В.Протасов (МГУ)

Элементы геометрии треугольника.

Тема 1. Принцип Карно.

`Везде далее используются обозначения:` ABC – данный треугольник, A_i, B_i, C_i, $i = 1, 2, \dots$ – точки на сторонах BC, CA и AB соответственно (или на продолжениях этих сторон, если это оговорено в условии задачи); O – центр описанной окружности, I – центр вписанной окружности, G – точка пересечения медиан (центр тяжести, центроид), H – точка пересечения высот (ортоцентр), r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно. Ортотреугольник – треугольник с вершинами в основаниях высот, серединный треугольник – треугольник с вершинами в серединах сторон данного треугольника.

Задача 1 *(Теорема Карно).* В точках A_1, B_1, C_1, лежащих на сторонах треугольника ABC, или на их продолжениях, восставлены перпендикуляры к этим сторонам. Доказать, что они пересекаются в одной точке тогда и только тогда когда

$$C_1A^2 - C_1B^2 + A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 \quad = \quad 0.$$

`Указание.` Пусть перпендикуляры, восставленые в точках A_1 и B_1 пересекаются в точке M. Покажите, что $B_1A^2 - B_1C^2 = MA^2 - MC^2$ и т.д. Данный прием, когда разность квадратов наклонных заменяется на разность квадратов их проекций, называется *принципом Карно.*

Задача 2. Сформулируйте и докажите теорему Карно для произвольных точек плоскости A_1, B_1, C_1, не обязательно лежащих на прямых, содержащих стороны треугольника ABC.

Задача 3. Пусть вневписанная окружность треугольника касается его стороны AB в точке C_1 и касается продолжений двух других сторон. Аналогично определяются точки A_1 и B_1. Докажите, что перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника в точках A_1, B_1, C_1 пересекаются в одной точке.

Задача 4. На плоскости даны три пересекающиеся окружности. Докажите, что три их общие хорды пересекаются в одной точке.

Задача 5. Пользуясь предыдущей задачей, получите еще одно доказательство теоремы о пересечении трех высот треугольника.

`Указание.` Рассмотрите три окружности, построенные на сторонах треугольника как на диаметрах.

Задача 6. Докажите, что геометрическим местом точек, степени которых относительно двух данных окружностей равны, является прямая, перпендикулярная линии центров окружностей (*радикальная ось*).

`Напоминание.` Степенью точки относительно окружности называется число $d^2 - R^2$, где R – радиус окружности, и d – расстояние от ее центра до данной точки. Для точки, лежащей внутри окружности, степень равна (взятому со знаком минус) произведению отрезков любой хорды, проходящей через эту точку. Для точки, лежащей вне окружности, степень равна произведению любой секущей, проходящей через эту точку, на ее внешнюю часть, а также равна квадрату отрезка касательной от данной точки до точки касания.

Задача 7. Охарактеризуйте все треугольники, у которых перпендикуляры к сторонам, восставленные в точках их пересечения с биссектрисами противоположных углов, пересекаются в одной точке.

Задача 8. На сторонах треугольника ABC построены прямоугольники ABB_1A_1, BCC_2B_2 и CAA_2C_1. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке, либо параллельны.

Тема 2. Центр вписанной окружности.

Задача 1. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами прямоугольника.

`Указание.` Начните с того, что для любого треугольника ABC выполнено равенство $\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB$. Затем покажите, что вершины A, B и центры вписанных окружностей треугольников ABC и ABD лежат на одной окружности. Потом сделайте то же для вершин B, C.

Задача 2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников ABC и CDA равна сумме радиусов вписанных окружностей треугольников BCD, DAB.

Задача 3. Через точку M внутри данного треугольника провели три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника.

a) Докажите, что M лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

`Указание.` Используйте гомотетию с центром в точке I.

b) Укажите способ построения такой точки M для данного треугольника.

c) Пусть x – радиус данных окружностей. Докажите, что $\frac{2r}{3} \le x \le \frac{R}{3}$. Верно ли, что если одно из неравенств обращается в равенство, то треугольник – правильный ?

`Указание.` Три треугольника, гомотетичные данному относительно его вершин с коэффициентом $\frac{2}{3}$, имеют единственную общую точку. Из этого следует, что x не может быть меньше, чем $\frac{2r}{3}$. Далее, из подобия исходного треугольника и треугольника с вершинами в центрах данных окружностей следует, что $\frac{x}{R} = \frac{r-x}{r} = 1 - \frac{x}{r} \le 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Задача 4. Каждая из трех равных окружностей касается двух сторон треугольника, четвертая окружность того же радиуса касается этих трех окружностей.

a) Докажите, что центр четвертой окружности лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

b) Укажите способ построения таких окружностей для данного треугольника.

c) Выразите радиус данных окружностей через радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника.

Задача 5. Дан треугольник ABC. Точки A_0, B_0, C_0 – середины его сторон. Вписанная окружность касается стороны BC в точке A_1, точка A_2 симметрична A_1 относительно биссектрисы угла A. Аналогично определяются точки B_2 и C_2. Докажите, что прямые A_0A_2, B_0B_2 и C_0C_2 пересекаются в одной точке.

Тема 3. Прямая Эйлера.

`Напоминание.` В любом треугольнике точки O, G и H лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причем $GH = 2\,GO$.

Задача 1. Докажите, что прямая Эйлера параллельна стороне AB тогда и только тогда когда $\operatorname{tg}\angle A \cdot \operatorname{tg}\angle B = 3$.

Задача 2. Прямая Эйлера треугольника параллельна одной из его биссектрис. Докажите, что либо треугольник равнобедренный, либо один из его углов равен $120°$.

Задача 3. В треугольнике ABC угол $\angle A$ равен $120°$. Докажите, что $OH = AB + AC$.

Задача 4. Докажите, что три окружности, каждая из которых проходит через вершину треугольника, основание его высоты, опущенной из этой вершины, и касается радиуса описанной окружности, проведенного к данной вершине, пересекаются в двух точках, расположенных на прямой Эйлера треугольника.

`Указание.` Докажите, что степени точки O относительно этих окружностей равны, затем то же про точку H, а затем воспользуйтесь задачей 6 темы 1.

Задача 5. Все углы треугольника ABC меньше $120°$, T – его *точка Торичелли* ($\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$).

a) Докажите, что прямая Эйлера треугольника ATB параллельна прямой CT.

`Указание.` Можно воспользоваться задачей 2.

b) Докажите, что прямые Эйлера треугольников ATB, BTC и CTA пересекаются в одной точке.

Задача 6. В вершинах треугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что центр описанной окружности треугольника, образованного этими тремя касательными, лежит на прямой Эйлера исходного треугольника.

Тема 4. Ортоцентр, ортотреугольник и окружность девяти точек.

Задача 1. Внутри a) равностороннего b) равнобедренного треугольника ABC найти геометрическое место точек M, для которых $\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = 90°$.

Задача 2. Пусть a, b, c – длины сторон остроугольного треугольника, u, v, w – расстояния от соответствующих вершин до ортоцентра. Докажите, что $avw + bwu + cuv = abc$.

Указание. Воспользуйтесь формулой $S = \frac{abc}{4R}$.

Задача 3. Дан остроугольный треугольник. Найдите для него все *треугольные бильярды*, т.е., все вписанные в него треугольники, обладающие следующим свойством: две стороны, выходящие из любой вершины вписанного треугольника образуют равные углы с соответствующей стороной данного треугольника.

Задача 4. Пусть $A_1B_1C_1$ – ортотреугольник треугольника ABC, A_2, B_2, C_2 – проекции вершин A, B, C на прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A_2, B_2, C_2 на прямые BC, CA, AB соответственно пересекаются в одной точке.

Указание. Воспользуйтесь принципом Карно.

