Кратные пересечения в геометрической топологии, топологической комбинаторике и комбинаторной геометрии

спецкурс А.Б. Скопенкова в НМУ по пятницам с 14.09.2018

Хорошо известно, что существует быстрый (точнее – линейный) алгоритм, определяющий, вложим ли данный граф в плоскость, т.е., можно ли граф расположить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались и не самопересекались. Мы рассмотрим аналогичную задачу для гиперграфов в пространствах произвольной размерности: как распознать вложимость n-мерного гиперграфа в m-мерное пространство? Мы рассмотрим также аналогичную задачу с заменой вложений на отображения, при которых каждая точка имеет не более r прообразов (для фиксированного r). Эти задачи возникли на стыке комбинаторики, геометрии, топологии и программирования. Они активно изучаются в последнее время.

Основное содержание курса — «конкретное» (в частности, алгоритмически мотивированное) введение в алгебраическую топологию. Основные идеи будут представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого спецкурс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для изучения курса достаточно знания основ теории графов. Все необходимые определения (гиперграф, вложимость, NP-трудность, группы гомологий и т.д.) будут даны. Однако для работы с новыми понятиями потребуется математическая культура. Каждая следующая лекция будет рассчитана на тех, кто решил большинство простых задач на понимание предыдущих. Будут предложены красивые задачи для исследования.

Курс разбит на два модуля, за каждый из которых можно получить половину кредита, а второй из которых рассчитан на тех, кто сдал первый. Экзамен за каждый модуль состоит из решения задач в течение семестра и письменной работы.

Примерная программа (несколько первых или несколько последних пунктов будут пропущены в зависимости от возможности и желания участников курса)

1. Число пересечения для ломаных на плоскости [S, §1.3, S18, §1.3]. Число пересечения для циклов дополнительной размерности в d-мерном пространстве [S].

2. Простейшие теоремы рамсеевской теории зацеплений. Примеры гиперграфов, не реализуемых в трехмерном и четырехмерном пространстве. [S14]

3. Нереализуемость в четырехмерном пространстве декартова произведение $K_5 \times K_5$ (решение проблемы Менгера). [S14]

4. Определения гиперграфа (симплициального комплекса), линейного и кусочно-линейного вложений в d-мерное пространство. Теорема общего положения. [S, §5]

5. Вложимость двумерных гиперграфов: критерии планарности (Куратовский и Халин-Юнг), примеры для трехмерного и четырехмерного пространства, формулировки алгоритмических и NP-трудностных результатов (Матушек-Седгвик-Танцер-Вагнер). [S, §5]

6. Алгоритм Ван Кампена распознавания планарности графов и вложимости k-мерных гиперграфов в d-мерное пространство для $d = 2k \geq 6$ [S, §§1.2.3, 1.5, 5].

7. Конфигурационные пространства и планарность [S, §7.8.1]. Препятствие к вложимости в терминах конфигурационных пространств. Полиномиальный алгоритм Хефлигера-Вебера распознавания вложимости k-мерных гиперграфов в d-мерное пространство для $2d \geq 3k+3$ (только формулировка). [S06, §5]

8. Простейшие теоремы топологической комбинаторики. [2, §§2,5.9] [S18, §2]

9. Топологическая гипотеза Тверберга. Отображения без r-кратных точек и почти r-вложения. Редукции топологической гипотезы Тверберга к маломерным остовам и к «крайней» размерности. [S, §5.9.4], [S16]

10. План доказательства контрпримера к топологической гипотезе Тверберга в случае, когда r — не степень простого. Трюк Уитни. Его обобщение на r-кратные пересечения. [S16]

11.* Доказательство топологической теоремы Тверберга для r простого [S, §2.3, S16, S18].

12.* Препятствия ван Кампена к наличию отображений без r-кратных точек. Теорема Езайдына о его тривиальности при r — не степени простого (формулировка). [S, §2.4, §5.9.5]

13.* Построение колец Борромео при помощи тора и коммутатора. Простое доказательство леммы о кольцах Борромео. [S, §4.4, §4.5]

14.* Пример Фридмана-Крушкаля-Тайхнера неполноты препятствия Ван Кампена к вложимости двумерных гиперграфов в четырехмерное пространство. Обобщение: построение двумерного гиперграфа P_f по формуле f для булевой функции. Часть доказательства NP-трудности распознавания вложимости двумерных гиперграфов в четырехмерное пространство. [S, §5]

Литература

[S] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, `https://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`.

[S06] A. Skopenkov. Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342. `http://arxiv.org/abs/math/0604045`.

[S14] A. Skopenkov. Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory. `http://arxiv.org/abs/1402.0658`.

[S16] А. Б. Скопенков, Топологическая гипотеза Тверберга, УМН, 73:2 (2018), 344–377. `http://arxiv.org/abs/1605.05141`.

[S18] A. Skopenkov. Invariants of graph drawings in the plane, `http://arxiv.org/abs/1805.10237`.