ОТЗЫВ
о статье В. Болбачана

Rational approximations for the Euler-Gompertz constant

Постоянной Эйлера-Гомперца называется число

$$\delta = \int_0^\infty e^{-x} \ln(x+1) dx = 0,59634736\ldots.$$

Предполагается, что оно иррационально, однако этот факт до сих пор не установлен. Интерес к исследованию арифметических свойств этой постоянной усилился в последнее время в связи с попытками доказательства иррациональности значений дзета-функции Римана, постоянной Каталана, Эйлеровой константы и др. Можно сказать, что работа В.Болбачана относится к области, привлекающей внимание профессиональных математиков. Укажем появивившиеся в последние несколько лет работы А.И. Аптекарева и его коллег [1], А.И. Аптекарева [2], Т. Ривоаля [3]-[5], Х. и Т. Хессами Пилеруд [6]-[8].

Практически все методы доказательства иррациональности чисел основаны на следующей идее: *если для заданного действительного числа α существует последовательность пар целых чисел p_n, q_n с условиями $0 < |q_n\alpha - p_n| = o(1)$ при $n \to \infty$, то α иррационально.* Конструкция таких рациональных приближений p_n/q_n есть весьма трудное дело, зависящее от индивидуальных особенностей числа, и придумать ее ни для одного из указанных выше чисел, да и для многих других, не удалось.

В рецензируемой работе В.Болбачана предлагается способ построения приближений к постоянной Гомперца δ таких, что $0 < |\alpha - p_n/q_n| = o(1)$. Он заметил, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выполняется равенство

$$I = \int_0^\infty P(x) e^{-x} \ln x dx = q\delta - p, \qquad p, q \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Теперь для доказательства иррациональности δ достаточно подобрать последовательность многочленов $P_n(x)$, для которой все интегралы (1) стремятся к нулю, оставаясь все время отличными от нуля. Такую последовательность подобрать не удалось, этого никто в мире делать не умеет. Но удалось построить последовательность, для которой интеграл (1), деленный на q, стремится к нулю, т.е. $\left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \to 0$. Иными словами В. Болбачану удалось эффективно построить последовательность рациональных приближений $\dfrac{a_n}{b_n}$ к числу δ, см. следствие 1.3. Это и есть с моей точки зрения основной результат работы В. Болбачана.

Нужно сказать, что нерегулярная цепная дробь для δ впервые была найдена еще Стилтьесом. Подходящие дроби этой цепной дроби сходятся к δ. Более того, известны асимптотики для величины знаменателей q_n и абсолютной величины разности $p_n - \delta q_n$, что позволяет выписать оценку для скорости сходимости дробей $\dfrac{p_n}{q_n}$ к δ, см. [2]. Метод Болбачана, по крайней мере его реализация в работе, не позволяют оценить скорость сходимости.

Несколько технических замечаний.

1. В работе присутствует некоторый параметр r. Не очень ясно его назначение.

2. На странице 3, в строке 6- нужно указать, что вычисляется верхний предел. При $\varepsilon < -1$ функция $f_\varepsilon(u)$ не определена.

3. На странице 4, в строке 5+, дважды пропущен символ dx.

4. На странице 5, строка 3+, нужно указать, чему равно число S_{-1}.

На той же странице в формуле (2) нужно указать, что обозначает символ $f_\varepsilon^{(i)}(u)$.

5. Страница 13, строка 3+. Формула не может сходиться равномерно. Вероятно, имеется в виду равномерная сходимость ряда в теореме 1.1.

6. Страница 14, строки 4 и 6 снизу. Вместо $kj!$ должно быть написано $k!j!$.

Я не стал бы публиковать работу в настоящем ее виде. Мне не кажутся особенно интересными тождества из теоремы 1.1 и следствия 1.4. Как я уже указывал, основными результатами с моей точки зрения являются следствия 1.2 и 1.3. Они, повидимому, могут быть доказаны проще и с оценками скорости сходимости. Кроме того, нужно сравнить эти результаты со скоростью сходимости подходящих дробей цепной дроби Стилтьеса.

В целом работа произвела на меня хорошее впечатление. Она посвящена трудным теоретико-числовым вопросам и находится в русле развития современной теории диофантовых приближений. Автор придумал новый подход, пусть и дающий менее сильные результаты, чем известные. Работа технически очень сложна и потребовала от В. Болбачана больших усилий. Я полагаю, что он заслуживает какую-нибудь награду.

Список литературы

[1] Аптекарев А.И. и др., Рациональные приближения Эйлеровой постоянной и рекуррентные уравнения, Сборник статей, Современные проблемы математики, т.9, Математический институт РАН им. В.А. Стеклова, 2007.

[2] Aptekarev A.I., On linear forms containing the Euler constant, arXiv:0902.1768v2 [mathNT], 28Feb2009.

[3] Rivoal T., Polynomes de type Legendre of approximations de la costante d'Euler. (2005, notes); available at http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ rivoal/.

[4] Rivoal T., Rational approximations for values of derivatives of the Gamma function, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), 6115-6149.

[5] Rivoal T., Some results on the arithmetic nature of values of the gamma function, preprint (2010); available at http://www-fourier.uif-grcnoble.fr/ rivoal/.

[6] Kh. Hessami Pilehrood, T. Hessami Pilehrood. Approximations to Euler's constant, to appear in Math. Ineq. and Appl. (Forthcoming articles: mia-1889); available at http://mia.ele-math.com/forthcoming

[7] Kh. Hessami Pilehrood, T. Hessami Pilehrood. Rational approximations for values of the digamma function and a denominators conjecture, arXiv:1004.0578vl[math.NT]

[8] Kh. Hessami Pilehrood. T. Hessami Pilehrood, Rational approximations for the quotient of gamma values, arXiv:1010.0429vl[math.NT]