becker and H. Glover*. Note on the embedding of manifolds in Euclidean space, Proc. of the AMS 27 (1971), 405–410.
- [CS] *D. Crowley and A. Skopenkov*, Embeddings of non-simply-connected 4-manifolds in 7-space. I. Classification modulo knots, Moscow Math. J., 21 (2021). arXiv:1611.04738.
- [GS] *D. Gonçalves and A. Skopenkov*, Embeddings of homology equivalent manifolds with boundary, Topol. Appl., 153:12 (2006) 2026-2034. arxiv:1207.1326.
- [FF] А. Т. Фоменко и Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии, М, Наука, 1989.
- [P06] *B. В. Прасолов*, Элементы теории гомологий, Москва, МЦНМО, 2006.
- [PWZ] *R. Penrose, J. H. C. Whitehead and E. C. Zeeman*, Embeddings of manifolds in a Euclidean space, Ann. of Math. (2) 73 (1961) 613–623.
- [S06] А. Skopenkov, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342, arXiv:0604045.
- [S15] *A. Skopenkov*, Classification of knotted tori, Proc. A of the Royal Soc. of Edinburgh, 150:2 (2020), 549-567. Full version: arXiv:1502.04470.
- [S20] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, М, МЦНМО, 2020, <http://www.mscme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.