ПРИМЕР ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕДРУЖЕСТВЕННОСТИ ДВУХ ДЕРЕВЬЕВ

В. Белоусов

Пусть p и q — два подмножества множества ребер некоторого дерева.

Множество p лежит по одну сторону (в этом дереве) от q, если $p \cap q = \emptyset$, и для любых двух концов ребер из p соединяющий их путь в дереве содержит четное число ребер из q.

Наборы p и q не зацеплены (в этом дереве) если p лежит по одну сторону от q и q лежит по одну сторону от p.

Для вершины P графа обозначим через δP множество выходящих из P ребер.

Пусть K и K' — два дерева с одинаковым количеством ребер. Они называются дружественными, если существует биекция (т.е., взаимно-однозначное соответствие) между их ребрами, при которой для любых двух вершин P, Q графа K, соединенных путем из четного числа ребер, наборы ребер в K', соответствующие δP и δQ, не зацеплены в K'.

Напомним, что граф G имеет вершины $A, C_3, C_1, C_2, A', C_3', C_1', C_2'$ и ребра BB', AC_i, $A'C_i'$. А граф H имеет вершины $B, D, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ и ребра BD, BP_i, P_iQ_i.

Теорема. *Графы G и не дружественны.*

Это решение задачи 3(c) из темы ‘Как пересекаются в пространстве криволинейные сферы, или двумерные меандры’ с Летней Конференции Турнира Городов 2012.

Допустим, что графы G и дружественны, тогда существует биекция между их ребрами с вышеуказанными свойствами.

Обозначим через (n) образ в графе ребра n графа G, и через $G(n)$ образ в графе G ребра n графа H (при обратной биекции). Пусть X - подмножество множества рчбер . Обозначим за $G(X)$ граф, образованный образами ребер из X.

Утверждение 1. *Графы $H_1 := (\{AC_1, AC_2, AC_3\})$ и $H(\{A'C_1', A'C_2', A'C_3'\})$ связны.* Доказательство. Докажем утверждение для H_1, а для $H(\{A'C_1', A'C_2', A'C_3'\})$ доказательство аналогично. Вершины A и C_1' находятся на ччтном расстоянии. А значит $(A'C_1')$ не лежит ни на каком пути, соединяющем некоторую пару рчбер графа H_1. Аналогично $(A'C_2')$ не лежит ни на каком пути, соединяющем некоторую пару рчбер графа H_1. Вершины A и C_3' также находятся на ччтном расстоянии. А значит,

- либо (C_3C_3') и $(A'C_3')$ не лежат ни на одном из путей, соединяющем некоторую пару ребчр графа H_1;

- либо оба ребра $H(C_3C_3')$ и $H(A'C_3')$ лежат на некотором пути, соединяющем некоторую пару ребер J_1,J_2 графа $_1$.

В первом случае граф $_1$ связен.

Во втором случае J_1,$H(C_3C_3')$,$H(A'C_3')$,J_2 образуют путь длины 4. Не уменьшая общности этот путь есть $Q_1P_1BP_2Q_2$. Тогда путь от ребра J_1 к ребру $H_1 - J_1 - J_2$ пересекает лишь одно из ребер $H(C_3C_3')$,$H(A'C_3')$. Чего не может быть.

QED

Утверждение 2. *Вершина B является концом ребра $H(C_3C_3')$.*

Доказательство: Вершины B и Q_i лежат на четном расстоянии друг от друга. А значит $G(BD, BP_1, BP_2, BP_3) = G(\delta B)$ связен, так как его ребра в G не зацеплены ни с каким ребром $G(P_iQ_i)$.

Связных 4-реберных подграфов в G с точностью до изоморфизма графа G всего 2: 1)подграф, имеющий вершинами C_1, C_2, C_3, A, C_3' и ребра все ребра графа G между этими вершинами. 2)подграф, имеющий вершины C_1, A, C_3, C_3', A' и ребра все ребра графа G между этими вершинами.

Ребро C_3C_3' принадлежит обоим этим подграфам. А значит $H(C_3C_3')$ является одним из ребер BD, BP_1, BP_2, BP_3. QED

Окончание доказательства теоремы. По утверждению 1 граф $H - H(C_3C_3')$ является объединением двух связных графов, в каждом из которых по 3 ребра. Тогда из трех ребер

P_iQ_i два лежат в одном из этих графов. Не уменьшая общности P_1Q_1 и P_2Q_2 лежат в $(\{AC_1, AC_2, AC_3\}) = H_1$. Но путь, соединяющий Q_1 и Q_2 имеет длину 4. Чего не может быть ввиду того, что в H_1 всего три ребра. QED