Работа по геометрии на тему «Полувписанная окружность»

Ученика 9 класса
Центра образования №218
Гаркавого Андрея

Руководитель:
Блинков Александр Давидович

Москва, 2012 г.

Цель работы

Целью данной работы было изучить ряд интересных свойств так называемой «полувписанной» окружности, которая касается двух сторон треугольника и окружности, описанной около этого треугольника. Также были рассмотрены аналогии этих свойств для «внеполувписанной» окружности, то есть окружности, касающейся продолжений двух сторон треугольника и описанной окружности.

Содержание работы

Условимся о следующем обозначении:

A, B, C – вершины треугольника.

A_1, B_1, C_1 – точки касания вписанной окружности треугольника со сторонами;

A_2, B_2, C_2 – точки касания вневписанных окружностей треугольника со сторонами;

A', A'' – середины дуг BC описанной окружности, соответственно не содержащей и содержащей точку *A*. B', B'', C', C'' определяются аналогично.

Треугольник *ABC* вписан в окружность ω. Окружность S_A касается сторон *AB* и *AC* в точках *K* и *L* соответственно и дуги *BC* окружности ω внутренним образом в точке $T \equiv T_A$. Аналогично определяются окружности S_B и S_C и точки T_B и T_C. Далее будем называть окружности S_A, S_B *и* S_C полувписанными.

Окружность S_{A1} касается продолжений сторон *AB* и *AC* и дуги *BC* окружности ω внешним образом в точке T_{A1}. Аналогично определяются окружности S_{B1} и S_{C1} и точки T_{B1} и T_{C1}. Далее будем называть окружности S_{A1}, S_{B1} и S_{C1} внеполувписанными.

1. Точки T, K, C' (а также T, L, B') лежат на одной прямой.

2. Прямая T_AA содержит симедиану треугольника $B'C'T_A$.

3. Прямые AT_A, BT_B и CT_c, где T_B *и* T_C – точки касания двух других полувписанных окружностей треугольника *ABC* с его описанной окружностью ω, пересекаются в одной точке.

4. Прямая T_AA'' содержит медиану треугольника $B'C'T_A$.

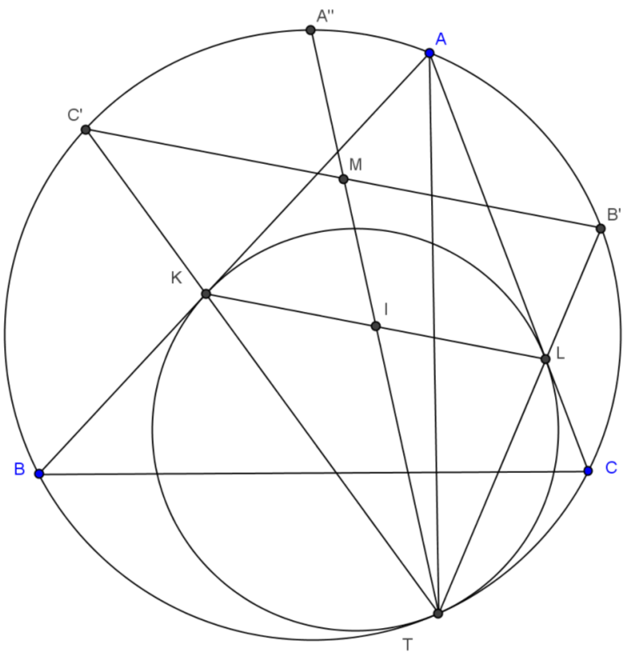
5. Центр *I* окружности, вписанной в треугольник *ABC*, лежит на прямой T_AA''.

6. Точки T_A, *B*, *K* и *I* (а также точки T_A, *C*, *L* и *I*) лежат на одной окружности;

7. Прямые *CC*' и *BB*' являются касательными к окружностям, описанным вокруг четырёхугольников *KITB* и LITC, соответственно;

8. Точка *I* – середина отрезка *KL*.

9. Отрезок *KL* – касательная к окружностям, описанным около *BIC* и $IT_A A'$.

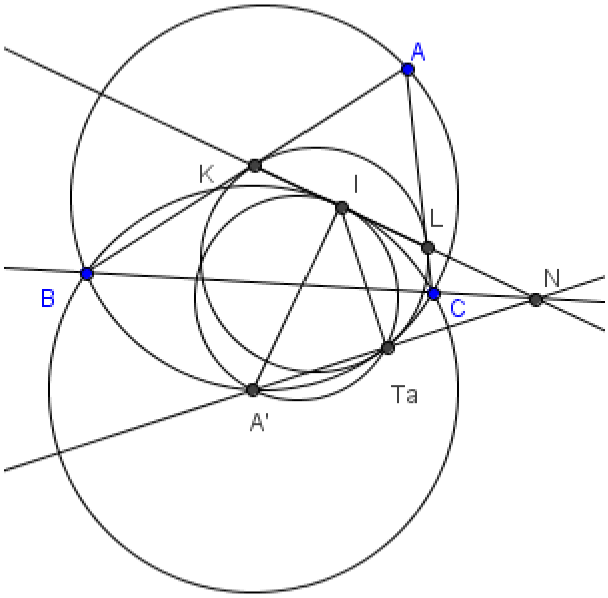


10.

а) (*B*'*C*') || (*KL*);

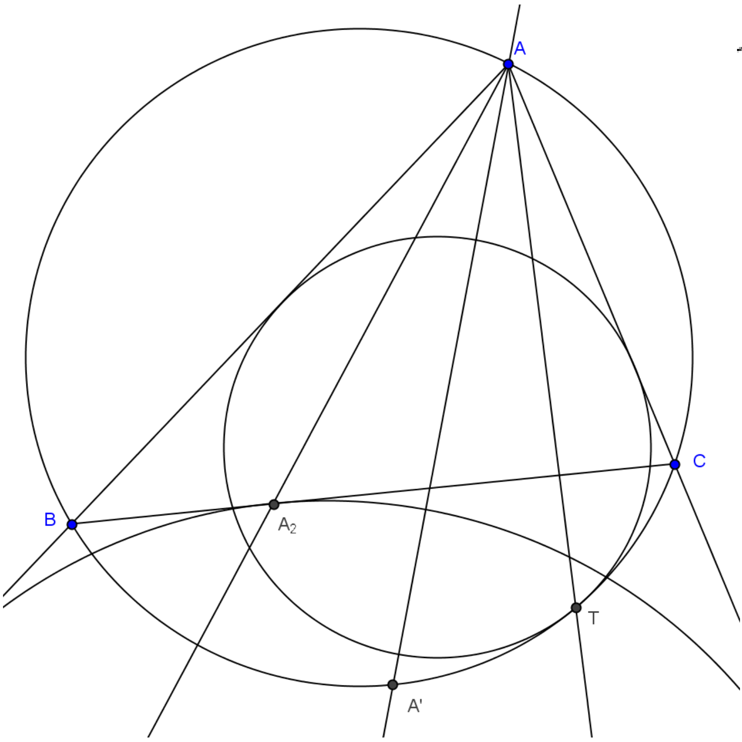
б) (*B*'*C*') делит отрезки *AК* и *AL* пополам.

11. KL, TA', BC пересекаются в одной точке или параллельны.



12. Точка пересечения из предыдущей задачи и еще две, определяемые аналогично, лежат на одной прямой.

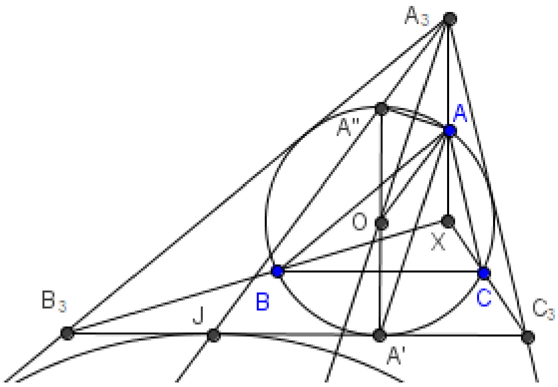
13. AA' – биссектриса угла TAA_2.



В качестве иллюстрации свойств полувписанной окружности приведём доказательство следующего факта:

13. *AA'* – биссектриса угла TAA_2.

Решение.



Рассмотрим треугольник $A_3B_3C_3$, получившийся из исходного треугольника гомотетией, переводящей вписанную окружность в описанную (см. рис. 3.13). Докажем аналогичное утверждение для него. Тогда достаточно доказать, что A_3O – биссектриса угла JA_3X, где J – точка касания вневписанной окружности со стороной B_3C_3, а X – центр гомотетии, переводящей вписанную окружность с описанной (по пункту 3.3 прямая TA совпадает с прямой A_3X).

Заметим, что A_3J проходит через A'' – точку, диаметрально противоположную A'.

$\angle A''OA_3 = \angle A''A'A$ ($OA_3 \parallel A'A$)

Но $\angle A''OA = 2\angle A''A'A$, значит $\angle A''OA_3 = \angle A_3OA$.

