ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ С АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Курс А.Б. Скопенкова

К задачам о гомотопической классификации отображений сводятся многие проблемы топологии (в т.ч., возникшие в приложениях). На спецкурсе будут изучаться и применяться основные методы теории гомотопий. Мы начнем с базовых методов, а закончим недавними алгоритмическими результатами.

Основные идеи будут представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для его изучения достаточно уметь классифицировать с точностью до гомотопии непрерывные отображения из окружности в себя (см., например, [S20, §3]; нужно именно классифицировать, а не выводить классификацию из теорем, доказательства которых Вы не знаете). Однако для работы с новыми понятиями потребуется математическая культура. Каждое следующее занятие рассчитано на тех, кто решил большинство простых задач на понимание предыдущих.

Курс ориентирован на студентов 2-4 курсов ФИВТ, но его могут изучать все желающие, справляющиеся с домашними заданиями. Подробную информацию (в частности, задачи к 1-му занятию и правила выставления оценки за экзамен) см. на `http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#superfluid`

Примерная программа

1. Гомотопическая класификация замкнутых ломаных на плоскости без двух точек. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания гомотопности. [S20, §3.2, §14.3]

2. Зачем нужна гомотопическая классификация. Результаты о векторных полях и о погружениях многообразий (выворачиваемость сферы наизнанку). [S20, §9, §15.2].

3. Зачем нужна гомотопическая классификация. Конфигурационное пространство пар различных точек (взрезанный квадрат). Идея построения алгоритма распознавания реализуемости k-мерных гиперграфов в $\mathbb{R}^d$ при $2d \geq 3k+3$. [S, §5.9]

4.* Зачем нужна гомотопическая классификация. Простейшие теоремы топологической комбинаторики. [S, §§2, 5.9] Конфигурационное пространство наборов из r различных точек. [S18, §2]

5. Отображения графа в окружность и в проективную плоскость. [S, §7.1, 7.2]

6.* Нечетные ($\mathbb{Z}_2$-эквивариантные) отображения графа. [S, §7.3]

7. Общее положение. Отображения комплекса в сферу большей размерности. [S20, §8.1]

8. Отображения сферы, многообразия и комплекса в окружность. [S20, §8] [S, §7.4] Реализация подмногообразиями целочисленных циклов коразмерности 1. [S20, §14.9]

9. Степень отображения. Отображения сферы в себя. [S20, §8.2] Отображения многообразия и комплекса в сферу той же размерности. [S, §7.5]

10.* Теорема Борсука-Улама (многомерный случай без доказательства). Применения в комбинаторике. [M03]

11. Коэффициент зацепления. Инвариант Хопфа. Гомотопическая классификация векторных полей на трехмерной сфере, или отображений трехмерной сферы в двумерную. Применения в теории электричества и магнетизма. [S20, §8.7]

12. Произведение Уайтхеда. Алгоритмическая неразрешимость проблемы продолжения отображений для односвязного случая. Теоремы алгоритмической разрешимости (без доказательства). [S20e]

13.* Гомотопические группы. Коэффициенты зацепления в гомотопических группах. Зацепление Уайтхеда и многомерные кольца Борромео. Классификация Хефлигера-Зимана многомерных зацеплений (без доказательства). [S20, §14] [S06, §3]

Литература

[M03] J. Matoušek. Using the Borsuk-Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Springer Verlag, 2008.

[S06] A. Skopenkov, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342, arXiv:0604045.

[S18] A. Skopenkov, Invariants of graph drawings in the plane, Arnold Math. J., 6 (2020) 21–55; full version: arXiv:1805.10237.

[S20] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, М, МЦНМО, 2020, `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf`.

[S20e] A. Skopenkov. Extendability of simplicial maps is undecidable, arXiv:2008.00492.

[S] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, `https://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`.