Московская математическая конференция школьников ПРОГРАММА заседания 26.12.2010

Заседания в 310, кроме того, что обозначено ауд. 311. Перерывы в ауд. 309.

10.00-10.10 Открытие. (Председатель Б.Р. Френкин.)

10.10-10.30 А.С. Воронцов и А.И. Сгибнев. Отображения параметрических плоскостей для треугольников. (Председатель Б.Р. Френкин.)

10.35-11.00 А. Рухович, Как пересекаются многогранники в пространстве? (Председатель А.А. Привалов.)

11.00-11.15 Перерыв (чай, кофе, бутерброды)

11.15-11.40 И. Григорьев, Порождение перестановок 'восьмеркой'. (Председатель А.А. Привалов.)

11.45-12.10 П. Долгирев, О прямых в треугольнике, касающихся коники. (Председатель А. А. Заславский.)

12.10-12.40 Перерыв (чай, кофе, бутерброды)

12.40-13.05 А.А. Заславский, Правильные турниры. (Председатель Б.Р. Френкин.)

13.10-13.35 Е.Е. Жукова, Среднее количество взвешиваний. (Председатель А.А. Заславский.)

13.40-14.05 А.Х. Шень, Разложение многоместных функций в композицию двуместных. (Председатель Б.Р. Френкин.)

14.10-14.15 Объявление решения жюри и награждение

14.15-14.30 Перерыв (чай, кофе)

14.30-15.30 Семинар Е.Е. Жуковой

14.30-15.30 Семинар А.С. Воронцова и А.И. Сгибнева (ауд. 311).

АННОТАЦИИ докладов ММКШ-2010

Ссылки на полные тексты: http://www.mccme.ru/mmks/notes.htm

Екатерина Евгеньевна Жукова,

Среднее количество взвешиваний.

Пусть дано n монет, k из которых фальшивые, т.е. отличаются по весу от настоящих. *Взвешиванием* будем называть одно использование двухчашечных весов без гирь. Требуется найти *среднее количество* взвешиваний, необходимых для обнаружения фальшивой монеты данным алгоритмом (т.е. найти *математическое ожидание* количества взвешиваний, которое будет определено в докладе). Рассмотрим два алгоритма для $n = 27$ и $k = 1$.

1. Произвольно делим все монеты на три части по 9 монет. Две из этих частей взвешиваем и далее рассматриваем ту часть, которая оказалась легче, если весы показали, что на одной из чаш груз легче, или ту, которую не клали на весы, если весы уравновесились. Оставшуюся часть разбиваем на три части по 3 монеты и с этими частями поступаем аналогично. Наконец, оставшиеся три монеты уже разбиваем на три части по 1 монете и находим фальшивую. Мы обнаружим фальшивую монету ровно после трех взвешиваний.

2. Пронумеруем монеты числами от 1 до 27. Сперва положим на одну чашу монеты с 1 по 12, а на другую — с 13 по 14. Если чаши уравновесились, то фальшивая монета среди 25-27 и мы можем найти ее, сделав еще одно взвешивание. Если одна из чаш оказалась легче, взвешиваем монеты с 1 по 3 и с 4 по 6 (или с 13 по 15 и с 16 по 18). Если одна из чаш оказалась легче, то третьим взвешиванием мы найдем фальшивую монету. Иначе взвесим 7-8 и 9-10 (или 19-20 и 21-22). В любом случае мы узнаем, среди каких двух монет находится фальшивая, и следующим взвешиванием ее найдем. Таким образом, если фальшивая монета имела номер 25-27, то нам понадобится 2 взвешивания, если 1-6 или 13-18, то потребуется 3 взвешивания, наконец, если номер фальшивой монеты 7-12 или 19-24, то нужно 4 взвешивания. Итак, среднее количество взвешиваний равно $\dfrac{6+36+48}{27} = 3\dfrac{4}{9}$.

Алексей Александрович Заславский.
Правильные турниры.

В ряде прикладных задач возникает необходимость обработки экспертных оценок, одним из видов которых являются таблицы, аналогичные турнирным. Результатом обработки также является такая таблица, причем традиционно считается, что она должна быть транзитивной (необходимые определения см. в брошюре А. Заславский, Б. Френкин "Математика турниров МЦНМО, 2009). Однако, требование транзитивности представляется излишне сильным, более естественно рассматривать правильные турниры, которые можно представлять как результат попарного взвешивания нескольких объектов на чашечных весах с ограниченной чувствительностью. В связи с этим возникают вопросы, насколько данная таблица отличается от правильной, и как построить правильную таблицу, "ближайшую" к данной.

Александр Ханиевич Шень,
Разложение многоместных функций в композицию двуместных.

13-я проблема Гильберта состояла в возможности представить функции нескольких переменных в виде композиций функций от двух переменных; Колмогоров и Арнольд показали, что это можно сделать для непрерывных функций, а Витушкин доказал, что для непрерывно дифференцируемых функций это не так. Недавно заинтересовались дискретным вариантом этой задачи: для большого конечного множества M существуют функции $M \times M \times M \to M$, которые нельзя представить в виде композиции небольшого числа двуместных функций. Само по себе это несложно, но до сих пор не известно никаких конкретных примеров функций такого рода, даже в самых простых вариантах. Мы обсудим один такой вопрос, который можно переформулировать в виде задачи о вложении набора матриц в качестве миноров одной матрицы чуть большего размера.

Игорь Григорьев,

Порождение перестановок 'восьмеркой'.

Циклом $(a_1, a_2, ..., a_n)$ называется взаимно-однозначное отображение множества, содержащего элементы $a_1, a_2, ..., a_n$, в себя, переводящее a_i в a_{i+1} для любого $i < n$, переводящее a_n в a_1, а все остальные элементы - в себя.

Теорема. *Если N или K четно, то при помощи циклов $(1, ..., N)$ и $(N, ..., N+K-1)$ можно получить все перестановки $(N+K-1)$-элементного множества.*

Если N и K нечетны, то при помощи циклов $(1, ..., N)$ и $(N, ..., N + K - 1)$ можно получить все четные перестановки $(N + K - 1)$-элементного множества и только их.

Данная теорема является фольклорной.

Напомним, что перестановка называется *четной*, если она представляется в виде произведения циклов длины 3. (Это определение равносильно общепринятому.)

Павел Долгирев,

О прямых в треугольнике, касающихся коники.

В работе рассмотрены и изучены свойства изогональных прямых в треугольнике. Полученные результаты тесно связаны с теоремой Кипера и теоремой о втором центре Морлея. Большинство результатов доказаны геометрически.

Алексей Рухович.

Как пересекаются многогранники в пространстве?

Пусть n — натуральное число, а $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y = y_1, y_2, ...y_n$ — последовательности натуральных чисел. При каком условии существуют два таких многогранника в пространстве, каждый из которых разбивается любой замкнутой кривой на нем (т.е. многогранники топологически эквивалентны сфере), что их пересечение является объединением замкнутых несамопересекающихся ломаных и делит

• первый многогранник на n частей, топологически эквивалентных сфере с x_1 дырками, сфере с x_2 дырками, ..., сфере с x_n дырками, и

• второй многогранник на n частей, топологически эквивалентных сфере с y_1 дырками, сфере с y_2 дырками, ..., сфере с y_n дырками?

Ответ: при условии $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 2n-2$. Необходимость очевидна, достаточность доказана в работе.