Отзыв на брошюру А.Б.Скопенкова "Еще несколько доказательств из Книги: разрешимость и неразрешимость уравнений в радикалах".

Брошюра представляет собой попытку генетического введения в теорию Галуа. В качестве основных примеров используются построение правильных многоугольников циркулем и линейкой (Гаусс) и критерий Кронекера неразрешимости уравнений простой степени в радикалах. И то, и другое представлено в виде цепочки задач, формулировки и решения которых оперируют понятиями, не выходящими за пределы школьной программы.

Представляется, что автор преследует две цели. Первая цель - смоделировать для читателя-школьника такую последовательность рассуждений обобщённого классика конца XVIII - начала XIX века, которая привела бы читателя к самостоятельному открытию основных концепций теории Галуа. Вторая - сделать это, старательно избегая предъявления даже самых простых понятий, используемых для формулировки результатов теории Галуа современными математиками.

Автор правильно, с моей точки зрения, делает упор на алгоритмические проблемы, на которых не слишком принято останавливаться при традиционном изложении. Объяснение разницы между однозначным вещественным и мультизначным комплексным калькуляторами и подробное освещение вопроса о том, до каких алгебраических чисел можно добраться, используя тот или другой, и как именно следует действовать в конкретных случаях, выглядит полезным.

Однако, поставив перед собой вторую из указанных выше целей, автор (и вместе с ним читатель) вынуждены проделывать кучу лишней работы. Причем речь идёт не о конкретных подсчетах с разными исходными данными, призванных закрепить в сознании читателя механизм работы алгоритма и дать ему побывать, что называется, "в шкуре пилота", а о необходимости вместо работы с удобными общими понятиями каждый раз модифицировать одно и то же, по существу, рассуждение, применительно к разным частным случаям.

Скрытность автора приводит, например, к тому, что "лемма о сопряжении" (гомоморфизм расширений переводит корни полинома с коэффициентами в основном поле в себя) формулируется 5 раз (в задачах 4.3, 4.6, 4.19, 4.23 и в тексте п. 5.2). Для того, чтобы проверить, что элемент поля $\mathbf{Q}(i, \epsilon_5)$, инвариантный относительно подгруппы $(\mathbf{Z}/(5))^*$ в группе Галуа, лежит в подполе $\mathbf{Q}(i)$, делаются вычисления в кольце

$\mathbf{Z}[i][T]/(T^5 - 1)$, которые в дальнейшем воспроизводятся еще раз (в первый раз доказывается построимость циркулем и линейкой правильного 5-угольника, во второй - n- угольника, при условии, что $n = 2^{2^s} + 1$ - простое).

Понятие степени расширения, без явного введения которого автор героически обходится почти что на всем протяжении текста брошюры, расплачиваясь за это некоторым количеством лишних слов и формул, впервые появляется в примечании на стр. 28, а используется только в п.5.5 при доказательстве вещественной версии теоремы Кронекера. Что касается нормальных расширений, то впрямую о них вообще нигде не сказано.

На мой взгляд, удачная реализация педагогического замысла автора вряд ли возможна. Процент будущих Гельфандов и Гротендиков, способных самостоятельно воссоздавать уже существующие теории, не имея доступа к тому, что сделано предшественниками, среди потенциальных читателей брошюры вряд ли так уж велик. Баланс плюсов от соответствующей тренировки ума и минусов от потери времени даже для упомянутых выше гениев не факт, что был положительным. Теория Галуа принадлежит к числу базовых составляющих современного математического языка, и мне кажется странным создавать у школьника, интересующегося математикой, впечатление, что это какая-то "феня", общаться на которой разрешается, только пройдя инициацию в форме исследования проблемы решения уравнений в радикалах с использованием старого языка . Тем более, что эта проблема, хоть она и сыграла решающую роль в создании теории, на современный взгляд, как справедливо заметил Э.Б.Винберг, на которого автор брошюры честно сослался, является, скорее, маргинальной.

Понятное школьнику изложение необходимой части теории (нормальные расширения, основная теорема теории Галуа и теория расширений Куммера, вычисление группы Галуа кругового поля) вряд ли добавило бы более 50% к объёму брошюры. Для читателя, который всем этим владеет, включенные в брошюру задачи могут послужить прекрасным способом применить выученный язык на практике. Часть из них можно порешать и без предварительной подготовки, но, начиная примерно с третьего параграфа, необходимо параллельно изучать теорию, иначе за деревьями гарантированно не будет видно леса. Неподготовленный читатель просто не сможет оценить содержательную часть брошюры, т.е. понять разницу между извлечением корней и построением циклических расширений, разобраться, как работает вещественный калькулятор, увидеть, что стоит за эффективным доказательством теоремы Гаусса из п.3.4 и т.д.

Подводя итоги, я хочу сказать, что рецензируемая брошюра содержит немало интересного материала и, вероятно, найдет своего читателя, но для первоначального изучения теории Галуа без дополнительных пособий она, на мой взгляд, непригодна.

Что касается технической части, то я бы посоветовал поменять нумерацию. Внутри каждого параграфа подпункты, задачи и их решения нумеруются параллельно (каждый такой номер выглядит как $N.M$), что несколько запутывает читателя. Быть может, стоило бы подпунктам присвоить буквенную нумерацию (типа 4А, 4Б и т.п.), а номера решений дать не тем, что номера задач, шрифтом.

В подпункте 3.2 (строка 1) пропущено слово "задачи"
В конце подпункта 5.1, где вводится определение поля, лучше убрать замечание в скобках ("полем в математике называется другой объект"), которое может создать у читателя неверное представление.
стр. 28 (строка 2 сверху) написано "коэффициеты"
$\mathbf{Z}_p$ чаще обозначают кольцо целых p - адических чисел, а не поле вычетов $\mathbf{Z} \mod p$; как бы читателям потом не пришлось переучиваться.