О высотах многочленов

Черных Георгий
ГБОУ Лицей №1303, Москва, 11 класс
Научный руководитель: к.ф.-м.н. Привалов А. А.

Гипотеза

В данной работе рассматриваются многочлены над полем комплексных чисел вида

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n} c_k z^k, \quad c_n \neq 0$$

и их нормы вида $G_p(f)=\left(\sum_{k=0}^{n} |c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Многочлены рассматриваются как строки коэффициентов и в этих обозначениях была получена следующая оценка для введённых норм:

1) Если f и g – многочлены, n_1, n_2 – их степени соответственно, причём $n_1 \leq n_2$, то имеют место неравенства:

$$\frac{G_p(f)G_p(g)}{\sqrt[p]{n_1+1}\sqrt[p]{n_2+1}\sqrt{n_1+n_2+1}\binom{n_1}{[n_1/2]}\binom{n_2}{[n_2/2]}} \leq G_p(fg) \leq (1+n_1)\sqrt[p]{n_1+n_2+1}\,G_p(f)G_p(g)$$

Определения

Мы рассматриваем множество многочленов $\sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ над **C** как векторное пространство строк коэффициентов $(c_n, c_{n-1}, ..., c_1, c_0)$, где $c_n \neq 0$. На этом векторном пространстве можно ввести нормы: $G_p(f)=\left(|c_n|^p+...+|c_1|^p+|c_0|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=0}^{n}|c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, где p = 1, 2, ...

Кроме того, можно ввести ещё одну подобную норму $G_\infty(f)=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}|c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=$ $=\max_i\{|c_i|\}$. Эту норму обычно называют высотой многочлена и обозначают $H(f)$. Из основной теоремы алгебры следует, что многочлен f можно представить в виде: $f=c_n(x-\alpha_1)\cdot...\cdot(x-\alpha_n)$. Введём вспомогательный объект: $M(f)=|c_n|\prod_{i=1}^{n}\max\{1,|\alpha_i|\}$. Последнюю величину называют мерой Малера.

Идея доказательства

Оценки высоты многочлена были получены А. О. Гельфондом [1] при решении 7-ой проблемы Гильберта. Впоследствии упрощённый вариант доказательства его неравенств был получен К. Малером [2], [3].

Эти оценки для случая одной переменной имеют следующий вид.
Пусть n_1, n_2 – степени f и g, причём $n_1 \le n_2$, тогда:

$$\frac{H(f)H(g)}{2^{n_1+n_2-2}\sqrt{n_1+n_2+1}} \le H(fg) \le (1+n_1)H(f)H(g) \qquad (1)$$

Правое неравенство немедленно следует из правил умножения многочленов. Левое неравенство в доказательстве Малера ([3]) следует из промежуточных неравенств:

$$\frac{M(f)}{\sqrt{n+1}} \le H(f) \le 2^{n-1}M(f), \text{ где } n \text{ – степень } f. \qquad (2)$$

Правое же из этих неравенств можно улучшить. Действительно,

$$|c_k| \le \binom{n}{k}\cdot M(f) \le \binom{n}{[n/2]}\cdot M(f)$$

(по теореме Виета и определению $M(f)$). Отсюда:

$$H(f) \le \binom{n}{[n/2]}\cdot M(f) \qquad (3).$$

Таким образом, получаем:

$$H(fg) \ge \frac{M(fg)}{\sqrt{n_1+n_2+1}} = \frac{M(f)M(g)}{\sqrt{n_1+n_2+1}} \ge \frac{H(f)H(g)}{\sqrt{n_1+n_2+1}\binom{n_1}{[n_1/2]}\binom{n_2}{[n_2/2]}}.$$

Это верно, так как $M(fg) = M(f)M(g)$. Ввиду этого, (1) преобразуются к следующему:

$$\frac{H(f)H(g)}{\sqrt{n_1+n_2+1}\binom{n_1}{[n_1/2]}\binom{n_2}{[n_2/2]}} \le H(fg) \le (1+n_1)H(f)H(g) \qquad (4)$$

Кроме того, между введёнными нормами существуют известные неравенства:

$$G_p(f) \ge H(f) \ge \frac{G_p(f)}{\sqrt[p]{n+1}} \text{ (для } p \in N\text{)} \qquad (5)$$

Из (5) и (4) непосредственно следуют соответствующие неравенства для всех введённых норм:

$$\frac{G_p(f)G_p(g)}{\sqrt[p]{n_1+1}\sqrt[p]{n_2+1}\sqrt{n_1+n_2+1}\binom{n_1}{[n_1/2]}\binom{n_2}{[n_2/2]}} \le G_p(fg) \le (1+n_1)\sqrt[p]{n_1+n_2+1}G_p(f)G_p(g)$$

Ссылки:

[1] А. О. Гельфонд, «Трансцендентные и алгебраические числа», Государственное издательство технико-теоретической литературы, М. 1952
[2] K. Mahler, «An application of Jensen's formula to polynomials»
[3] K. Mahler, «On some inequalities for polynomials in several variables»