Значит, треугольники $OA''A_3$ и OAA_3 равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle A''A_3O = \angle AA_3O$, что и требовалось.

Оглавление

Представление работы

Титульный лист 1

Цель работы 2

Содержание работы 2

Работа

Оглавление 5

Введение 6

1. Вспомогательные факты 7

2. Окружности, вписанные в сегмент 13

3. Полувписанная окружность 15

4. Аналогии 30

Заключение 35

Список литературы 35

Введение

В данной работе рассматривается серия задач, иллюстрирующих ряд интересных свойств окружности, которая касается двух сторон треугольника и окружности, описанной около этого треугольника. Большая часть задач была сформулирована в статье П.А. Кожевникова «Полувписанная окружность» из сборника «Математика в задачах», несколько задач были взяты из книжки А.В. Акопяна «Геометрия в картинках».

Свойства полувписанной окружности связаны с особенностями ее геометрического расположения, при этом обнаруживается ее связь не только с описанной окружностью треугольника, но и с вписанной окружностью. В частности, рассматриваются особенности расположения центра окружности, вписанной в треугольник, по отношению к полувписанной.

Основная часть работы (раздел 3) предваряется доказательством некоторых вспомогательных фактов (раздел 1) и рассмотрением нескольких важных задач об окружности, вписанной в сегмент (раздел 2).

Кроме того, рассматриваются свойства окружности, которая касается продолжений двух сторон треугольника и описанной окружности этого треугольника (раздел 4). Свойства такой окружности («внеполувписанной») полностью аналогичны свойствам полувписанной окружности и доказываются аналогичным методами. Взаимосвязь этих двух видов окружностей аналогична взаимосвязи вписанной и вневписанной окружностей треугольника.

Большинство доказательств основано на известных теоремах и фактах элементарной геометрии с привлечением свойств преобразований на плоскости, в частности, гомотетии и инверсии.

1. Вспомогательные факты

1.1 Лемма Архимеда.

Две окружности внутренним образом касаются в точке M. Пусть AB – хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке P. Докажите, что MP – биссектриса угла AMB.

Решение.

Выполним гомотетию с центром в точке M, переводящую меньшую окружность в большую (см. рис. 1.1). Тогда касательная AB к меньшей окружности перейдет в касательную l к большей окружности, причём $l \parallel AB$. Следовательно, точка D касания l с окружностью является серединой дуги AB, то есть MD – биссектриса угла AMB.

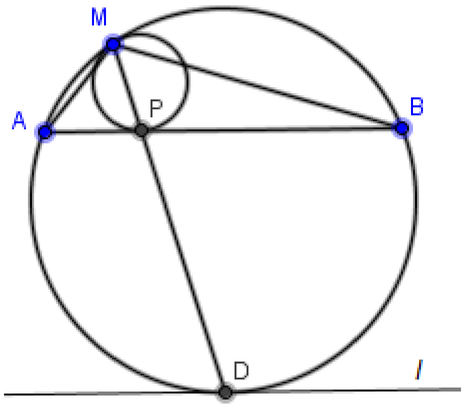


Рис. 1.1

Комментарий.

Отметим, что аналогичный факт верен и при внешнем касании окружностей.

Определение.

Симедианой треугольника называется прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы.

1.2 Задача о симедиане.

Касательные к описанной окружности треугольника *ABC*, проведенные в точках *B* и *C*, пересекаются в точке *X*. Докажите, что *AX* – симедиана треугольника *ABC.*

Решение.

Пусть *M* – середина *BC*. Проведём через *M* диаметр *KW*. Отложим равные углы $\angle WMD$ и $\angle KMA$ в одну полуплоскость относительно *KW* (*D* и *A* – точки пересечения сторон угла с окружностью). Отметим, что точки *X* и *M* инверсны относительно описанной окружности.

Докажем, что прямая *AD* содержит симедиану треугольника *ABC* (см. рис. 1.2). Действительно, $\angle MAW = \angle MA'W$, где *A'* – отраженная симметрично относительно диаметра *KW* точка *A*. Но точка *M* лежит на *A'D*, так как $\angle A'MO = \angle AMO = \angle DMW$. Тогда $\angle WAM = \angle WA'M = \angle WA'D = \angle WAD$, причём *AW* – биссектриса треугольника, так как точка *W* делит дугу *BC* пополам. Значит, *AD* – симедиана.

Четырёхугольник *OMDA* – вписанный ($\angle MDA = \angle A'DA = 0{,}5\ \angle A'OA = \angle KOA$). Значит, при инверсии относительно данной окружности окружность, проходящая через точки *O, M, A* и *D,* перейдёт в прямую *AD*. Точка *M* перейдёт в точку, инверсную ей относительно описанной окружности, то есть в точку *X*. Значит, точка *X* постоянна для всех точек *A* и *D*, значит, симедиана проходит через пересечение касательных к описанной окружности из точек *B* и *C*, что и требовалось.

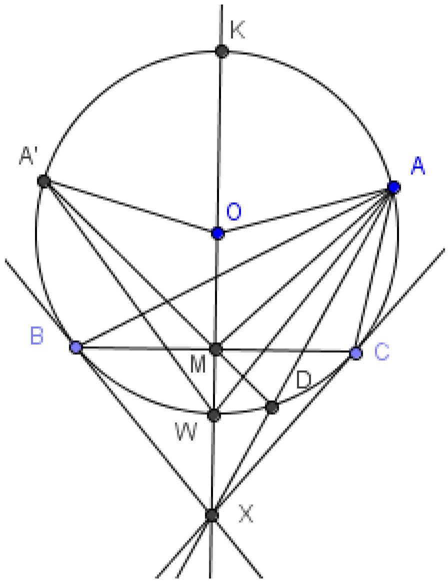


Рис. 1.2

1.3 Симедиана делит противолежащую сторону на отрезки, которые относятся друг к другу так же, как квадраты прилежащих к ним сторон.

Решение.

Пусть в треугольнике *ABC* проведены медиана *AM*, биссектриса *AL* и симедиана *AN*. $\angle BAM = \angle CAN = \alpha$, $\angle MAL = \angle LAN = \beta$, $\angle BMA = x$, $\angle CAN = y$.

Пользуясь теоремой синусов в треугольниках *ABM, ABN, ACM* и *ACN*, а также равенством *BM* = *CM*, получаем:

$$\frac{BN}{CN} = \frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{\frac{AB \cdot sin\alpha}{sinx} \cdot \frac{AB \cdot sin(\alpha+2\beta)}{sin(\pi-y)}}{\frac{AC \cdot sin(\alpha+2\beta)}{sin(\pi-x)} \cdot \frac{AC \cdot sin\alpha}{siny}} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

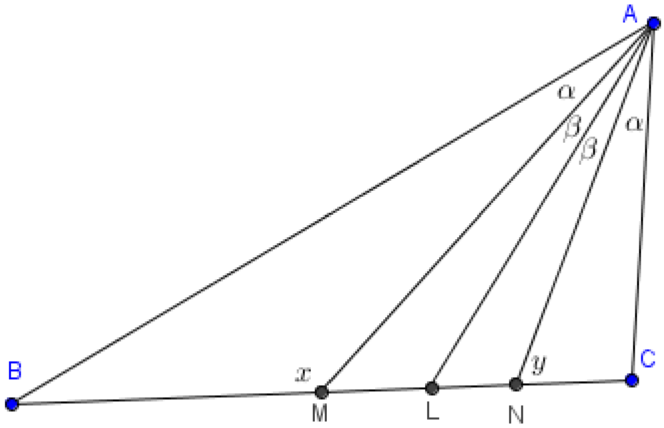


Рис. 1.3

1.4 Композиция гомотетий

Композицией двух произвольных гомотетий является либо гомотетия с коэффициентом, равным произведению коэффициентов этих гомотетий, и центром, лежащем на прямой, соединяющей центры этих гомотетий, либо параллельный перенос.

Решение.

Пусть даны гомотетии относительно точек A и B с коэффициентами k_1 и k_2. Точка I – образ точки A при композиции этих гомотетий. Зафиксируем некую точку C и её образ E (см. рис. 1.3).

Произвольная точка G при композиции этих гомотетий переходит в точку H. Следовательно, образом треугольника ACG является треугольник IEH, причём их стороны соответственно параллельны, так как при гомотетиях прямые переходят в им параллельные.

Если соединить прямыми соответственные вершины треугольников с параллельными сторонами, они либо пересекутся в одной точке, являющейся центром гомотетии, переводящей один треугольник в другой, либо будут попарно параллельны.

В первом случае пересечением этих прямых будет некоторая точка F. Значит, точка H является образом точки G при гомотетии относительно точки F с коэффициентом, равным отношением сторон треугольника, то есть $k_1 \times k_2$, что и требовалось.

Во втором случае треугольники равны, одинаково ориентированы и имеют параллельные стороны, а значит существует параллельный перенос, переводящий один треугольник в другой.

