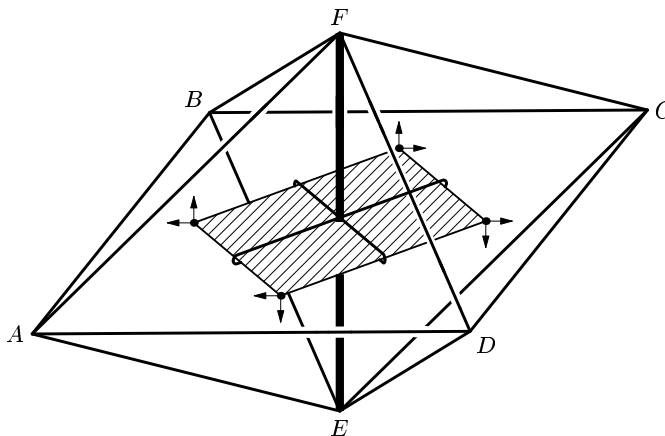


# ЛИНЕЙНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТОПОЛОГИИ: ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ

Курс А.Б. Скопенкова



Изучаются важнейшие наглядные объекты математики: графы, гиперграфы и двумерные многообразия, узлы и зацепления, векторные поля и непрерывные / кусочно-линейные отображения. Основное содержание курса — демонстрация идей алгебраической топологии на примере ярких результатов о графах, гиперграфах, векторных полях и неподвижных точках. Эти результаты подобраны так, чтобы подвести участников к основным понятиям и методам алгебраической топологии, что поможет им в будущем совершить собственные настолько же полезные открытия (не обязательно в математике!).

Основные идеи будут представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для его изучения не нужны предварительные знания. Однако для работы с новыми понятиями потребуется математическая культура. Каждая следующая лекция рассчитана на тех, кто разобрался с материалом предыдущих (каждое домашнее задание, кроме первого, описывает материал предыдущей лекции).

Программа курса 2022 года упрощена ввиду того, что участники не изучали предварительно курс «Введение в топологию (дискретные структуры и алгоритмы в топологии)».

## Примерная программа

(Ссылки на книги из <http://www.mcsme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#refere>)

1. Обзор наглядных результатов и применений топологии. [S, §1.2], [S20, §§1.2, 2.3, 3.1, 8.1]
2. Наглядные задачи о поверхностях. Разбивающих кривые. [S20, §2.2]
3. Планарность графов. Индекс пересечения ломаных на плоскости. Алгоритмы распознавания планарности графов. [S, §1]
4. Реализации графов и раскраски карт. Неравенство Эйлера. [S20, §2.3, §2.4]
5. Двумерные утолщения графов и их планарность. [S20, §§1.3, 1.4]

6. Критерии реализуемости утолщений на данной поверхности. Род графа и алгоритм его нахождения. [S20, §§2.5, 2.6]
7. Наглядные задачи о гомеоморфности поверхностей. [S20, §2.7]
8. Двумерные гиперграфы и симплициальные комплексы. Кусочно-линейная гомеоморфность. Двумерные многообразия. Классификация.\* [S20, §5]
9. Изотопии узлов и зацеплений в пространстве. [P, §§1,2], [S20u, §1-§4] Коэффициент зацепления. [S, §§4.1, 4.2] Целочисленный коэффициент зацепления. [S, §4.3]
10. Простейшие теоремы рамсеевской теории зацеплений. Примеры гиперграфов, линейно не реализуемых в трехмерном и четырехмерном пространстве. [S14]
11. Применение соображений непрерывности. Непрерывные отображения. Теоремы Брауэра о неподвижной точке и Борсука-Улама — эквивалентные формулировки, следствия, доказательства. Применения в математической экономике. [S20, §3.1, §3.6]
12. Векторные поля на подмножествах плоскости. Гомотопность непрерывных отображений и векторных полей. Теорема Борсука о продолжении гомотопии. [S20, §3.2-3.7]
13. Степень отображения окружности в окружность. Существование поднятий пути и гомотопии. [S20, §3.8, §3.9] Гомотопическая тривиальность отображений из окружности в сферу. [S20, §3.11]
14. Векторные поля на двумерных поверхностях. Теорема о еже. [S20, §4.1]
15. Ориентируемость двумерных многообразий: гомологии и первый класс Штифеля-Уитни. Гомологии и форма пересечений двумерного многообразия. Применения. [S20, §§6.1-6.5]
16. Критерий Эйлера-Пуанкаре существования ненулевого касательного векторного поля на поверхности. [S20, §4]
17. Векторные поля на подмножествах трехмерного пространства. Теорема Брауэра о неподвижной точке для трехмерного шара. Степень отображения. [S20, §8]
18. Определение и примеры трехмерных поверхностей в евклидовом пространстве. Триангуляции. Теорема Хопфа о существовании ненулевого касательного векторного поля на любом трехмерном многообразии. Критерий Хопфа существования ненулевого касательного векторного поля для многомерных многообразий. [S20, §§8.1-8.6].