Московская математическая конференция школьников ПРОГРАММА заседания 16.12.2012

Возможны изменения; можно прийти на часть заседания

10.00-10.10, ауд. 306. Открытие. Выступления Дмитрия Валериевича Трещева и Алексея Александровича Заславского. Объявления от Бориса Рафаиловича Френкина.

10.10-10.35, ауд. 306. Кириллов Илья, Классификация конфигурационных пространств пятиугольных шарнирных механизмов. (Председатель А.А. Заславский)

10.40-11.05, ауд. 306. Попеску Андрей, Поверхности, невидимые из точки. (Председатель А.А. Привалов)

11.10-11.35, ауд. 306. Новиков Александр, простое доказательство теоремы о продолжении вложения (Председатель А.А. Заславский)

11.35-11.50, ауд. 307. Перерыв (чай, кофе, бутерброды)

Секция алгебры и комбинаторики (аудитория 308):

11.50-12.10 Кориков Кирилл, Альтернативное сложение и умножение. (Председатель А.А. Заславский)

12.15-12.35 Зимин Арсений, Степенные последовательности для графов без петель и кратных ребер. (Председатель М.Б. Скопенков)

12.40-13.00 Оганесян Кристина, Квадратичный закон взаимности Гаусса. (Председатель Н.М. Цепкова)

13.05-13.25 Черных Георгий, О высотах многочленов. (Председатель А.И. Сгибнев)

Секция геометрии и комбинаторики (аудитория 306):

11.50-12.10 Белоусов Владислав, Пример недружественных деревьев. (Председатель А.М. Изосимов)

12.15-12.35 Зерцалов Андрей, Симедиана. (Председатель А.Б. Скопенков)

12.40-13.00 Гаркавый Андрей, Полувписанная окружность (Председатель А.А. Заславский)

13.05-13.25 Урьев Максим, Теоремы Тебо и Фейербаха (Председатель А.Г. Мякишев)

13.25-14.15 Обеденный перерыв (чай, кофе, бутерброды в ауд. 307, можно сходить в Муму)

В 13.45-14.15 мы просим авторов стендовых (и отклоненных) докладов стоять у своих стендов (можно с чаем и бутербродами) около аудитории 307.

Стендовые доклады:

Ле Тхань Дат, замечательная целая часть

(ответственный член жюри: Ю.А. Блинков)

Отклоненные доклады.

14.15-14.40, ауд. 306. А.И. Сгибнев, О дискретных гармонических функциях (Председатель Б.Р. Френкин)

14.45-15.10, ауд. 306. А.А. Заславский (Председатель А.А. Привалов)

15.15-15.25, ауд. 306. Объявление решения жюри и награждение

15.30-15.55, ауд. 306. Обсуждение ММКШ и других конференций школьников (для учителей)

15.30-16.20 Семинар А.И. Сгибнева (аудитория 308)

15.00-16.20 Семинар А.А. Заславского (аудитория 309)

АННОТАЦИИ докладов ММКШ-2012

Ссылки на полные тексты: http://www.mccme.ru/mmks/notes.htm, notesm.htm

Постановки задач

А.И. Сгибнев. О дискретных гармонических функциях.

Номинация учебно-исследовательских работ

Гаркавый Андрей, Полувписанная окружность.

Будут представлены интересные факты о *полувписанной* окружности. Так называется окружность, касающаяся двух сторон треугольника и его описанной окружности. Будет приведено доказательство изогональности точки Нагеля и центра той гомотетии с положительным коэффициентом, которая переводит вписанную окружность в описанную. Это доказательство использует свойства полувписанной окружности.

Зерцалов Андрей, Симедиана.

Симедиана не так широко известна, как медиана. Однако рассмотрение симедианы естественно, поскольку симметрия относительно биссектрисы — часто встречающийся прием. Мы введем два эквивалентных определения симедианы. Приведем решения задач, для которых достаточно только определения. Далее сформулируем ключевой факт, связанный с симедианой, и задачи на его применение. В завершение укажем на связь симедианы с гармоническим четырехугольником. Использование приводимых свойств симедианы или гармонического четырехугольника позволяют находить короткие решения многих трудных задач.

Зимин Арсений, Степенные последовательности для графов без петель и кратных ребер.

Конечная последовательность целых неотрицательных чисел называется *степенной*, если существует граф без петель и кратных ребер, степени вершин которого — числа этой последовательности. Классический результат теории графов — необходимое и достаточное условие того, что данная конечная последовательность целых неотрицательных чисел является степенной. Будут приведены формулировка и набросок доказательства этой теоремы.

Кориков Кирилл, Альтернативное сложение и умножение.

Дано множество целых чисел, на котором умножение $\times$ определено стандартным образом. Как можно определить альтернативное сложение $+$, чтобы для этих двух операций сохранялось большинство их свойств (точнее, чтобы $(\mathbb{Z},+,\times)$ являлось областью целостности)? Основной результат: для натурального k существует альтернативное сложение $+$ такое, что $\underbrace{1+...+1}_{k}=0$, тогда и только тогда, когда $k=3$. Также приводятся примеры альтернативных сложений, для которых $\underbrace{1+...+1}_{k}\neq 0$ для любого натурального k.