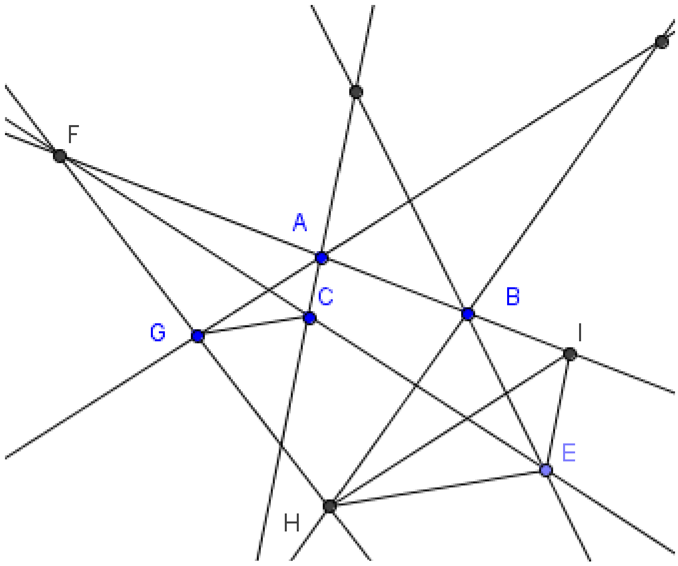


Рис. 1.4

1.5 В прямоугольном треугольнике *ABC* с гипотенузой *AC* образом гипотенузы при гомотетии с центром в вершине *A* и коэффициентом $sin^2\angle A$ является проекция катета *AB* на гипотенузу.

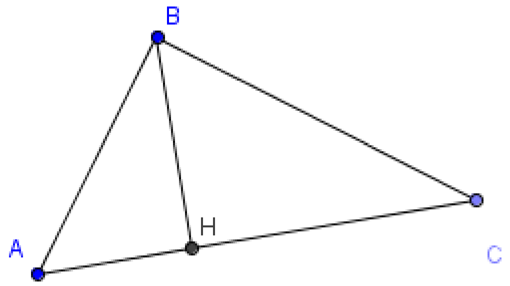


Рис. 1.5

Решение

Опустим высоту *BH*. Пусть $\angle A = \alpha$

Тогда:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB\sin\alpha}{AC} = \frac{AC\sin^2\alpha}{AC} = \sin^2\alpha$$

Значит, при гомотетии с центром в точке *A* и коэффициентом $sin^2\angle A$ образом гипотенузы *AC* является проекция катета *AB* на гипотенузу.

1.6 Пусть точки *A* и *B* инверсны относительно окружности, тогда серединный перпендикуляр к отрезку *AB* является радикальной осью данной окружности и любой из этих точек.

Решение.

Пусть *O* - центр данной окружности, *C* - одна из точек пересечения окружности с перпендикуляром к прямой *AB*, проходящим через точку *A*. Тогда, так как точки *A* и *B* инверсны, то *BC* - касательная к окружности (см. рис. 1.6).

Прямая, содержащая среднюю линию *FK* треугольника *ABC*, параллельную *AC*, является серединным перпендикуляром к отрезку *AB*. Так как *FC* = *FA* = *FB*, то прямая *FK* является радикальной осью окружности и любой из точек *A* или *B*.

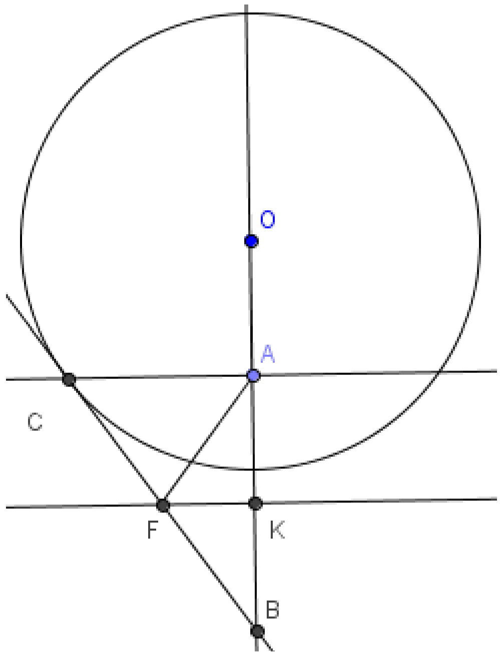


Рис. 1.6

2. Окружности, вписанные в сегмент.

2.1 В окружности ω проведена хорда *AB*, *M* – середина одной из дуг *AB*.
а) Найдите радиус наибольшей окружности, вписанной в сегмент, отсекаемый хордой *AB* (не содержащий точки *M*), если радиус окружности ω равен *R*, *MA* = *a*.
б) Докажите, что длина касательной, проведенной из точки *M*, к любой окружности, вписанной в этот же сегмент, равна *MA*.
в) Докажите, что если в этот же сегмент вписать две окружности, пересекающиеся в точках *C* и *D*, то прямая *CD* содержит точку *M*.

Решение.

Рассмотрим произвольную окружность, вписанную в сегмент, отсекаемый хордой *AB* и не содержащий точки *M* (см. рис. 2.1). Пусть *P* – точка касания этой окружности с окружностью ω, а *N* – точка касания этой окружности с хордой *AB. K* – середина *AB,* а угол *NMK* равен β.

а) M, N и *P* лежат на одной прямой.

$$MK = a\sin\angle MBK \ = \frac{a^2}{2R}$$

$$MN = \frac{a^2}{2R\cos\beta}$$

$$MP = 2R\cos\beta$$

$$\frac{NP}{MP} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{2R\cos\beta - \frac{a^2}{2R\cos\beta}}{2R\cos\beta} = \frac{r}{R}$$

$$r = \frac{2R\cos\beta - \frac{a^2}{2R\cos\beta}}{2\cos\beta}$$

$$r = R - \frac{a^2}{4Rcos^2\beta}$$

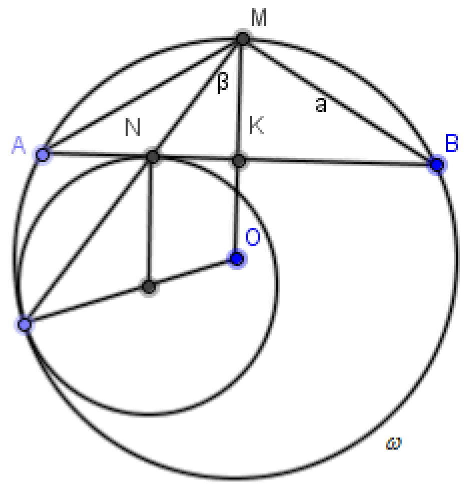


Рис. 2.1

Следовательно, *r* принимает наибольшее значение, если *cos*β = *1.* Таким образом, β = *0.* При этом:

$$r = R - \frac{a^2}{4R}$$

б) Пусть *P(M)* – степень точки *M* относительно меньшей окружности.

$$P(M) = MN \cdot MP = \frac{a^2}{2Rcos\beta} \cdot 2Rcos\beta = a^2$$

Следовательно, длина касательной, проведенной из точки *M* к меньшей окружности, равна *MA*.

в) Степени точки *M* относительно всех окружностей, вписанных в сегмент, равны. Следовательно, точка *M* лежит на радикальной оси любых двух таких окружностей. То есть, если окружности пересекаются в точках *C* и *D*, то *M* лежит на прямой *CD*.

2.2 Из точки D окружности ω опущен перпендикуляр DC на диаметр AB. Окружность ω_1 касается отрезка CA в точке E, а также отрезка CD и окружности ω. Докажите, что отрезок DE – биссектриса треугольника ADC.

Решение.

Ранее было доказано, что $BD = BE$ (см. рис. 2.2). Тогда $\angle DEB = \angle BDE$, то есть $90^\circ - \angle EDC = \angle BDC + \angle EDC$; $2\angle EDC = 90^\circ - \angle BDC = \angle DBA = \angle ADC$.

Таким образом, DE – биссектриса треугольника ADC.

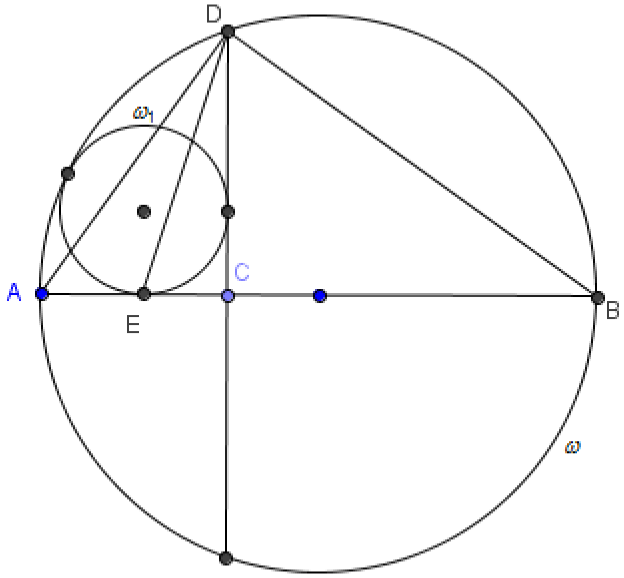


Рис. 2.2

3. Полувписанная окружность

Для задач этого раздела условимся о следующих обозначениях:

A, *B*, *C* – вершины треугольника.

