ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ ДЛЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

спецкурс проф. А.Б. Скопенкова

Будут изучаться важные наглядные объекты математики: маломерные поверхности, векторные поля на них, графы и гиперграфы на них. Основное содержание курса — демонстрация алгебраических идей теории гомологий на примере решения классических проблем о существовании векторных полей и вложений. Эта теория имеет приложения во многих областях естествознания. Венец спецкурса — простое доказательство знаменитой теоремы Штифеля о параллелизуемости любого ориентируемого трехмерного многообразия.

Основные идеи показываются на ‘олимпиадных’ примерах: размерности не выше 3, на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для изучения курса достаточно знания основ математического анализа нескольких переменных, а также гомотопической классификации отображений окружности в окружность [Sk15, §3]. Все новые определения будут даны. Однако для работы с новыми понятиями потребуется математическая культура. Каждое следующее занятие будет рассчитано на тех, кто решил простые задачи на понимание предыдущего.

Курс разбит на два модуля, за каждый из которых можно получить половину кредита. Второй модуль рассчитан на тех, кто сдал первый. Экзамен за каждый модуль состоит из решения задач в течение семестра и письменной работы в марте и в мае.

Подробная информация (в частности, задачи к 1-му занятию и литература): страница А. Скопенкова, перейти на `http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#vefi`.

Примерная ПРОГРАММА. Параграфы указаны по книгам

[Sk15] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, 2015, `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf`.

[Sk] А. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, `http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`.

1. Векторные поля на двумерных поверхностях. Критерий Эйлера-Пуанкаре существования ненулевого касательного векторного поля на двумерной поверхности. [Sk15, §4]

2. Нормальные векторные поля на двумерных поверхностях. Существование ненулевого нормального векторного поля на ориентируемой двумерной поверхности в четырехмерном пространстве. [Sk15, §4]

3. Гомологии двумерных многообразий. Форма пересечений. Ее невырожденность (двойственность Пуанкаре). [Sk15, §6]

4. Полиномиальный алгоритм распознавания планарности графов и вложимости n-мерных гиперграфов в $2n$-мерное пространство. [Sk, §1, §5]

5. Векторные поля на подмножествах многомерного пространства. Теорема Брауэра для многомерного шара. [Sk15, §8]

6. Теорема Хопфа о существовании ненулевого касательного векторного поля на любом трехмерном многообразии. Критерий Хопфа существования ненулевого касательного векторного поля для многомерных многообразий. [Sk15, §8]

7. Ориентируемость трехмерных многообразий. [Sk15, §9]

8. Утолщаемость двумерных гиперграфов до трехмерных многообразий. [Sk, §8]

9. Существование ортонормированных систем векторных полей. Характеристические классы для трехмерных многообразий. [Sk15, §9]

10. Гомологии трехмерных многообразий. Форма пересечений. Ее невырожденность (двойственность Пуанкаре). [Sk15, §10, §14]

11. Простое доказательство теоремы Штифеля о параллелизуемости любого ориентируемого трехмерного многообразия. [Sk15, §9]

12.* (Без полных доказательств.) Степени двойки, двоичное разложения числа n, алгебры с делением на $\mathbb{R}^n$ и невложимость n-мерных многообразий. [Sk15, §11, §12]