Ле Тхань Дат, замечательная целая часть.

В работе рассматривается решение уравнений, содержащих функцию 'целая часть числа'. Уравнения решаются с помощью различных видов замены выражений. Особенно интересна замена, использующая 'критические' точки. Вникнув в суть той или иной замены, учащиеся смогут не только успешно решать такие уравнения, но и испытывать удовольствие от этого.

Новиков Александр, простое доказательство теоремы о продолжении вложения

Дана единичная сфера и n непересекающихся наборов непересекающихся окружностей на ней. При каком условии в шаре, ограниченном этой сферой, существует n дисков с дырками, края которых являются данными наборами окружностей? Ответ на этот вопрос получен в 2012 С. Аввакумовым. Основной результат работы — простое доказательство этой теоремы.

Оганесян Кристина, Квадратичный закон взаимности Гаусса.

Для ненулевого вычета a по модулю p обозначим $(a/p) := 1$ или -1, если сравнение $x^2 \equiv a \mod p$ разрешимо или неразрешимо, соответственно.

Доказывается квадратичный закон взаимности Гаусса: *для простых нечетных p и q верно равенство* $(p/q)(q/p) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$.

Этот результат дает простой способ решения сравнения $x^2 \equiv a \mod p$.

Урьев Максим, Теоремы Тебо и Фейербаха.

В работе рассматриваются две красивые теоремы элементарной геометрии: теорема Тебо и теорема Фейербаха. И в той, и в другой речь идет о касающихся окружностях, но при этом теоремы настолько различны по формулировкам, что долгое время связь между ними не была установлена. Оказалось, что обе теоремы являются частными случаями более общего утверждения — леммы Саваямы. В докладе будут представлены доказательства теоремы Фейербаха и теоремы Тебо, а также решения некоторых задач на касающиеся окружности с помощью леммы Саваямы.

Номинация исследовательских разработок

Белоусов Владислав, Пример недружественных деревьев.

Рассмотрим два многогранника (не обязательно выпуклых) в трехмерном пространстве, пересекающихся по конечному объединению замкнутых ломаных. Первый многогранник разбивает второй на области. Обозначим через G_1 граф, вершины которого — области, и две вершины соединены ребром, если соответствующие области граничат. Аналогично определим G_2. При помощи компьютерного перебора С. Аввакумов привел минимальный пример пары графов, не являющейся парой G_1, G_2 ни для каких двух многогранников. В докладе мы представим математическое доказательство этого факта, основанное на небольшом переборе.

Кириллов Илья, Классификация конфигурационных пространств пятиугольных шарнирных механизмов.

Рассмотрим на плоскости 4 последовательно соединенных между собой шарнирами жестких стержня (звена) фиксированных длин a_1, a_2, a_3, a_4 с фиксированными началом A_0 первого стержня и концом A_4 последнего. Конфигурационное пространство такой системы формально определяется как подмножество в $\mathbb{R}^6$, состоящее из таких троек (A_1, A_2, A_3) точек плоскости, что расстояние между точками A_{i-1} и A_i равно a_i для любого $i = 1, 2, 3, 4$ Топология такого конфигурационного пространства была описана различными авторами в 1990х-2000х гг. Мы приведем новое элементарное доказательство этого описания.

Попеску Андрей, Поверхности, невидимые из точки.

В 1687 году Исаак Ньютон рассмотрел следующую задачу: среди всех выпуклых поверхностей, имеющих данную высоту и содержащих в основании круг данного радиуса, найти поверхность, имеющую наименьшее сопротивление при поступательном движении в однородной разряженной среде (например, в верхних слоях атмосферы). В конце XX века выяснилось, что если отказаться от условия выпуклости, то можно построить поверхность, имеющую нулевое сопротивление при поступательном движении в разряженной среде (Алексенко-Плахов, 2009 г.). Если такую поверхность сделать из зеркального материала, то она будет *невидима в одном направлении*, т.е. почти все лучи заданного параллельного пучка света, несколько раз отражаясь от этой поверхности, будут выходить из нее в первоначальном направлении, не преломляясь. Задача о существовании поверхности, *невидимой для пучка света, выходящего из заданной точки*, поставлена С.П.Тарасовым в 2010 г. и решена Алексеенко-Рощиной в 2011. Мы приведем другое построение такой поверхности. Построение основано на плоском аналоге и интересных фактах о конических сечениях.

Черных Георгий, О высотах многочленов.

Высотой многочлена называется максимум модуля его коэффициентов. Оценки высоты произведения многочленов через произведение их высот получены в работах А. О. Гельфонда и К. Малера. В настоящей заметке мы слегка улучшили одну такую оценку и обобщили ее на *нормы*. Для каждого $p > 0$ *нормой* многочлена $c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0$ называется число $(|c_n|^p + \cdots + |c_1|^p + |c_0|)^{1/p}$.