A_1, B_1, C_1– точки касания вписанной окружности треугольника со сторонами;

A_2, B_2, C_2 – точки касания вневписанных окружностей треугольника со сторонами;

A’, *A’’* – середины дуг *BC* описанной окружности, соответственно не содержащей и содержащей точку *A.* Точки *B’*, *B’’*, *C’*, *C’’* определяются аналогично.

Треугольник *ABC* вписан в окружность ω. Окружность S_A касается сторон *AB* и *AC* в точках *K* и *L* соответственно и дуги *BC* окружности ω внутренним образом в точке $T \equiv T_A$. Аналогично определяются окружности S_B и S_C и точки T_B и T_C. Далее будем называть окружности S_A, S_B *и* S_C полувписанными.

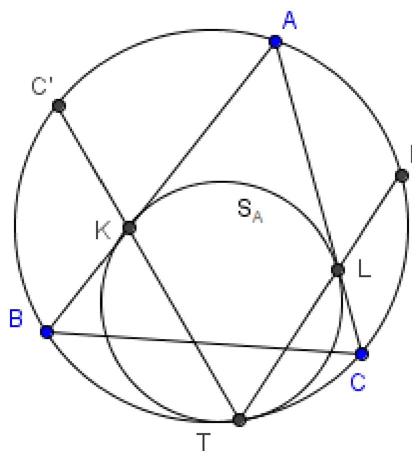
Докажем следующие факты:

3.1 Точки *T*, *K*, *C’* (а также *T*, *L*, *B’*) лежат на одной прямой.

Решение.

Утверждение следует из леммы Архимеда для полувписанной окружности и хорд описанной окружности *AB* и *AC* соответственно (см. рис. 3.1).

Рис. 3.1



3.2 Прямая *TA* является симедианой треугольника *B'C'T*.

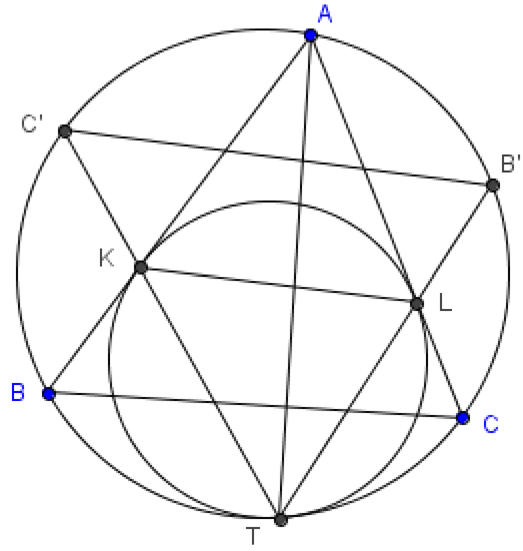


Рис. 3.2

Решение.

Применим утверждение задачи 1.2 о симедиане к треугольнику *KLT*, тогда *TA* – симедиана этого треугольника (см. 3.2).

Гомотетия относительно точки *T* с коэффициентом, равным отношению длин отрезков *TC'* к *TK*, переводит меньшую окружность в большую, точки *K* и *L* в точки *C'* и *B'* соответственно, а симедиану *TA* треугольника *KLT* в симедиану *TA* треугольника *B'C'T.*

3.3 Прямые AT_A, BT_B и CT_c, где T_B и T_C – точки касания двух других полувписанных окружностей треугольника ABC с его описанной окружностью ω, пересекаются в одной точке.

Решение.

Рассмотрим гомотетию, переводящую вписанную окружность треугольника в описанную (см. рис. 3.3).

При этой гомотетии стороны треугольника перейдут в параллельные им отрезки, касающиеся описанной окружности, то есть проходящие через A', B' и C'. Отметим, что центр гомотетии X, точка A и её образ A_3 лежат на одной прямой.

Но так как T_AA – симедиана в треугольнике $B'C'T_A$, то она по задаче 1.2 о симедиане проходит через точку A_3, то есть точки X, A и T_A лежат на одной прямой

Аналогичное рассуждение можно провести для (BT_B) и (CT_c), то есть все три указанные прямые проходят через X – центр гомотетии, переводящей вписанную окружность в описанную.

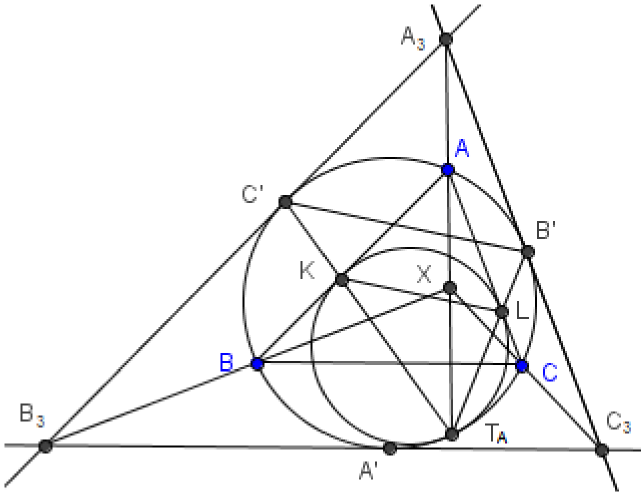


Рис. 3.3

Комментарий.

При решении этой задачи можно также было использовать теорему о композиции гомотетий.

3.4 Прямая *TA''* содержит медиану треугольника *B'C'T*.

Решение.

Пусть биссектриса *TA'''* угла $\angle C'TB'$ пересекается с окружностью в точке *A'''* (см. рис. 3.4).

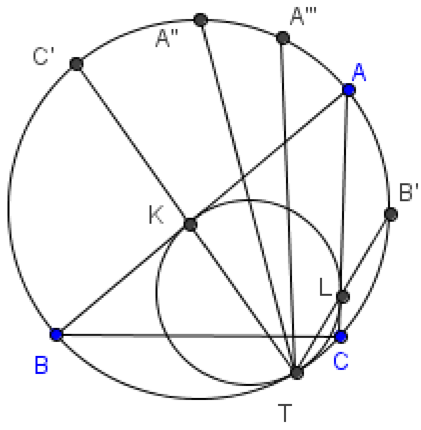


Рис. 3.4

Дуги *C'A'''* и *B'A'''* равны (биссектриса делит угол пополам). Также равны дуги *BA''* и *CA''*, то есть:

$\cup BA - \cup AA'' = \cup CA + \cup AA''$

$\cup BA = \cup CA + 2\cup AA''$.

Разделим это равенство на 2: $\cup BC' = \cup CB' + \cup AA''$.

Левую часть вычитаем из *BA''*, а правую – из *CA''*:

$\cup A''C' = \cup AB'$.

Левую часть вычитаем из $\cup CA'''$, правую из $\cup B'A'''$:

$\cup A''A''' = \cup AA'''$.

Следовательно, луч *TA''* симметричен *TA* (симедиане) относительно биссектрисы *TA'''*, значит он содержит медиану треугольника.

3.5 Центр *I* окружности, вписанной в треугольник *ABC*, лежит на прямой *TA''*.

Решение

В пункте 3.4 доказан следующий факт:
$\cup C'A'' = \cup B'A$, а значит и $\cup C'A'' = \cup CB'$, то есть $A''B' \parallel CC'$. Аналогично, $A''C' \parallel BB'$.

BB' и *CC'* пересекаются в инцентре треугольника *ABC*. Следовательно, *C'A''B'I* – параллелограмм.
Значит, точка *I* лежит на *A''M*, где *M* – середина *B'C'*. Но и точка *T* лежит на *A''M* (см. пункт 3.4).

Следовательно, точка *I* лежит на *TA''*.

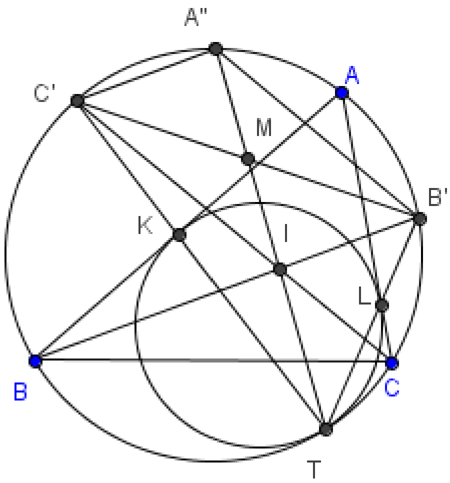


Рис. 3.5

3.6 Точки *T*, *B*, *K* и *I* (а также точки *T*, *C*, *L* и *I*) лежат на одной окружности;

Решение

В пункте 3.4 было доказано, что $\cup C'A'' = \cup B'A$. Значит, $\angle KBB' = \angle KTI$, то есть четырехугольник *KITB* — вписанный (см. рис. 3.6).

