

# ОТ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ К ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ КЛАССАМ

Курс А.Б. Скопенкова

Будут изучаться важные объекты математики: векторные поля и их системы на многообразиях, вложения и погружения многообразий. Основное содержание курса — демонстрация идей и методов *теории характеристических классов* на примере решения классических проблем об этих объектах. Эта теория имеет приложения во многих областях естествознания.

Основные идеи показываются на простейших частных случаях («олимпиадных» примерах), свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для его изучения достаточно знания основ математического анализа нескольких переменных, а также умения применять степень отображения из сферы в сферу. При этом для работы с новыми понятиями потребуется (и будет развиваться) математическая культура. Каждая следующая лекция рассчитана на тех, кто разобрался с материалом предыдущих (каждое домашнее задание, кроме первого, описывает материал предыдущей лекции).

Экзамен состоит из решения задач в течение семестра и письменных контрольных работ.

Подробная информация (в частности, задачи к 1-му занятию): страница А. Скопенкова, перейти на <http://www.mcsme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#vefi>.

## Примерная программа

[S20] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, М, МЦНМО, 2020, <http://www.mcsme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.

1. Степени двойки и алгебры с делением на  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Параллелизуемость сфер, проективных пространств и трехмерных многообразий. Формулировки. [S20, §9.1]

2. Существование ортонормированных систем векторных полей. Характеристические классы для трехмерных многообразий. [S20, §9]

3. Простое доказательство теоремы Штифеля о параллелизуемости любого ориентируемого трехмерного многообразия. [S20, §9]

4. Гомологии многообразий. Форма пересечений по модулю 2. Ее невырожденность (двойственность Пуанкаре). [S20, §10]

5. Системы векторных полей и характеристические классы для четырехмерных и многомерных многообразий. [S20, §9]

6. Степени двойки, двоичное разложения числа  $n$  и невложимость  $n$ -мерных многообразий (формулировки). [S20, §12.1]

7. Нормальные векторные поля на двумерных поверхностях. Существование ненулевого нормального векторного поля на ориентируемой двумерной поверхности в четырехмерном пространстве. [S20, §4]

8.\* Нормальные векторные поля для трехмерных многообразий. [S20, §8]

9. Системы нормальных векторных полей и нормальные характеристические классы. [S20, §12]

10. Расслоения и доказательство теоремы об алгебрах с делением. [S20, §13.1-13.3]

11\*. Классификация расслоений. [S20, §13.4]

12.\* Классификация трехмерных утолщений графов. Утолщаемость двумерных гиперграфов до трехмерных многообразий. Классификация трехмерных утолщений ложных поверхностей.

§8 из [S] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <https://www.mcsme.ru/circles/oim/algor.pdf>.

13.\* Гомотопическая классификация векторных полей на трехмерных многообразиях (без полного доказательства). Приложения к ядерной физике. [S20, §8]