ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЧЕСКУЮ КОМБИНАТОРИКУ

Курс А.Б. Скопенкова

Топологическая комбинаторика возникла на стыке комбинаторики, геометрии, топологии и программирования. На примере изучения основных классических и современных результатов мы освоим основные методы этой области — конфигурационные пространства, эквивариантные отображения, когомологии.

Основные идеи будут представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для его изучения достаточно уметь классифицировать с точностью до гомотопии непрерывные отображения из окружности в себя (см., например, [S20, §3]; нужно именно классифицировать, а не выводить классификацию из теорем, доказательства которых Вы не знаете). Однако для работы с новыми понятиями потребуется математическая культура. Каждое следующее занятие рассчитано на тех, кто решил большинство простых задач на понимание предыдущих.

Курс могут изучать все желающие, справляющиеся с домашними заданиями. Подробную информацию (в частности, задачи к 1-му занятию и правила выставления оценки за экзамен) см. на `http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#topcomb`

Примерная программа

1. Теорема Брауэра о неподвижной точке и лемма Шпернера. Применения в математической экономике. [S20, §3, §8], [Sh89]

2. Степень отображения. Теорема Борсука-Улама и лемма Такера. Применения в комбинаторике. [S20, §3, §8], [M03]

3. Линейные и топологические теоремы о неотъемлемых пересечениях: Радона и ван Кампена-Флореса. Доказательство: числа Радона / ван Кампена или вывод из теоремы Борсука-Улама. [S, §§1.4, 2.1, 2.2, 5.8, 5.9, 6.1].

4. Конфигурационное пространство пар различных точек (взрезанный квадрат). Взрезанные квадраты некоторых графов. Идея построения алгоритма распознавания реализуемости k-мерных гиперграфов в $\mathbb{R}^d$ при $2d \geq 3k+3$. Взрезанный джойн. [S, §5.12], [S06, §5]

5. Отображения без r-кратных точек и почти r-вложения. Линейные и топологические теоремы и гипотезы о неотъемлемых многократных пересечениях: Тверберга и ван обобщенная Кампена-Флореса (формулировки). [S, §2.3, §6], [S16, §1].

6. Вывод линейной теоремы Тверберга из цветной теоремы Каратеодори. Редукции топологической гипотезы Тверберга к маломерным остовам и к «крайней» размерности. План доказательства контрпримера к гипотезе в случае, ко-

гда r — не степень простого. [RRS], [S, §2.2, §6], [S16, §1.2, §3.1].

7. Конфигурационное пространство наборов из r различных точек. Взрезанный r-кратный джойн. Радужные разбиения. Обобщение теоремы Борсука-Улама на действие группы вычетов по модулю простого r. Доказательство топологической теоремы Тверберга для простого r. [S18, §2.3]

8. Зачем еще нужна гомотопическая классификация: результаты о существовании и классификации векторных полей (теорема Штифеля), многомерных зацеплений (числа Понтрягина-Серра) и погружений (выворачиваемость сферы наизнанку). [S20, §9, §15.2].

9. Алгоритм распознавания гомотопности замкнутых ломаных на плоскости без двух точек. [S20, §3.2]

10. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания гомотопности замкнутых ломаных в двумерных гиперграфах (т.е. петель в двумерных комплексах). [S20, §14.3]

11. Алгоритм распознавания гомотопности отображений графа в окружность и в проективную плоскость. Когомологии графа. [S, §7.1, 7.2]

12. Алгоритм распознавания гомотопности отображения гиперграфа в окружность. [S20, §8] [S, §7.4]

13. Алгоритм распознавания гомотопности отображения гиперграфа в сферу той же размерности. [S, §7.5]

14. Целочисленный коэффициент зацепления. [S, §4.3]

15. Инвариант Хопфа. Гомотопическая классификация векторных полей на трехмерной сфере, или отображений трехмерной сферы в двумерную. [S20, §8.7]

16. Гомотопические группы. Коэффициенты зацепления в гомотопических группах. Многомерные зацепление Уайтхеда и кольца Борромео. Произведение Уайтхеда. [S20, §14.4], [S06, §3], [S20e]

17. Алгоритмическая неразрешимость проблемы продолжения отображений для односвязного случая. [S20e]

Литература

[L13] M. de Longueville. A course in topological combinatorics. Universitext. Springer, New York (2013).

[M03] J. Matoušek. Using the Borsuk-Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Springer Verlag, 2008.

[RRS] V. Retinskiy, A. Ryabichev and A. Skopenkov. Motivated exposition of the proof of the Tverberg Theorem (in Russian). Mat. Prosveschenie, 27 (2021), 166–169. arXiv:2008.08361.

[Sh89] Ю. А. Шашкин, Неподвижные точки, М., Наука, 1989.

[S06] A. Skopenkov, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342, arXiv:0604045.

[S16] А. Б. Скопенков, Топологическая гипотеза Тверберга, УМН, 73:2 (2018), 344–377; полная обновляемая версия: arXiv:1605.05141.

[S18] A. Skopenkov, Invariants of graph drawings in the plane, Arnold Math. J., 6 (2020) 21–55; full updated version: arXiv:1805.10237.

[S20] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, М, МЦНМО, 2020, http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf.

[S20e] A. Skopenkov. Extendability of simplicial maps is undecidable, arXiv:2008.00492.

[S] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, https://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf.