

## Цепи и антицепи

А.В. Спивак

### Монотонные подпоследовательности

Я расскажу об интересной и незаслуженно малоизвестной школьникам области математики — теории частично упорядоченных множеств. Прежде чем начнём доказывать теоремы и даже прежде чем будут сформулированы определения, познакомимся с несколькими интересными задачами.

**Задача 1.** *Из любых ли пяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать три, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания?*

**Решение.** Пусть эти числа, слева направо, суть  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и  $x_5$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $x_1 < x_2$ . (Иначе можно в дальнейшем рассуждении заменить везде знаки « $<$ » на знаки « $>$ » и наоборот.) Если при этом ещё и  $x_2 < x_3$ , то первые три числа расположены в порядке возрастания. Значит, надо разобрать случай  $x_1 < x_2 > x_3$ . Если  $x_3 > x_4$ , то годится тройка  $x_2 > x_3 > x_4$ . Поэтому можно считать, что  $x_1 < x_2 > x_3 < x_4$ . Далее, если  $x_4 < x_5$ , то годится тройка  $x_3 < x_4 < x_5$ . Таким образом, надо разобрать случай

$$x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > x_5.$$

Сравним числа  $x_2$  и  $x_4$ . Если  $x_2 < x_4$ , то годится тройка  $x_1 < x_2 < x_4$ . Если же  $x_2 > x_4$ , то годится  $x_2 > x_4 > x_5$ . Мы решили пункт а).

Есть и более короткий способ решения. Пусть  $a$  и  $b$  — наибольшее и наименьшее из выписанных чисел. Если между ними есть какое-то число, то утверждение верно. Если же они стоят рядом, то либо слева, либо справа от них есть ещё хотя бы два числа. Они и образуют нужную тройку либо с числом  $a$ , либо с числом  $b$ .

**Задача 2.** *Из любых ли девяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать четыре, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания?*

**Решение.** Из девяти чисел монотонную четырёхчленную последовательность можно выбрать не всегда. Пример — последовательность 3, 2, 1, 6, 5, 4, 9, 8, 7.

**Упражнение 1.** Выпишите числа от 1 до 24 в строку таким образом, чтобы самая длинная возрастающая подпоследовательность состояла из 4 чисел, а самая длинная убывающая — из 6.

**Задача 3.** Докажите, что из любых десяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать четыре, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания.

Самое простое решение этой задачи основано на утверждении задачи М1774 «Задачника “Кванта”».

### Обеденные столы

Напомним условие задачи М1774.

*Король сказочной страны пригласил на пир всех людоедов своей страны. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. Известно, что наидлиннейшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй — третьего и так далее, состоит из шести людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов за шесть столов, что ни за каким столом никто не будет хотеть съесть никого из сидящих за тем же столом.*

Вы удивлены? Не понимаете, как связана эта задача с задачей 3? Да самым непосредственным образом! Будем говорить, что число  $b$  хочет съесть число  $a$ , если  $a < b$  и в рассматриваемом ряду  $a$  расположено левее, чем  $b$  (на рисунке 1 это нарисовано для последовательности 3, 1, 6, 2, 4, 7, 5; желание съесть показано стрелочкой). Тогда цепочка чисел, в которой каждое следующее хочет съесть предыдущее — это возрастающая подпоследовательность. А сидящие за одним столом числа, ни одно из которых не хочет съесть никакое другое — это убывающая подпоследовательность.

Разумеется, число шесть в условии задачи М1774 надо не забыть заменить на число три. И если нет убывающей подпоследовательности длины 4, другими словами, если самая длинная цепочка, в которой каждое число хочет съесть следующее за ним, состоит не более чем из 3 чисел, то мы сможем в силу задачи М1774 рассадить 10 имеющихся чисел за тремя столами так, что

ни за каким столом никто никого не будет хотеть скушать. Поскольку  $\frac{10}{3} > 3$ , то хотя бы за одним столом окажутся не менее чем 4 числа. Они образуют искомую возрастающую последовательность.

Пора приступить к решению задачи M1774.

*Первый способ.* Обозначим людоедов точками и проведём стрелки, обозначающие, кто кого хочет съесть (на рисунке 2,а изображена одна из возможных ситуаций). Если бы существовал цикл, то можно было бы, двигаясь вдоль стрелок, прийти из некоторой точки в неё саму, и длина цепочки, о которой сказано в условии, не была бы ограничена сверху: «крутятся по циклу», мы смогли бы построить сколь угодно длинную такую цепочку.

Значит, циклов нет. Теперь для каждого людоеда  $L$  посмотрим, какие цепочки начинаются с него. (Быть может, людоеда  $L$  тоже кого-то хочет съесть, но мы на это не обращаем внимания и начинаем цепочку именно с  $L$ . Если  $L$  — людоед-вегетарианец, то цепочка состоит только из самого  $L$ .) Количество людоедов в самой длинной из таких цепочек — это и есть номер стола, за который мы посадим людоеда  $L$ . (Вы поняли, почему посаженные нами за один стол людоеды не хотят съесть одного другого? Если нет, перечитайте этот абзац!)

Возможно, однако, кому-то по душе больше придётся другой, более формальный способ изложения (по сути того же самого) решения.

*Второй способ.* Всех людоедов-вегетарианцев, никого не желающих скушать (они отмечены на рисунке 2,а светлыми кружочками), посадим за первый стол (рис. 2,б). Исключим их из рассмотрения. Среди оставшихся людоедов обнаружатся свои вегетарианцы, которых мы посадим за второй стол (рис. 2,в). Исключив из рассмотрения и этих людоедов, обнаружим новых вегетарианцев и посадим их за третий стол (рис. 2,г), и так далее. В конце концов все окажутся рассажены за 6 столов (рис. 2,г). Задача решена.

### «Самый левый из правых»

Теперь для разнообразия — задачи об отрезках прямой.

**Задача 4.** *Можно ли разместить на прямой а) 6; б) 7 отрезков так, чтобы из любых трёх отрезков нашлись два пересекающихся*

ся и никакая точка прямой не принадлежала четырём или более отрезкам?

**Решение.** а) Можно. Например, это отрезки  $[0; 1]$ ,  $[0; 2]$ ,  $[0; 3]$ ,  $[2; 5]$ ,  $[3; 5]$  и  $[4; 5]$ .

б) Нельзя. Сначала расскажу решение, не использующее утверждение задачи М1774. Рассуждаем «от противного». Пусть удалось расположить 7 отрезков так, что из любых трёх отрезков некоторые два пересекаются и никакая точка не принадлежит четырём отрезкам сразу. Обозначим буквой  $B$  самый левый из правых (да-да, именно так!) концов рассматриваемых семи отрезков. Пусть  $AB$  — один из этих отрезков. Поскольку точка  $B$  принадлежит не более чем трём из семи отрезков, то отрезок  $AB$  пересекается не более чем с двумя другими отрезками. (Подумайте, почему это так! Суть в том, что никакой отрезок не лежит целиком левее точки  $B$ .)

Значит, существуют четыре отрезка, целиком расположенные правее точки  $B$ . Каждые два из них пересекаются. (Иначе вместе с отрезком  $AB$  два непересекающихся отрезка образовывали бы тройку отрезков, никакие два из которых не пересекаются.) Но если каждые два из четырёх отрезков пересекаются, то все эти четыре отрезка имеют общую точку — таковой точкой является, например, самый левый из их правых концов.

Задача 4 решена. Правда, довольно сложным и трудным для запоминания способом. Основанное на утверждении задачи М1774 удивительно короткое и прозрачное решение я расскажу в следующем разделе статьи, а пока обсудим последнее использованное в решении задачи 4 соображение (математик сказал бы, что это — одномерный случай теоремы Хелли). Оно заслуживает выделения в качестве отдельной леммы.

**Лемма.** *Если любые два из нескольких отрезков пересекаются, то существует точка, принадлежащая всем этим отрезкам.*

**Доказательство** вы уже знаете: такой точкой является, например, самый левый из правых концов этих отрезков. (Или самый правый из левых.)

Примерно так же, как задачу о семи отрезках, можно решить и следующую задачу. (Она содержится под номером 160 в книге Н. Б. Васильева и А. А. Егорова «Задачи Всесоюзных математических олимпиад».)

**Задача 5.** *На прямой даны 50 отрезков. Докажите, что*

если среди них нельзя найти 8 отрезков, каждые два из которых имеют общую точку, то среди данных 50 отрезков можно найти 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

**Решение.** Пусть  $[a_1; b_1]$  — отрезок с наименьшим (то есть самым левым) правым концом. Если количество отрезков, которым принадлежит точка  $b_1$ , больше семи, то задача решена. Если их не больше семи, то существуют по крайней мере 43 отрезка, которые целиком лежат правее  $[a_1; b_1]$ . Выберем из них отрезок  $[a_2; b_2]$  с наименьшим правым концом. Тогда либо  $b_2$  принадлежит восьми отрезкам, либо имеется 36 отрезков, лежащих правее  $b_2$ . Продолжая это рассуждение, мы либо найдём точку, принадлежащую восьми отрезкам, либо получим такие семь попарно не пересекающихся отрезков  $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_7; b_7]$ , что правее  $[a_k; b_k]$ , где  $k = 1, 2, \dots, 7$ , лежит не меньше  $50 - 7k$  отрезков, в частности, правее  $[a_7; b_7]$  лежит ещё по крайней мере один отрезок  $[a_8; b_8]$ , что и требовалось.

#### Упражнения

2. Из любых  $tn + 1$  отрезков прямой можно выбрать  $t + 1$  попарно не пересекающихся отрезков или  $n + 1$  отрезков, имеющих общую точку. Докажите это.

3. Пусть на прямой задана произвольная система отрезков. Обозначим через  $M$  наименьшее количество точек на прямой таких, что каждый из отрезков системы содержит одну из этих точек; через  $t$  — наибольшее количество попарно непересекающихся отрезков, которые можно выбрать из данной системы. Тогда  $M = t$ . Докажите это.

## Чумы

Тренировка закончена. Пора дать определение. Частично упорядоченное множество (чум)  $M$  — это множество, для любых двух элементов  $a, b$  которого известно, находятся они в некотором отношении  $<$  или нет. При этом должны быть выполнены следующие аксиомы:

- если  $a < b$  и  $b < c$ , то  $a < c$ ;
- если  $a < b$ , то  $a \neq b$ ;
- неравенства  $a < b$  и  $b < a$  не могут быть выполнены одновременно.

(Впрочем, третья аксиома, очевидно, следует из первых двух.) Множество, любые два элемента которого сравнимы, то есть множество, для любых элементов  $a$  и  $b$  которого выполнено одно из соотношений  $a < b$ ,  $a = b$  и  $b < a$ , называют *линейно упорядоченным* или, коротко, *цепью*. Элемент  $a$  называют *максимальным* (соответственно, *минимальным*), если неравенство  $a < b$  (соответственно,  $b < a$ ) не выполнено ни для какого другого элемента  $b$ .

Приведу несколько примеров частично упорядоченных множеств: множество всех вещественных чисел (оно не только частично, но и даже линейно упорядочено, то есть любые два числа можно сравнить); множество всех отрезков прямой, где один отрезок считается больше другого, если все точки первого лежат правее точек второго; множество всех натуральных чисел, упорядоченное по делимости (то есть одно число больше или равно другому, если первое число делится на второе без остатка); множество всех подмножеств данного множества, упорядоченное по включению (то есть одно множество больше или равно другому, если все элементы второго множества являются и элементами первого множества).

Обобщением доказанных выше утверждений о числах и отрезках является следующая теорема:

*В частично упорядоченном множестве из  $tn + 1$  элементов есть либо цепь из идущих в порядке возрастания  $t + 1$  элементов, либо  $n + 1$  попарно несравнимых элементов (так называемая антицепь).*

Чтобы применить эту теорему, например, к задаче об отрезках, можно считать, что один отрезок «больше» другого (в терминах M1774: один отрезок хочет съесть другой), если он целиком лежит правее; тогда любая система «попарно несравнимых» отрезки обязательно имеет общую точку (ею служит самый левый из их правых концов).

Доказывать теорему я не буду: вы легко выведете её из задачи о людоедах. После этого, подумав о задаче M1774 ещё немного, вы выведете из неё следующее утверждение:

*Обозначим через  $d$  наибольшее количество элементов цепи данного конечного частично упорядоченного множества  $M$ . Тогда  $M$  можно разбить на  $d$  антицепей.*

### Теорема Дилуорса

Если поменять слова «цепь» и «антицепь» местами, то мы получим гораздо более трудно доказываемое свойство частично упорядоченных множеств.

**Теорема Дилуорса.** *Обозначим через  $n$  наибольшее количество элементов антицепи данного конечного частично упорядоченного множества  $M$ . Тогда  $M$  можно разбить на  $n$  цепей.*

Другими словами, если  $N$  — наименьшее количество цепей, на которые можно разбить данное конечное частично упорядоченное множество  $M$ , а  $n$  — наибольшее количество его попарно несравнимых элементов (то есть наибольшая мощность антицепи), то  $n = N$ .

Прежде чем доказать теорему Дилуорса, разберём один её частный случай.

**Задача 5.** *Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трёх из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.*

**Решение.** Расположим числа по возрастанию. Возьмём наименьшее и окрасим его в первый цвет. Дальше будем рассматривать числа по порядку. До тех пор, пока каждое очередное число будет делиться на предыдущее рассмотренное число, будем использовать только первый цвет. Если так будет продолжаться до конца, то второй цвет вообще не понадобится. Если же очередное число не окажется кратным предыдущего, то придётся использовать второй цвет. (Заметьте: после этого максимальные числа двух цветов не делятся друг на друга.)

Рассмотрим следующее число. Оно делится хотя бы на одно из двух максимальных окрашенных чисел (разных цветов). Если только на одно, то, покрасив его в тот же цвет, получим предыдущую ситуацию. Если же оно делится на оба максимальных, то временно окрасим его в третий цвет. Если следующее число делится на максимальное число третьего цвета, то и его красим в третий цвет, и так пока не встретим число, не делящееся на максимальное число третьего цвета. Это число должно делиться хотя бы на одно из максимальных чисел первых двух цветов. Покрасим его в соответствующий цвет, а все числа третьего цвета — в другой цвет; опять получим ситуацию, когда максимальные числа (разных цветов) не делятся друг на друга. Повторяя эти действия, мы получим искомую раскраску.

**Доказательство теоремы Дилуорса.** Неравенство  $n \leq N$  очевидно: никакие два элемента одной антицепи не могут войти в одну цепь.

Докажем неравенство  $n \geq N$  индукцией по числу элементов множества  $M$ . База очевидна. Пусть неравенство верно для всех частично упорядоченных множеств, содержащих менее  $t$  элементов. Рассмотрим частично упорядоченное множество  $M$ , состоящее из  $t$  элементов. Предположим, в нём есть антицепь  $P$ , не содержащая ни некоторого минимального элемента  $a \in M$ , ни некоторого максимального элемента  $b \in M$ . Обозначим

$$M_+ = \{s \in M \mid \exists p \in P (p \leq s)\}$$

и

$$M_- = \{s \in M \mid \exists p \in P (s \leq p)\}.$$

Эти две формулы означают, что  $M_+$  — множество элементов  $s \in M$ , для которых существует  $p \in P$  такой, что  $p < s$  или  $p = s$ ; аналогично  $M_-$  — это множество элементов  $s \in M$ , для которых существует  $p \in P$  такой, что  $s < p$  или  $p = s$ . Учитывая предположение об антицепи  $P$ , имеем:

$$M_+ \neq M, \quad M_- \neq M, \quad M = M_- \cup M_+.$$

По предположению индукции каждое из множеств  $M_+$  и  $M_-$  можно разложить на  $n$  цепей; «склеивая» эти цепи в точках, принадлежащих  $P$ , получаем разложение множества  $P$  на  $n$  цепей. (На рисунке 3 показана идея этого рассуждения: множество  $M$  разбито на «верхнюю» и «нижнюю» части, пересекающиеся в точности по максимальной антицепи  $P$ . Каждая из этих частей разбита на цепи, которые, будучи «склеены» между собой, дают разбиение множества  $M$  на цепи.)

Первый случай разобран. Предположим теперь, что каждая антицепь содержит либо все максимальные элементы, либо все минимальные элементы множества  $M$ . Поскольку содержащая все минимальные (или все максимальные) элементы антицепь не может содержать ни одного другого элемента, то множество  $M$  имеет не более двух антицепей (и если их две, то одна антицепь состоит из всех минимальных, а другая — из всех максимальных элементов множества  $M$ ). Пусть  $a$  и  $b$  — минимальный и максимальный элементы множества  $M$ , причём  $a \leq b$ . По индуктивному предположению множество  $M \setminus \{a, b\}$  можно разложить не более чем на  $n - 1$  цепь. Добавляя к ним цепь  $a \leq b$ , получаем разложение множества  $M$  не более чем на  $n$  цепей.

**Упражнение 4.** Даны несколько различных натуральных чисел. Если среди любых  $n$  из них можно выбрать два так, что одно делится на другое, то все числа можно покрасить в  $(n - 1)$  цвет так, чтобы из любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое. Докажите это.

---

**Ответы, указания, решения**

1. 6, 5, 4, 3, 2, 1, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 24, 23, 22, 21, 20, 19.

3. Хотя это утверждение легко вывести из задачи M1774, забавы ради рассмотрим другое — чуть более длинное и трудное — доказательство. Неравенство



$M \leq t$  следует из того, что если в системе есть  $t$  попарно непересекающихся отрезков, то на каждый из них нужно поместить по крайней мере по одной точке.

Докажем теперь неравенство  $M \geq t$ . Для этого докажем, что *из системы всегда можно выбрать некоторое количество  $k$  непересекающихся отрезков  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  и в каждом из них выбрать по точке  $A_1, A_2, \dots, A_k$  так, чтобы каждый из отрезков системы содержал одну из этих  $k$  точек.* (Почему этого достаточно? Если удалось найти такие точки и отрезки, то  $M \leq k$  и  $k \leq t$ , откуда  $M \leq t$ .)

Как можно выбрать такие отрезки и точки? Выберем отрезок  $\alpha_1$ , правый конец  $A_1$  которого расположен левее, чем правые концы всех других отрезков. Выбросим из системы все отрезки, содержащие точку  $A_1$  (в частности,  $\alpha_1$ <sup>\*)</sup>).

Каждый из оставшихся отрезков (если такие есть) расположен целиком правее точки  $A_1$  и не пересекается с отрезком  $\alpha_1$ . К оставшимся отрезкам применим ту же процедуру — получим отрезок  $\alpha_2$  и точку  $A_2$ , затем — отрезок  $\alpha_3$  и точку  $A_3$  и так далее до тех пор, пока справа от правого конца  $A_k$  отрезка  $\alpha_k$  не останется ни одного отрезка. Тогда отрезки  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  и точки  $A_1, A_2, \dots, A_k$  — как раз те, что надо!

4. Это — утверждение теоремы Дилуорса для чума, элементы которого — данные натуральные числа, а упорядочение введено при помощи отношения делимости.

---

<sup>\*)</sup>Мы считаем, что отрезки, о которых идёт речь в задаче, замкнутые, то есть содержат свои концевые точки. Впрочем, теорема, как легко убедиться, верна и для открытых интервалов — отрезков, из которых выброшены их концевые точки.