Задача 5. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника и относительно середин сторон треугольника, лежат на описанной окружности.

Задача 6. Применив результат предыдущей задачи и гомотетию с коэффициентом $\frac{1}{2}$, докажите, что середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности (*окружность девяти точек*). Радиус этой окружности равен $\frac{R}{2}$, а центр находится в середине отрезка OH.

Задача 7. Длины сторон остроугольного треугольника умножили на косинусы противоположных углов. Докажите, что из трех получившихся отрезков можно сложить треугольник. Чему равен радиус его описанной окружности, если радиус описанной окружности исходного треугольника равен R ?

Задача 8. Пусть ABC – данный треугольник, $A_1B_1C_1$ — его ортотреугольник. Докажите, что прямые Эйлера треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CB_1A_1 пересекаются в одной точке, лежащей на окружности девяти точек треугольника ABC (*теорема Тебо*).

Задача 9. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что окружности девяти точек треугольников ABC, BCD, CDA, DAB пересекаются в одной точке.

Задача 10. Дан вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и перпендикулярная одной из сторон делит противоположную сторону пополам (*теорема Брахмагупты*).

Задача 11. Дан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что восемь точек: середины сторон и проекции середин сторон на противоположные стороны лежат на одной окружности (*окружность восьми точек* четырехугольника).

Тема 5. Несколько неравенств связанных с треугольником.

Задача 1. Верно ли, что площадь ортотреугольника не превосходит площади серединного треугольника ?

Задача 2. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A', B', C'. Докажите, что $S_{AC'BA'CB'} \geq 2S_{ABC}$.

Задача 3. С помощью пункта с) задачи 3 темы 2 докажите *неравенство Эйлера:* $R \geq 2\,r$. Для каких треугольников оно обращается в равенство ?

Задача 4. Найдите наименьшее α, для которого верно следующее утверждение:

В угол A равный α вписана окружность, касающаяся его сторон в точках B и C. Прямая, касающаяся окружности в некоторой точке M, пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Тогда $S_{PAQ} < S_{BMC}$.

Указание. Докажите сначала, что треугольник BMC подобен треугольнику QIP, где I – центр вписанной окружности треугольника PAQ. Кроме того, $S_{QIP}/S_{PAQ} = PQ/p$, где p – периметр треугольника PAQ. Полезен будет также тот факт, что $p = 2\,AB$.

В задачах 5-8 мы обозначаем через a, b, c длины сторон данного треугольника, x, y, z – расстояния от произвольной точки M внутри треугольника до его сторон, а u, v, w – расстояния от нее до вершин треугольника.

Задача 5. Докажите, что для произвольной точки M, лежащей внутри треугольника имеют место неравенства:

a) $u \geq \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z$;

Указание. Выразите двумя способами площадь невыпуклого четырехугольника со сторонами b, c, w, v.

b) $u \geq \frac{c}{a}y + \frac{b}{a}z$;

Указание. Рассмотрите точку, симметричную точке M относительно соответствующей биссектрисы треугольника.

Задача 6. Покажите, что внутри остроугольного треугольника найдется единственная точка M, для которой все три неравенства из пункта a) задачи 5 (для трех вершин треугольника) обращаются в равенства. Что это за точка ? Тот же задание про три неравенства из пункта b).

Задача 7. Докажите, что для произвольной точки M, лежащей внутри треугольника, имеем $u + v + w \geq 2\left(x + y + z\right)$ (*неравенство Эрдеша*). Для каких треугольников и каких точек M это неравенство обращается в равенство ?

Указание. Сложите все 6 неравенств из задачи 5 и воспользуйтесь неравенством $t + \frac{1}{t} \geq 2,\ t > 0$.

Задача 8. Докажите, что для произвольной точки M, лежащей внутри треугольника, имеем $2\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right) \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Задача 8. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка M. Докажите, что один из углов $\angle MAB, \angle MBC, \angle MCA$ не превосходит $30°$. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для четырехугольника.