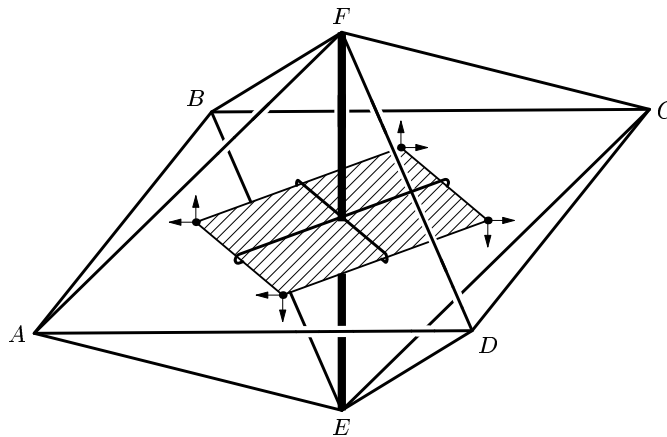


ЛИНЕЙНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТОПОЛОГИИ: ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ

Курс А.Б. Скопенкова



Будут изучаться важнейшие наглядные объекты математики: графы, гиперграфы, многообразия и векторные поля на них. Основное содержание курса — демонстрация базовых идей алгебраической и дифференциальной топологии на примере решения классических проблем о существовании и классификации векторных полей, а также о гиперграфах в многомерном пространстве. Вслед за великими математиками 20-го века участники откроют некоторые основные понятия и теоремы топологии (гомологические группы, гомотопические группы, расслоения и характеристические классы), что поможет им совершить собственные настолько же полезные открытия.

Основные идеи будут представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для его изучения достаточно знания топологии, см. <https://www.mccme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#fivt>. Однако для работы с новыми понятиями потребуются математическая культура. Каждая следующая лекция рассчитана на тех, кто разобрался с материалом предыдущих (каждое домашнее задание, кроме первого, описывает материал предыдущей лекции). Подробную информацию (в частности, задачи к 1-му занятию и правила выставления оценки за экзамен) можно найти, огулив домашнюю страницу А.Б. Скопенкова и перейдя с нее на <http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#combtop14>

Литература

[S20] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, М, МЦНМО, 2020, <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.

[S] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <https://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf>.

Примерная программа

1. Обзор наглядных результатов и применений топологии. [S, §1.2], [S20, §§1.2, 2.3, 3.1, 8.1, 9.1] Появление теоретико-числовых свойств размерности (например, степеней двоек) в топологических задачах о векторных полях (без доказательства). [S20, §§11.1, 12.1]
2. Полиномиальный алгоритм распознавания планарности графов. [S, §1]
3. Конфигурационное пространство пар различных точек (взрезанный квадрат). Взрезанные квадраты некоторых графов. Идея построения алгоритма распознавания реализуемости k -мерных гиперграфов в \mathbb{R}^d при $2d \geq 3k + 3$. [S, §7.2]
4. Простейшие теоремы топологической комбинаторики. [S, §§2, 6]
5. Ориентируемость двумерных многообразий: гомологии и первый класс Штифеля-Уитни. Гомологии и форма пересечений двумерного многообразия. Применения. [S20, §§6.1-6.5]
6. Критерий Эйлера-Пуанкаре существования ненулевого касательного векторного поля на поверхности. [S20, §4]
7. Векторные поля на подмножествах трехмерного пространства. Теорема Брауэра о неподвижной точке для трехмерного шара. Степень отображения. [S20, §8]
8. Определение и примеры трехмерных поверхностей в евклидовом пространстве. Триангуляции. Теорема Хопфа о существовании ненулевого касательного векторного поля на любом трехмерном многообразии. Критерий Хопфа существования ненулевого касательного векторного поля для многомерных многообразий. [S20, §§8.1-8.6].
9. Инвариант Хопфа. Гомотопическая классификация векторных полей на трехмерной сфере, или отображений трехмерной сферы в двумерную. [S20, §8.7]
10. Существование ортонормированных систем векторных полей. Теорема Штифеля о параллелизуемости трехмерных многообразий. Доказательство: гомологии, характеристические классы и двойственность Пуанкаре для трехмерных многообразий. [S20, §§9.1-9.7].
- 11.* Фундаментальная группа. Фундаментальная группа произведения. Фундаментальная группа и комбинаторика слов. Теорема Зейферта-ван Кампена о фундаментальной группе объединения (без доказательства). Ее применение к различению узлов. [S20, §10.5]
- 12.* Алгоритмические проблемы топологии, связанные с двумерными гиперграфами и трехмерными многообразиями. [S20, §§10.1-10.4] Теоремы алгоритмической нераспознаваемости для многомерных многообразий (без доказательства).