Московская математическая конференция школьников
ПРОГРАММА заседания 17.12.2017, МЦНМО

Доклады проходят в конференц-зале на 4 этаже (кроме тех, у которых указан номер аудитории), перерывы в 404.

Можно прийти на часть заседания. Подробнее: `http://www.mccme.ru/mmks`

10.00-10.10. Открытие. Выступление Алексея Александровича Заславского.

Пленарные доклады.

10.10-10.45. *Д. Захаров (докладчик) и А. Купавский.* Regular bipartite graphs and intersecting families. (Председатель Ф.К. Нилов)

10.45-11.20. *Е. Морозов.* Обобщенная задача Аполлония. (Председатель Д.В. Прокопенко)

11.20-11.30. Перерыв (чай, кофе, бутерброды)

Секция геометрии (председатель А.А. Привалов)

11.30-11.50. *Е. Прокопенко.* Точка двух велосипедистов в задачах.

11.50-12.15. *И. Романов.* Прямая Эйлера вписанного многоугольника.

12.15-12.30. *А. Рабе.* Обобщения теоремы Штейнера-Лемуса о признаке равнобедренности треугольника.

Секция алгебры, комбинаторики и анализа (аудитория 308, председатель И.А. Решетников)

11.30-11.50. *В. Ретинский (докладчик) и Д. Захаров.* Фишки в вершинах дерева.

11.50-12.15. *Е. Коган.* Множественная сложность построения правильного многоугольника.

12.15-12.30. *А. Крупецков.* An interesting sum of Goldbach.

12.30-12.40. Перерыв (чай, кофе, бутерброды)

12.40-13.10. Стендовые доклады (ответственные члены жюри: А.А. Заславский, Н.А. Маслов и А.И. Сгибнев). *Просим авторов стендовых докладов стоять у своих стендов (можно с чаем и бутербродами).* Повесить доклады на стенды нужно до 12.40 (а лучше до 11.30).

И. Горбунов, 1000 подряд идущих чисел, ни одно из которых не является степенью простого числа.

К. Зубков, Число $\sqrt[n]{2}$ не является квадратичной иррациональностью.

Ф. Куянов, Оригинальное решение геометрической задачи.

С. Сивков, Признак делимости на 7 для четырехзначных чисел.

Д. Скворцов, Погрешность оценки частичной суммы гармонического ряда.

13.10-14.00. Об учебе и приобщении студентов к научной работе в некоторых ВУЗах

13.10-13.20. *И.В. Аржанцев*, ФКН ВШЭ.

13.20-13.30. *Е.А. Молчанов и И.Г. Эрлих*, ФИВТ и ФУПМ МФТИ.

13.30-13.40. *А.И. Шафаревич,* мехмат МГУ.

13.40-13.50. *В.А. Тиморин*, матфак ВШЭ.

13.50-14.00. *Н.А. Вавилов*, бакалавриат «Математика» СПБГУ

14.00-14.10. Перерыв (чай, кофе, бутерброды)

Постановки задач

14.10-14.40. *Д.А. Калинин.* Можно ли угадать положение доминошки?

14.40-15.05. *А.Б. Скопенков.* К алгоритмам решения алгебраических уравнений.

15.05-15.15. *Награждение.*

15.15-15.45. Семинар А.Б. Скопенкова

Аннотации некоторых докладов ММКШ-2017

Полные тексты см. на `http://www.mccme.ru/mmks/notes.htm`, `.../notesm.htm`

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Калинин Дмитрий Александрович, *Можно ли угадать положение доминошки?*

Доску 8×8 разбили на доминошки. Каковы шансы предугадать положение какой-то из доминошек? Рассказ о том, как разные олимпиадные задачи могут собираться в одну проблему. Вот основная задача, о которой пойдет речь.

Дана доска 8×8. *Антон отмечает на ней несколько клеток и платит Борису 1 рубль за каждую отмеченную клетку. После этого Борис замощает всю доску 32 доминошками, каждая из которых накрывает 2 клетки. Выделяются те доминошки, в которых ровно одна отмеченная клетка, причем она нижняя или левая. За каждую такую доминошку Борис платит Антону 2 рубля. Какой максимальный выигрыш гарантированно может получить Антон?*

Для понимания рассказа никаких специальных знаний не требуется.

Скопенков Аркадий Борисович, *К алгоритмам решения алгебраических уравнений.*

Теоремы Руффини-Абеля-Галуа о неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах — классический результат алгебры, интересный для информатики (теории символьных вычислений). Идея Абеля и Галуа фактически заключается в том, что если уравнение разрешимо в радикалах, то его можно решить методом резольвент Лагранжа. Этим методом строятся алгоритмы — распознаваемости разрешимости уравнений в радикалах и решения в радикалах разрешимого уравнения.

Для изучения этого текста достаточно знакомства с многочленами, комплексными числами и перестановками. При этом он содержит красивые сложные результаты. Изучившие (точнее, изрешавшие) его получат хорошее представление об отправных идеях теории Галуа. Они смогут порешать задачи для исследования, связанные с алгеброй, комбинаторикой и информатикой.

ДОКЛАДЫ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Номинация научно-исследовательских работ

Морозов Егор, *Обобщенная задача Аполлония.*

Теорема. На плоскости даны пять различных обобщенных окружностей, которые не все касаются в одной точке. Тогда существует не более четырех окружностей, касающихся каждой из данных.

