ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ПРОДОЛЖЕНИИ ВЛОЖЕНИЯ

А.Новиков

Дана единичная сфера и несколько непересекающихся наборов непересекающихся окружностей на ней. При каком условии в шаре, ограниченном этой сферой, существует такое же количество сфер с дырками, края которых являются данными наборами? Ответ на этот вопрос приведен ниже. Он получен в 2012 С. Аввакумовым [A, ABRS].

Основной результат работы — более простое доказательство этой теоремы.

Пусть M и N — два набора непересекающихся окружностей на сфере S. Покрасим связные компоненты дополнения $S-N$ в два цвета так, чтобы соседние компоненты были разных цветов. Набор M *лежит по одну сторону* (на сфере) от N, если M содержится в одинаково окрашенных компонентах дополнения $S-N$. Наборы M и N *не зацеплены* (на сфере), если M лежит по одну сторону от N и N лежит по одну сторону от M.

Теорема о продолжении вложения. *Для наборов непересекающихся окружностей на сфере существуют непересекающиеся сферы с дырками, лежащие в шаре, ограниченном сферой, чьи края совпадают с данными наборами, тогда и только тогда, когда эти наборы попарно не зацеплены.*

Доказательство необходимости. Пусть сфера с дырками P_i лежит в шаре, ограниченном сферой S. Добавим 'шапочку' (гомеоморфную диску) снаружи S к каждой окружности из ∂P_i так, чтобы объединение сферы P_i и ее 'шапочек' было самонепересекающейся сферой $\widehat{P}_i$. (Можно считать, что S круглая сфера, граничные окружности ∂P_i круглые, и ни одна из них не является экватором. Для каждой окружности ∂P_i возьмем круглую сферу, проходящую через нее и центр S. Возьмем части таких сфер, лежащие снаружи S в качестве 'шапочек'.)

Очевидно, все одинакого покрашенные компоненты связности дополнения $S-M_i = S-\partial P_i$ лежат с одной стороны от $\widehat{P}_i$, а P_i и P_j не пересекаются. Тогда $S\cap P_j = M_j$ лежит по одну сторону от $\widehat{P}_i$, т.е. в объединении одинакого покрашенных компонент дополнения $S-M_i$.

Таким образом M_j по определению лежит по одну сторону от M_i, а M_i лежит по одну сторону от M_j. Тогда M_i и M_j не зацеплены. $\square$

Доказательство достаточности. Воспользуемся индукцией по количеству окружностей в $M_1\sqcup\dots\sqcup M_m$. Пусть p — окружность из $M_1\sqcup\dots\sqcup M_m$, ограничивающая в S диск D, не пересекающийся с $M_1\sqcup\dots\sqcup M_m$. Не умаляя общности $p\subset M_1$. Пусть M_1' объединение окружностей M_1-p (заметим, что M_1' может быть пусто).

Назовем B закрытый шар, ограниченный S (т.е. внутреннюю часть S). Множества $M_1', M_2,\dots,M_m$ попарно не зацеплены. По предположению индукции существуют непересекающиеся сферы с дырками $P_1', P_2,\dots,P_m\subset B$ такие что $\partial P_i = M_i$ для всех $i=2,\dots,m$ и $\partial P_1' = M_1'$. Пусть D' диск полученный из замыкания D небольшой деформацией так, чтобы внутренняя часть D' была внутри B и $\partial D' = p$. По следущему утверждению любые две точки из $M_1 = M_1'\sqcup p$ могут быть соединены путем внутри S не пересекающим $P_2,\dots,P_m$. Таким образом мы можем связать D' и P_1' с помощью трубки, лежащей внутри B и не пересекающей $P_2,\dots,P_m$, получив при этом сферу с дырками. Назовем ее P_1. Имеем $\partial P_1 = p\sqcup\partial P_1' = M_1$, $P_1\subset B$ и P_1 не пересекающееся с $P_2,\dots,P_m$. Шаг индукции доказан. $\square$

Утверждение. *Набор p_m лежит в одной связной компоненте дополнения $B-(P_1\sqcup\dots\sqcup P_{m-1})$.*

Доказательство утверждения. Предположим противное. Рассмотрим любые две точки $A, B\in p_m$ из разных связных компонент дополнения $B-(P_1\sqcup\dots\sqcup P_{m-1})$. Обозначим через l путь внутри S, соединяющий A и B, и при этом $\bar{l} := \#(l\cap\bigsqcup_{i=1}^{m-1} P_i)$ минимально (минимум по всем таким l, объекты $A, B, p_m, S, P_1, \dots, P_{m-1}$ фиксированы). Тогда $\bar{l} > 0$ (иначе A и B лежали бы в одной компоненте). Так как p_m лежит по одну сторону от ∂P_i, точки A и B лежат в одной компоненте дополнения $B - P_i$, и $\#(l \cap P_i)$ четно для всех i. Тогда $\#(l \cap P_i) \geq 2$ для некоторого i. Обозначим через Q и R последовательные (на l) точки $l \cap P_i$. Обозначим через Q' точку l чуть перед Q и за R' точку l чуть после R. Так как P_i связно, Q и R можно соединить путем P_i. Значит Q' и R' можно соединить путем l', достаточно близким к P_i, но не пересекающим P_i. Путь l' не пересекает ничего из $P_1, \dots, P_{m-1}$, так как он достаточно близок к P_i, а $P_1, \dots, P_{m-1}$ попарно не пересекаются. Заменим часть пути l от Q' до R' на l'. Полученный путь назовем l''. Теперь $\overline{l''} = \bar{l} - 2$. Это противоречит минимальности $\bar{l}$. Поэтому l не пересекает $P_1 \sqcup \dots \sqcup P_{m-1}$, значит A и B должны лежать в одной связной компоненте дополнения $B - (P_1 \sqcup \dots \sqcup P_{m-1})$.

Литература

[A] S. Avvakumov, A counterexample to the Lando conjecture on intersection of spheres in 3-space, preprint, 2012.

[ABRS] С. Аввакумов, А. Бердников, А. Рухович, А. Скопенков Как пересекаются в пространстве криволинейные сферы, или меандры http://www.turgor.ru/lktg/2012/3/index.htm