

ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЮ (ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ И АЛГОРИТМЫ В ТОПОЛОГИИ)

Курс А.Д. Руховича и А.Б. Скопенкова

Изучаются важнейшие наглядные объекты математики: графы и двумерные многообразия, узлы и зацепления, векторные поля и непрерывные / кусочно-линейные отображения. Основное содержание курса — демонстрация идей топологии на примере ярких результатов о графах, гиперграфах, векторных полях и неподвижных точках. Эти результаты подобраны так, чтобы подвести участников к основным понятиям и методам топологии, что поможет им в будущем совершить собственные настолько же полезные открытия (не обязательно в математике!).

Основные идеи показываются на простейших частных случаях («олимпиадных» примерах), свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. При этом для работы с новыми понятиями потребуется (и будет развиваться) математическая культура. Каждая следующая лекция рассчитана на тех, кто разобрался с материалом предыдущих (каждое домашнее задание, кроме первого, описывает материал предыдущей лекции).

Основная литература и программа

[S20] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, М, МЦНМО, 2020, <http://www.mcsme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.

[S] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <https://www.mcsme.ru/circles/oim/algor.pdf>.

[S20u] A. Skopenkov. A user's guide to basic knot and link theory, in *Topology, Geometry, and Dynamics, Contemporary Mathematics*, vol. 772, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2021, pp. 281–309. Russian version: *Mat. Prosveschenie* 27 (2021), 128–165. arXiv:2001.01472.

1. Обзор наглядных результатов и применений топологии. [S, §1.2], [S20, §§1.2, 2.3, 3.1]
2. Наглядные задачи о поверхностях. Разбивающих кривые. [S20, §§2.2, 2.3]
3. Планарность графов. Индекс пересечения ломаных на плоскости. Алгоритмы распознавания планарности графов. [S, §1]
4. Реализации графов и раскраски карт. Неравенство Эйлера. [S20, §§2.4, 2.5]
- 5.* Двумерные утолщения графов и их планарность. [S20, §§1.3, 1.4]
- 6.* Критерии реализуемости утолщений на данной поверхности. Род графа и алгоритм его нахождения. [S20, §2.6]
7. Наглядные задачи о гомеоморфности поверхностей. [S20, §2.7]
8. Двумерные гиперграфы и симплициальные комплексы. Кусочно-линейная гомеоморфность. Двумерные многообразия. Классификация.* [S20, §5]
9. Изотопии узлов и зацеплений в пространстве. [S20u, §1-§3] Коэффициент зацепления. [S, §4.1-§4.3], [S20u, §4, §8] Комбинаторные определения простейших инвариантов узлов (арф-инвариант и правильные раскраски).* [S20u, §5, §6]
- 10.* Простейшие теоремы рамсеевской теории зацеплений. Примеры гиперграфов, линейно не реализуемых в трехмерном и четырехмерном пространстве. §§1.1, 1.3, 2 из [S14] A. Skopenkov, *Realizability of hypergraphs and intrinsic linking theory*. arXiv:1402.0658.
11. Применение соображений непрерывности. Непрерывные отображения. Теоремы Брауэра о неподвижной точке и Борсука-Улама — эквивалентные формулировки, следствия, доказательства. Применения в математической экономике. [S20, §3.1, §3.6]
12. Векторные поля на подмножествах плоскости. Гомотопность непрерывных отображений и векторных полей. Теорема Борсука о продолжении гомотопии. [S20, §3.2-3.7]

13. Степень отображения окружности в окружность. Существование поднятий пути и гомотопии. Гомотопическая классификация отображений окружности в окружность. [S20, §§3.8, 3.9, 3.10] Гомотопическая тривиальность отображений из окружности в сферу и из сферы в окружность.* [S20, §3.11]

14. Векторные поля на двумерных поверхностях. Теорема о еже. [S20, §4.1]