Задача Аполлония была поставлена еще в III в. до н. э. и состоит в следующем: построить окружность, касающуюся 3-х данных окружностей на плоскости. Хорошо известно, что если не все исходные окружности касаются в одной точке, то существует не более 8-и решений. Пусть теперь дано $k > 3$ окружностей на плоскости, и не все они касаются в одной точке. Каково тогда максимально возможное число окружностей, касающихся каждой из данных? В 2016 мне удалось доказать, что в случае $k = 4$ существует не больше шести таких окружностей. Вышеприведенная теорема утверждает, что в случае $k = 5$ их не более четырех. Более того, все четверки окружностей, для которых существует ровно 6 окружностей, касающихся каждой из данных, допускают единое описание.

Для понимания доказательств необходимо знакомство с базовыми свойствами инверсии.

Номинация учебно-исследовательских работ

Прокопенко Евгения, *Точка двух велосипедистов в задачах.*

Теорема. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Тогда на плоскости найдется точка V с таким свойством: если провести через точку A произвольную прямую, пересекающую окружности вторично в точках P_1 и P_2, то V будет равноудалена от точек P_1 и P_2.

Эту точку будем называть *точкой двух велосипедистов.* Данная теорема — переформулировка задачи И. Ф. Шарыгина с Международной математической олимпиады 1979 г. Приведены решения задач с различных олимпиад высокого уровня с использованием данной теоремы и свойств точки двух велосипедистов.

Романов Игнат, *Прямая Эйлера вписанного многоугольника.*

Следующий факт известен: *в треугольнике точка пересечения медиан, центр описанной окружности и точка пересечения высот лежат на одной прямой, причем точка пересечения медиан делит отрезок от центра описанной до ортоцентра в отношении 1 к 2 соответственно.* Одно из обобщений на вписанный четырехугольник было доказано А.Г. Мякишевым: *в любом вписанном четырехугольнике центр масс является серединой отрезка, соединяющего центр описанной окружности и ортоцентр.* Мы докажем аналогичную теорему для вписанного n-угольника при произвольном n.

Номинация исследовательских разработок

Коган Евгений, *Множественная сложность построения правильного многоугольника.*

К подмножеству $A \subset \mathbb{C}$, содержащему числа x, y, можно добавить любое из чисел $x + y$, $x - y$, xy или (если $y \neq 0$) x/y или любое z такое, что $z^2 = x$. Пусть $p = 2^{2^k} + 1$ — простое число Ферма. Мы доказываем, что из $\{1\}$ можно получить некоторое множество, содержащее все корни из 1 степени p, за $12p^2$ операций, определенных выше. Этот результат отличается от стандартной оценки сложности алгоритма, находящего корни степени p из 1.

Доклад, не претендующий на награду ММКШ

Захаров Дмитрий и Купавский Андрей, *Regular bipartite graphs and intersecting families,* Journal of Combinatorial Theory, Ser. A, 155 (2018) 180-189.

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство k-элементных подмножеств n-элементного множества, и $n > 2k$. Предположим, что любые два множества из $\mathcal{F}$ пересекаются. Сколько подмножеств может быть в $\mathcal{F}$? Классическая теорема Эрдеша-

Ко-Радо утверждает, что в $\mathcal{F}$ не больше подмножеств, чем в семействе всех k-элементных подмножеств, содержащих фиксированный элемент.

Если же потребовать, чтобы множества семейства $\mathcal{F}$ не имели общего элемента, то имеется значительно более сильная верхняя оценка на количество подмножеств в $\mathcal{F}$ — теорема Хилтона-Милнера.

Мы приведем новое доказательство этой теоремы, опирающееся на свойства регулярных двудольных графов и полученное Д. Захаровым. Данная техника позволила А. Купавскому получить ряд сильных результатов в этой области.

Репетиции докладов к будущим конференциям (не претендуют на награду ММКШ)

Рабе Алексей, *Обобщения теоремы Штейнера-Лемуса о признаке равнобедренности треугольника.*

Ретинский Вадим и Захаров Дмитрий, *Фишки в вершинах дерева.*

В вершинах графа расставлены m разноцветных фишек. Разрешается передвинуть любую фишку в любую пустую соседнюю вершину. При каком наибольшем количестве m фишек из любого набора фишек можно получить любой другой такими операциями? Дается ответ для дерева.

Стендовые доклады. Номинация учебно-исследовательских работ

Крупецков Александр, *An interesting sum of Goldbach.*

Куянов Федор, *Оригинальное решение геометрической задачи.*

Следующая задача предлагалась на одном из этапов Всероссийской математической олимпиады. *В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Обозначим через BB' и CC' биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой $B'C'$, лежит на стороне BC.*

Решение основано на неожиданном дополнительном построении.

Зубков Кирилл, *Число $\sqrt[3]{2}$ не является квадратичной иррациональностью.*

Приводится простое доказательство следующего утверждения: *для любого целого $n \geq 3$ число $\sqrt[n]{2}$ не представимо в виде $a \pm \sqrt{b}$ с рациональными a и b.* Оно использует только преобразования алгебраических выражений.

Сивков Савелий, *Признак делимости на 7 для четырехзначных чисел.*

Приводится доказательство следующего утверждения (с примерами): *число $\overline{ABCD}$ делится на 7 нацело, если $2 \cdot \overline{AB} + \overline{CD}$ делится на 7 нацело.*

Стендовые доклады. Номинация исследовательских разработок

Скворцов Дмитрий, *Погрешность оценки частичной суммы гармонического ряда.*

Приводится исследование погрешности той оценки конечной суммы гармонического ряда, которая получена применением неравенств о средних.