ПРЕПЯТСТВИЯ И АЛГОРИТМЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Курс А.Б. Скопенкова

Хорошо известно, что существует быстрый (точнее – линейный) алгоритм, определяющий, вложим ли данный граф в плоскость, т.е., можно ли граф расположить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались и не самопересекались. Мы рассмотрим аналогичную проблему для гиперграфов в пространствах произвольной размерности: как распознать вложимость k-мерного гиперграфа в d-мерное пространство? Эта и близкие проблемы возникли на стыке комбинаторики, геометрии, топологии и программирования. Они активно изучаются в последнее время. Они привлекательны сочетанием продвинутой теории и близости к возможным приложениям.

Основное содержание курса — «конкретное» (в частности, алгоритмически мотивированное) введение в алгебраическую топологию. Основные идеи показываются на простейших частных случаях («олимпиадных» примерах), свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого и курс становится доступным для начинающих, и удается быстро добраться до интересных сложных теоретически важных результатов.

Для изучения курса необходима сдача хотя бы двух из четырех курсов «Введение в топологию (дискретные структуры и алгоритмы в топологии)», «Конкретная дифференциальная топология» (прежнее название: «Линейно-алгебраический метод в топологии: теория гомологий»), «Алгоритмы распознавания реализуемости гиперграфов», и «Введение в топологическую комбинаторику». Все необходимые определения (гиперграф, вложимость, NP-трудность, группы гомологий и т.д.) будут даны (или напомнены). При этом для работы с новыми понятиями потребуется (и будет развиваться) математическая культура, адекватная теоретичности изучаемого курса (см. общие критерии для занятий и экзамена: `https://old.mccme.ru//circles//oim/home/bally.pdf`, стр. 3). Каждая следующая лекция рассчитана на тех, кто разобрался с материалом предыдущих (каждое домашнее задание, кроме первого, описывает материал предыдущей лекции). Будут предложены красивые (но не обязательные) задачи для исследования.

Литература

[S] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, `https://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`.

[S06] A. Skopenkov, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342, arXiv:0604045.

[S14] A. Skopenkov, Realizability of hypergraphs and intrinsic linking theory. arXiv:1402.0658. Русская версия: Мат. Просвещение, 32 (2024), 125–159.

Примерная программа

1. Определения гиперграфа (симплициального комплекса), линейного и кусочно-линейного вложений в d-мерное пространство. Формулировки алгоритмических и NP-трудностных результатов о вложимости гиперграфов. [S, §6]

2. Число пересечения цепей и коэффициент зацепления циклов в d-мерном пространстве. [S, §5]

3. Алгоритм Ван Кампена распознавания вложимости k-мерных гиперграфов в $2k$-мерное пространство для $k > 2$. [S, §6] Доказательство: вывод вложимости из алгебраической вложимости. [S06, §4]

4. О вложимости k-мерных гиперграфов в $2k$-мерные многообразия.

E. Kogan and A. Skopenkov. A short exposition of the Patak-Tancer theorem on non-embeddability of k-complexes in $2k$-manifolds, arXiv:2106.14010.

E. Kogan and A. Skopenkov. Embeddings of k-complexes in $2k$-manifolds and minimum rank of partial symmetric matrices, arXiv:2112.06636.

5. Построение колец Борромео при помощи тора. Трехмерная и четырехмерная леммы о кольцах Борромео. [S, §§4,5]

6. Кольца Борромео. Число Милнора трехкомпонентных зацеплений. Число Сато-Левина.* [S, §4]

7. Теоремы о неотъемлемой зацепленности в четырехмерном пространстве. [S, §6]

8. Пример Фридмана-Крушкаля-Тайхнера неполноты препятствия Ван Кампена к вложимости двумерных гиперграфов в четырехмерное пространство. [S, §6] Обобщение на многомерные полиэдры (Segal-Spiez-Skopenkov 1992, 1998)*. [S06, §7]

9. Обобщение предыдущего примера: построение двумерного гиперграфа P_f по формуле f для булевой функции. Часть доказательства NP-трудности распознавания вложимости двумерных гиперграфов в четырехмерное пространство. [S, §6]

10. Необходимые сведения из алгебраической топологии и их применения.

11. Алгоритм распознавания вложимости с использованием топологии конфигурационных пространств. [S06, §5]