Аналогичное рассуждение можно провести для точек *T*, *C*, *L* и *I.*

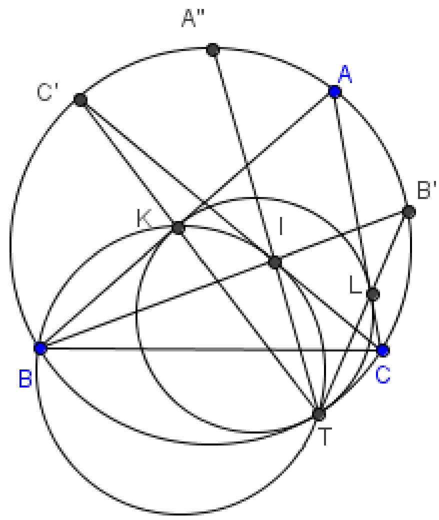


Рис. 3.6

3.7 Прямые *CC*' и *BB*' являются касательными к окружностям, описанным вокруг четырёхугольников *KITB* и *LITC*, соответственно;

Решение

В пункте 3.4 было доказано, что ∪*C'A''* = ∪*B'A*. Тогда ∪*BA''* = ∪*C'B* + ∪*B'C* . Следовательно, ∠*BTA''* = ∠*C'IB* (см. рис. 3.7).

По теореме, обратной теореме об угле между касательной и хордой, получим, что *CC'* – касательная к окружности, описанной вокруг четырехугольника *KITB*.

Аналогичное рассуждение можно провести для окружности, описанной вокруг четырехугольника *LITC*, и прямой *BB*'.

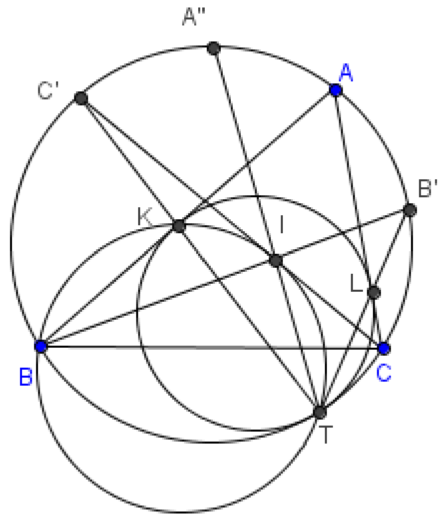


Рис. 3.7

3.8 Точка I – середина отрезка KL.

Решение.

Пусть M – точка пересечения TA'' и $B'C'$(см. Рис. 3.8). В пункте 3.5 было доказано, что точка M является серединой отрезка $B'C'$.

При гомотетии с центром в точке T большая окружность переходит в меньшую, точки C' и B' – в K и L соответственно, а точка M переходит в точку пересечения прямых KL и TA''. Тогда $\angle C'IK = \angle KBI = \angle IBC = \angle B'TC = \angle LIC$.

Значит, KI и IL лежат на одной прямой, и тогда образом точки M при рассмотренной гомотетии действительно является точка I. Следовательно, I – середина отрезка KL.

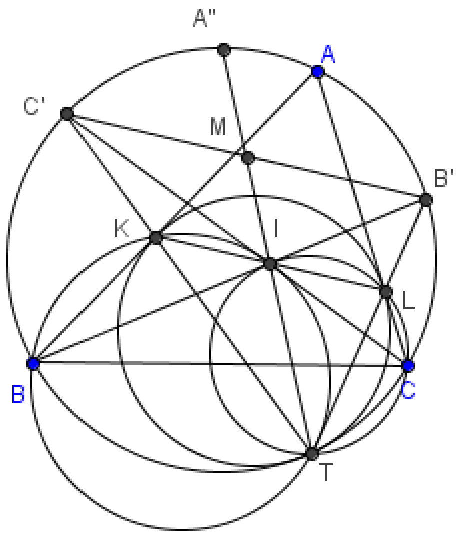


Рис. 3.8

3.9 Отрезок *KL* – касательная к окружностям, описанным около *BIC* и *ITA'*.

Решение.

1) Так как $\angle LIC = \angle LTC = \angle IBC$, то *KL* – касательная к описанной окружности треугольника *IBC* (см. рис. 3.9).

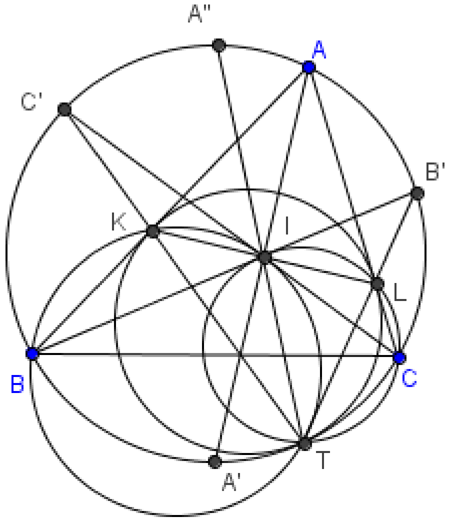


Рис. 3.9

2) $AA' \perp KL$ (*AI* – медиана и биссектриса в треугольнике *LAK*), $\angle\ A''TA'$ – прямой (вписанный и опирается на диаметр), $\angle KIA' = \angle ITA'$.

То есть, *KL* – касательная к описанной окружности треугольника *ITA'*.

3.10

а) ($B'C'$) || (KL);

б) ($B'C'$) делит отрезки AK и AL пополам.

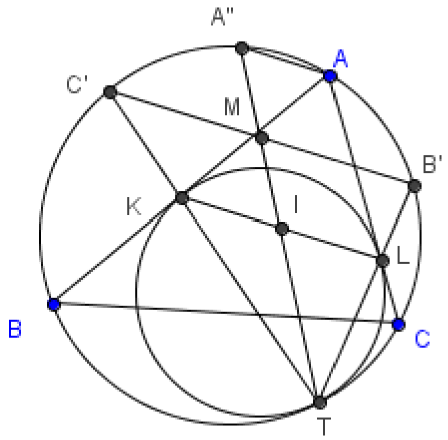


Рис. 3.10

Решение

1) $B'C'$ переходит в LK при гомотетии с центром в точке T, переводящей большую окружность в меньшую, следовательно эти прямые параллельны (см. рис. 3.10).

2) $A''C' = AB'$ (см. пункт 3.4). Следовательно:

$AA'' \parallel B'C'$; $A''M = MI$ ($A''B'IC'$ – параллелограмм)

Значит, расстояние между прямыми AA'' и $B'C'$ равно расстоянию между прямыми $B'C'$ и KL, то есть отрезки AK и AL делятся пополам прямой $B'C'$.

3.11 *KL, TA', BC* пересекаются в одной точке или параллельны.

Решение

Заметим, что перечисленные прямые – радикальные оси окружностей, описанных вокруг треугольников *ABC*, *ITA'* и *BIC* (см. рис. 3.11). Следовательно, *KL, TA', BC* пересекаются в одной точке или параллельны..

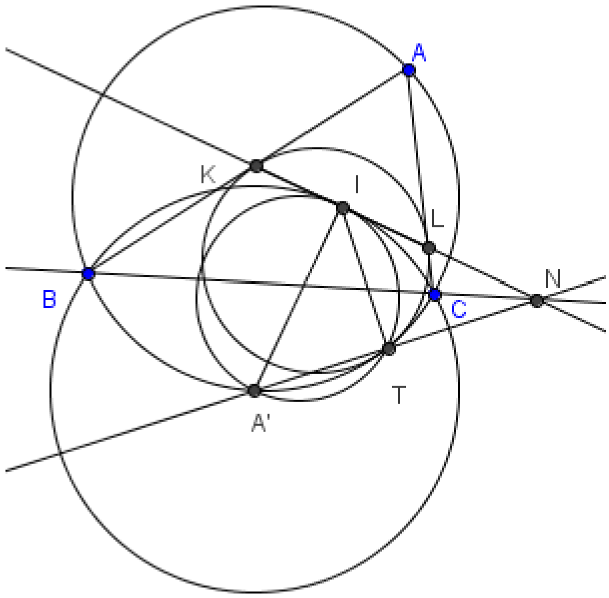


Рис. 3.11

3.12 Точка пересечения прямых из предыдущей задачи и еще две точки, определяемые аналогично, лежат на одной прямой.

Решение

Заметим, что квадрат расстояния от этих точек до точки *I* равно степени этих точек относительно описанной окружности (см. рис. 3.12). То есть, эти точки лежат на радикальной оси точки *I* и описанной окружности, значит, они лежат на одной прямой.

