

Какие-то задачи

...А в душе у них весна...

1. В треугольнике ABC на стороне AC нашлись такие точки D и E , что $AB = AD$ и $BE = EC$ (E между A и D). Точка F — середина дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что точки B, E, D, F лежат на одной окружности.
2. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M , а внутри треугольника AMD — точка N таким образом, что $\angle MNA + \angle MCB = \angle MND + \angle MBC = 180^\circ$. Докажите, что прямые MN и AB параллельны.
3. Окружность, вписанная в угол с вершиной O , касается его сторон в точках A и B , K — произвольная точка на меньшей из двух дуг AB этой окружности. На прямой OB взята точка L такая, что прямые OA и KL параллельны. Пусть M — точка пересечения окружности ω , описанной около треугольника KLB , с прямой AK , отличная от K . Докажите, что прямая OM касается окружности ω .
4. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана такая точка K , что $KD = DC$, $2\angle BAC = \angle KDC$, $2\angle DAC = \angle KBC$. Докажите, что $\angle KDA = \angle BCA$ или $\angle KDA = \angle KBA$.
5. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M . Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K . Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM , перпендикулярна биссектрисе угла AKB .
6. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом A , равным 60° . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABD . Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K . Найдите отношение AO/OK .
7. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB перпендикулярна стороне CD , а сторона BC — стороне DE . Докажите, что если $AB = AE = ED = 1$, то $BC + CD < 1$.