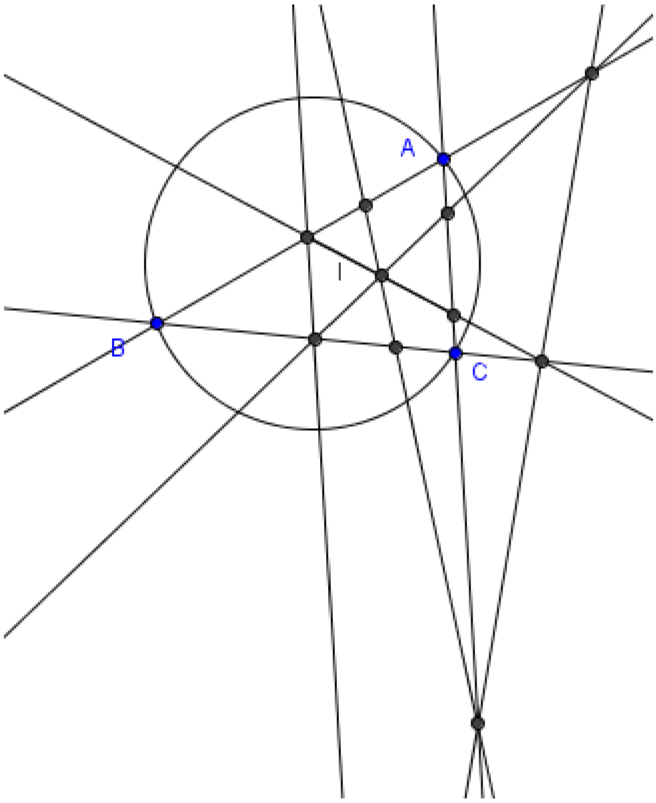


Рис. 3.12

3.13 *AA'* – биссектриса угла TAA_2.

Решение.

Рассмотрим треугольник $A_3B_3C_3$, получившийся из исходного треугольника гомотетией, переводящей вписанную окружность в описанную (см. рис. 3.13). Докажем аналогичное утверждение для него. Тогда достаточно доказать, что A_3O – биссектриса угла JA_3X, где J – точка касания вневписанной окружности со стороной B_3C_3, а X – центр гомотетии, переводящей вписанную окружность с описанной (по пункту 3.3 прямая TA совпадает с прямой A_3X).

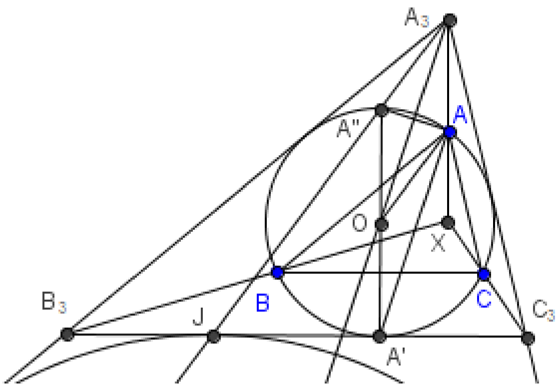


Рис. 3.13

Заметим, что A_3J проходит через A'' – точку, диаметрально противоположную A'.

$\angle A''OA_3 = \angle A''A'A$ ($OA_3 \parallel A'A$)

Но $\angle A''OA = 2\angle A''A'A$, значит $\angle A''OA_3 = \angle A_3OA$.

Значит, треугольники $OA''A_3$ и OAA_3 равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle A''A_3O = \angle AA_3O$, что и требовалось.

3.14 Пусть перпендикуляр, восстановленный из точки *B* к прямой *AB*, пересекается с описанной окружностью в точке *U*, и с биссектрисой угла *A* в точке *X*. Тогда длина касательной, проведённой из точки *U* к полувписанной окружности, равна длине отрезка *UX*.

Решение

Заметим, что *U* – точка, диаметрально противоположная вершине *A*, так как $\angle ABU = 90°$. Проведём прямую *CU*, отметим её пересечение с биссектрисой *AA'* точку *Y*. Тогда $\angle ACU = 90°$. Также заметим, что прямая *UA'* перпендикулярна биссектрисе *AA'* (см. рис. 3.14а).

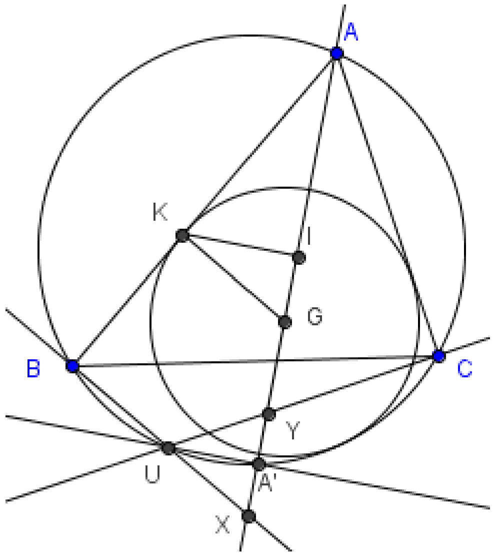


Рис. 3.14а

Нужно доказать, что *UA'* является радикальной осью полувписанной окружности и точки *X*.

$\angle YUX = \angle BAC = 2\angle BAY = 2\,(90° - \angle YXU) = 2\angle A'UX$.

Следовательно, *UA'* является биссектрисой и высотой в треугольнике *YUX*, а значит этот треугольник равнобедренный, *YA' = A'X*.

По утверждению из пункта 1.6 серединный перпендикуляр двух точек, инверсных относительно некоторой окружности, является радикальной осью этой окружности и какой-нибудь из этих точек. Достаточно доказать, что *X* и *Y* инверсны относительно полувписанной окружности.

При гомотетии с центром в точке A и коэффициентом $\sin^2\angle BAA'$ по пункту 1.5 центр полувписанной окружности G переходит в центр вписанной окружности *I*, так как $\angle GKA = 90°$, $\angle KIA = 90°$. Образом точек *X* и *Y* являются проекции вершин B и C соответственно на биссектрису AX. Назовём их *X'* и *Y'*. *W* - точка пересечения биссектрисы *AI* со стороной *BC* (см. рис. 3.14б).

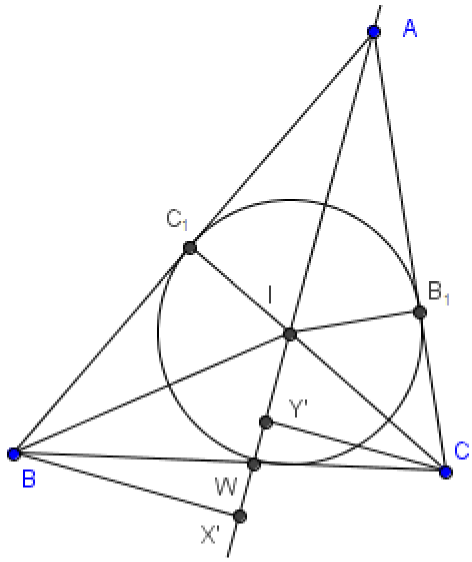


Рис. 3.14б

Отметим, что $\angle ABX' = \angle ACY'$, $\angle BC_1I = \angle BX'I = \angle CY'I = CB_1Y = 90°$, то есть углы в четырёхугольниках IB_1CY' и $IX'BC_1$ равны.

$\angle CIY' = 180° - \angle IWC - \angle ICW = 180° - \angle IBW - \angle BIW - \angle ICW = 180° - \angle IBW - \angle IBA - \angle BAI - \angle ICW = 180° - \angle IBA - (\angle IBW + \angle BAI + \angle ICW) = 90° - \angle IBA = \angle BIC_1$.

То есть прямоугольные треугольники *CIY'* и BIC_1 подобны, аналогично подобны треугольники *BIX'* и CIB_1. Следовательно, все стороны четырёхугольников $IX'BC_1$ и IB_1CY' пропорциональны с коэффициентом, равным отношению *IC* к *IB*, а углы равны, значит эти четырехугольники подобны, а тогда:

$$\frac{r}{IX'} = \frac{IY'}{r}$$

$$IX' \cdot IY' = r^2$$

Следовательно, точки *X'* и *Y'* инверсны относительно вписанной окружности, что и требовалось.

3.15 Пусть точка *Q* – пересечение прямых *AT* и *KL*. Тогда угол *BQK* равен углу *CQL*.
Решение.

Для равенства этих углов достаточно доказать, что треугольники *BKQ* и *CLQ* подобны, то есть равенство отношений сторон *BK* и *LC*, и *QK* и *LQ*.

Запишем степени точек *K* и *L*:

P(K) = BK × AK = TK × KC’

P(L) = LC × AL = TL × LB’

Отсюда:

$$BK = \frac{TK \cdot KC'}{AK}$$

$$LC = \frac{TL \cdot LB'}{AL}$$

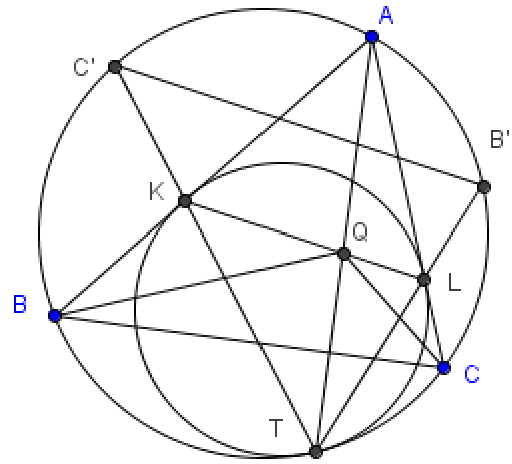


Рис. 3.15

Отрезки касательных равны:

AK = AL

По теореме Фалеса:

$$\frac{TK}{TL} = \frac{KC'}{LB'}$$

Также используем факт из 1.3 для треугольника *TKL* и его симедианы *TQ*:

$$\frac{TK^2}{TL^2} = \frac{QK}{LQ}$$

Следовательно:

$$\frac{BK}{LC} = \frac{\frac{TK \cdot KC'}{AK}}{\frac{TL \cdot LB'}{AL}} = \frac{TK^2}{TL^2} = \frac{QK}{LQ}$$

Следовательно, треугольники *BKQ* и *CLQ* подобны и углы *BQK* и *CQL* равны.

4. Аналогии между свойствами внешней и внутренней полувписанных окружностей

Окружность S_{A1} касается продолжений сторон AB и AC в точках K_1 и L_1 соответственно и дуги BC окружности ω внешним образом в точке T_{A1}. Аналогично определяются окружности S_{B1} и S_{C1} и точки T_{B1} и T_{C1}. Далее будем называть окружности S_{A1}, S_{B1} и S_{C1} внеполувписанными.

Покажем аналогию свойств полувписанной и внеполувписанной окружностей. Для этого сформулируем факты, аналогичные доказанным в разделе 3. Доказательства этих утверждений полностью аналогичны уже рассмотренным, поэтому они не приводятся.

4.1 Точки T_{A1}, K_1, C'' (а также T_{A1}, L_1, B'') лежат на одной прямой.

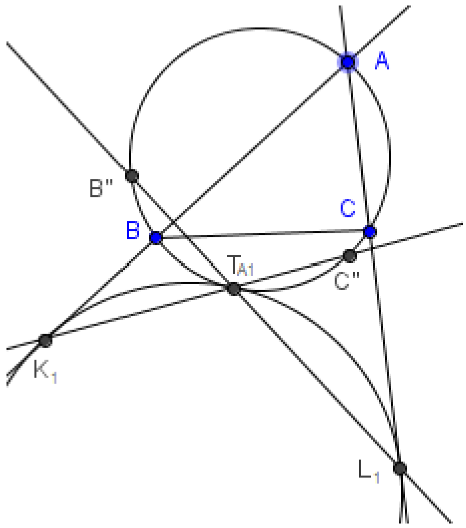


Рис. 4.1

4.2 Прямая $T_{A1}A$ содержит симедиану треугольника $B''C''T_{A1}$.

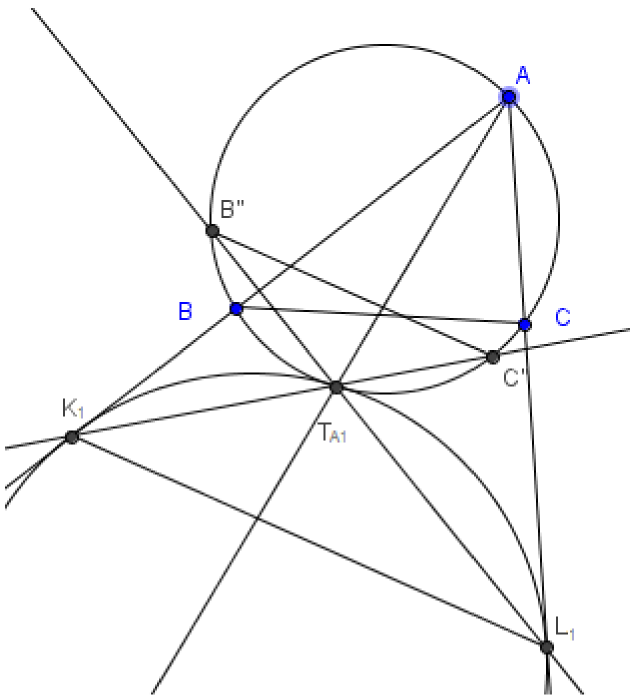


Рис. 4.2

4.3 Прямые AT_{A1}, BT_{B1} и CT_{C1} пересекаются в одной точке.

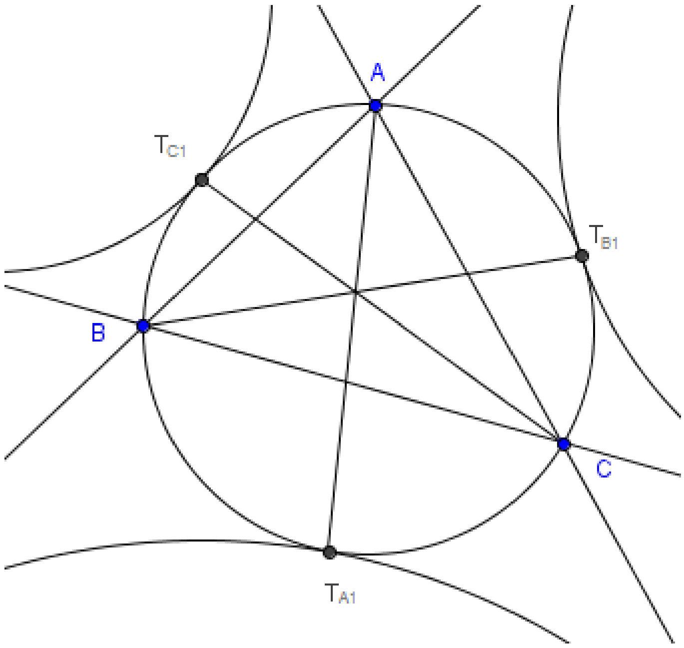


Рис. 4.3

4.4 Прямая $T_{A1}A''$ содержит медиану треугольника $B''C''T_{A1}$.

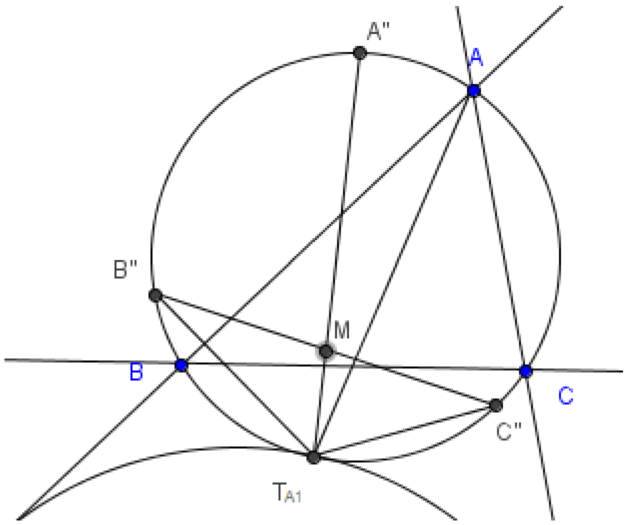


Рис. 4.4

4.5 Центр I_A окружности, вневписанной в треугольник ABC и касающейся стороны BC, лежит на прямой $T_{A1}A''$.

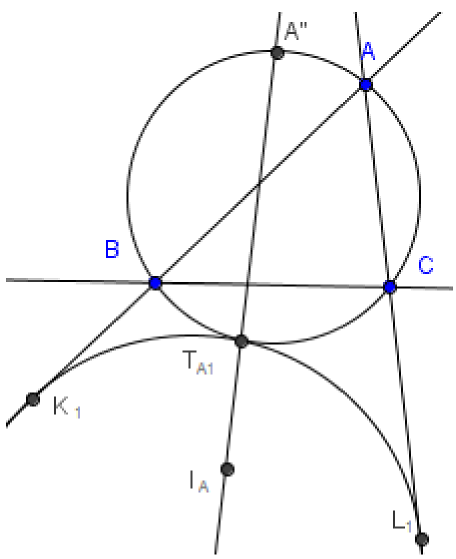


Рис. 4.5

4.6 Точки T_{A1}, B, K_1 и I_A (а также точки T_{A1}, C, L_1 и I_A) лежат на одной окружности;

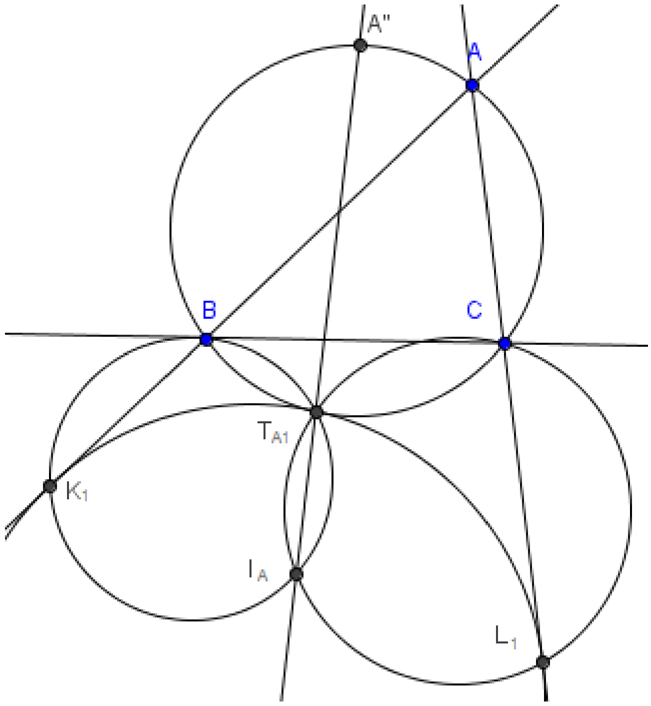


Рис. 4.6

4.7 Прямые CC'' и BB'' являются касательными к окружностям, описанным вокруг четырёхугольников $K_1I_AT_{A1}B$ и $L_1I_AT_{A1}C$, соответственно.

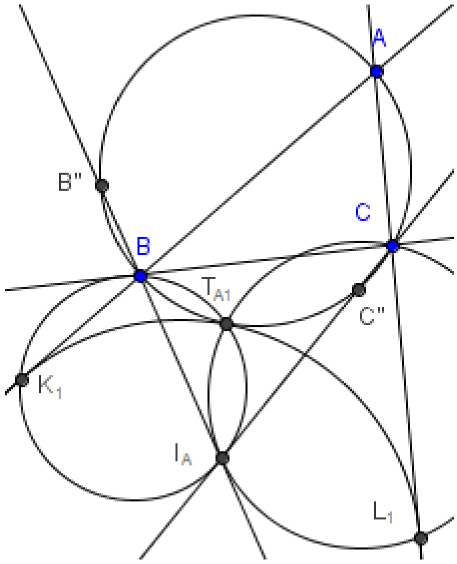


Рис. 4.7

4.8 Точка I_A – середина отрезка K_1L_1.

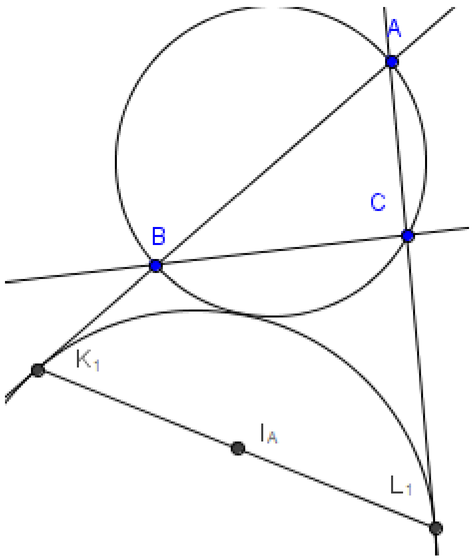


Рис. 4.8

4.9 Отрезок K_1L_1 – касательная к окружностям, описанным около BI_AC и $I_AT_{A1}A''$.

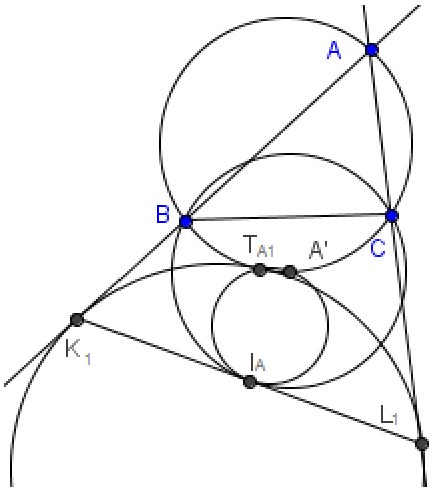


Рис. 4.9

4.10
а) $(B''C'') \parallel (K_1L_1)$;
б) $(B''C'')$ делит отрезки AK_1 и AL_1 пополам.

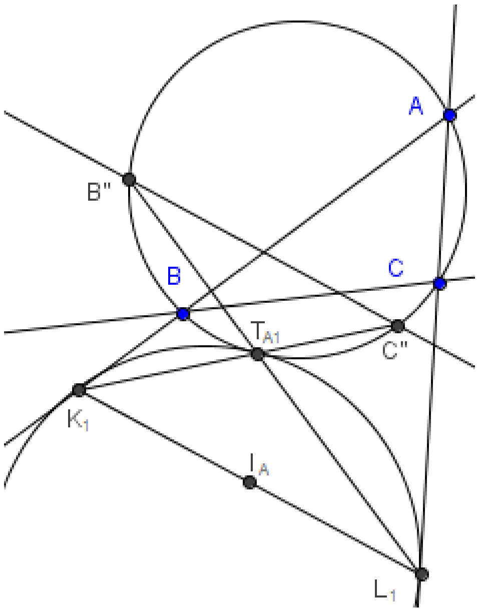


Рис. 4.10

4.11 K_1L_1, $T_{A1}A'$, BC пересекаются в одной точке или параллельны.

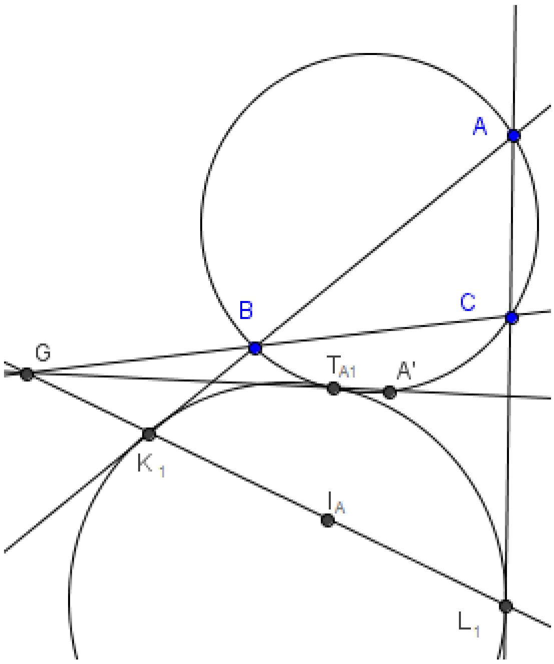
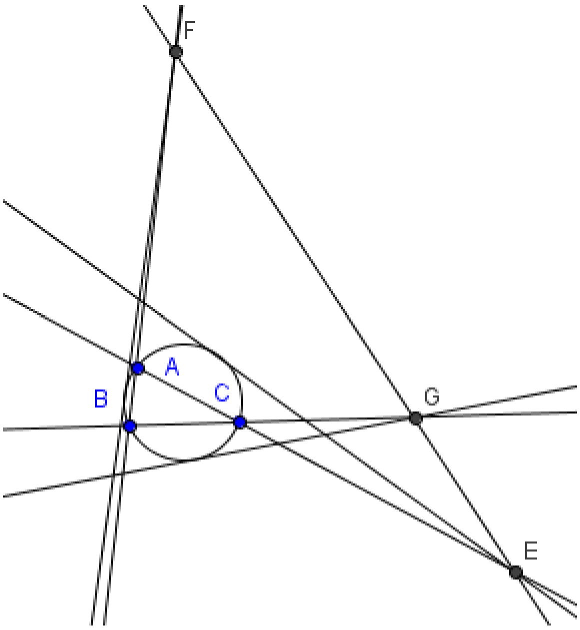


Рис. 4.11

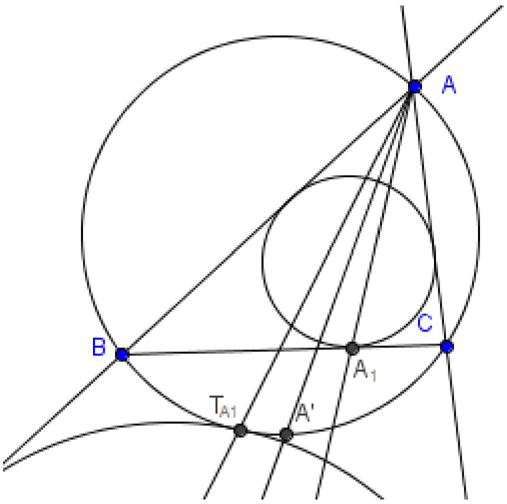
4.12 Точка пересечения прямых из предыдущей задачи и еще две точки, определяемые аналогично, лежат на одной прямой.

Рис. 4.12



4.13 AA' – биссектриса угла $T_{A1}AA_1$.

Рис. 4.13



Заключение.

Заметим, что некоторые задачи из предложенной работы можно найти в задачниках и геометрических статьях, а некоторые являются «олимпиадной классикой».

Например, некоторые из них входили в подборку М. Сонкина «Окружности, вписанные в сегменты, и касательные» (Конференция Турнира городов, 1999 г.).

Если рассматривать данные задачи без контекста, то они достаточно трудны, а в рамках этой серии – каждая задача имеет сравнительно короткое геометрическое решение, использующее предыдущие пункты.

Отметим, что в данной работе рассмотрены далеко не все из известных свойств полувписанных и внеполувписанных окружностей. Кроме того, дальнейшее исследование может быть связано с рассмотрением «обобщенных полувписанных окружностей» (окружностей, касающихся стороны треугольника, и описанной около этого треугольника окружности).

Список литературы.

1. А.В. Акопян. Геометрия в картинках. – М., 2011.

2. А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. Геометрия для 8 – 9 классов: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1991.

3. П.А. Кожевников. «Полувписанная» окружность. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду. – М.: МЦНМО, 2009.