Поверхности, невидимые из точки

А.Д. Попеску

Работа выполнена под научным руководством проф. В.Ю.Протасова (МехМат МГУ) и подана на Московскую Математическую Конференцию школьников.

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам поиска невидимых фигур на плоскости и поверхностей. В работе будет предложена конструкция поверхности, невидимой из заданной точки (теорема 1), а также доказан факт о кривых второго порядка (гипотеза 2). В начале формулировки основного результата дано определение невидимых из точки поверхностей и фигур.

1 Мотивировка.

Впервые задачу о нахождении поверхности наименьшего сопротивления поставил Исаак Ньютон в 1687 году в своей книге "Principia" [1]. Ньютон решил эту задачу при следующих, вполне естественных, предположениях: поверхность выпукла и получена путем вращения плоской фигуры вокруг оси.

Оказалось, что оптимальная поверхность имеет несколько парадоксальную форму: она имеет "тупой конец", без заострения. Ньютон получил явную формулу для этой поверхности. Более 300 лет никто не подвергал сомнению решение Ньютона. Лишь в начале XXI века выяснилось, что оптимальная выпуклая поверхность вовсе не является поверхностью вращения. Например, у, так называемой "отвертки" [3], сопротивление меньше, чем у поверхности Ньютона. Более того, как показал в 2009 г. [2] А.Ю.Плахов, среди невыпуклых поверхностей есть такие, у которых сопротивление сколь угодно мало, а также, что существуют поверхности с нулевым сопротивлением. В физической интерпретации это означает, что такие поверхности, сделанные из зупругого материала, будут пропускать, не отклоняя, параллельный пучок частиц.

В статьях [4] и [5] пряводятся примеры поверхностей в пространстве, невидимых для параллельного пучка света. Другими словами, это поверхности, не отконяющие паралельный пучок света по некоторому направлению. Недавно был построен реальный прототип такой поверхности, однако выяснилось, что для наблюдателя, находящегося на расстоянии порядка метра, такой объект видим. Другими словами, поверхность искажает зрительную картину. Тогда С.П.Тарасов указал на возможную причину: невидимые поверхности, рассмотренные ранее, были невидимыми только для параллельного пучка лучей, то есть для бесконечно удаленного наблюдателя.

В этой работе будет построена поверхность, невидимая для наблюдателя, находящегося в некоторой заданной точке. При построении будут использованы будут использованы некоторые специальные свойства эллипсов и гипербол, которые, возможно, представляют и самостоятельный интерес.

2 Формулировка основного результата.

Перед формулировкой основного результата работы, напомним определения некоторых общеизвестных понятий, которые нам понадобятся.

Определения.

Фигурой будем назвать конечное объединение дуг гладких кривых на плоскости[1].

Рассмотрим некоторую фигуру ϕ. Траекторией в плоскости называется ломаная, удовлетворяющая следующим условиям:

- начальное и конечное звено ломаной являются частями лучей, не пересекающих ϕ;
- все вершины ломаной, кроме концов, являются точками ϕ, в которых существует касательная к ϕ;
- соседние звенья ломаной образуют равные углы с касательной к ϕ, проведенной в их общей вершине.

Траектория называется сохраняющей направление, если ее начальное и конечное звенья лежат на одной прямой.

Пусть точка A не принадлежит ϕ. Тогда существует непересекающая ϕ окружность ω с центром A. Лучи с началом в A взаимно-однозначно соответствуют точкам B на ω $(\exists! B = AB \cap \omega)$.

Некоторое свойство выполнено для *почти всех* (*По Лебегу*) точек B, если для любого $\epsilon > 0$ существует счетное множество открытых дуг (дуга с исключенными концами) на окружности ω, суммарная длина которых меньше ϵ, таких что это свойство выполнено для любой точки окружности, не лежащей в объединении этих дуг.

Фигура ϕ называется невидимой из точки A, если для почти любой точки B этой окружности луч AB проходит через начальное и конечное звено траектории в плоскости.

Замечание 1. Если множество точек B меры нуль (*по Лебегу*), то множество точек B' на единичной окружности ω_1 с центром A таких, что $B' = \omega_1 \cap AB$, также является множеством меры нуль.

Пусть ϕ – поверхность в пространстве $\mathbb{E}^3$.

Траекторией в пространстве $\mathbb{E}^3$ называется ломаная, удовлетворяющая следующим условиям:

- начальное и конечное звено ломаной являются частями лучей, не пересекающих ϕ;
- все вершины ломаной, кроме концов, являются точками ϕ, в которых существует касательная плоскость к ϕ;
- соседние звенья ломаной образуют равные углы с нормалью к касательной плоскости к ϕ, проведенной в их общей вершине.

[1]В работе рассматриваются только фигуры, состоящие из коник.

Пусть точка A не принадлежит ϕ. Тогда существует непересекающая ϕ сфера ω с центром A. Лучи с началом в A взаимно-однозначно соответствуют точкам B на ω ($\exists! B = AB \cap \omega$).

Некоторое свойство выполнено для *почти всех* (*по Лебегу*) точек B, если для любого $\epsilon > 0$ существует счетное множество открытых кругов (внутренность круга) на сфере ω, суммарная площадь которых меньше ϵ, таких что это свойство выполнено для любой точки сферы, не лежащей в объединении этих кругов.

Фигура ϕ называется невидимой из точки A, если для почти любой точки B этой сферы луч AB проходит через начальное и конечное звено траектории.

Замечание 2. Если множество точек B меры нуль (*по Лебегу*), то множество точек B' на единичной сфере ω_1 с центром A таких, что $B' = \omega_1 \cap AB$, также является множеством меры нуль.

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 1. *Существует поверхность вращения, невидимая из некоторой точки.*[2]

Доказательство теоремы 1, включая построение поверхности, приведено в следующем параграфе. Для доказательства теоремы нам потребуются следующие гипотезы.

Гипотеза 1. *Пусть дана невидимая фигура из точки A на плоскости, симметричная относительно некоторой прямой m, $A \in m$. Тогда поверхность вращения этой фигуры вокруг m является невидимой из точки A.*

Гипотеза 2. *Пусть на плоскости $\mathbb{E}^2$ дан эллипс Υ с фокусами F и F' ($F \neq F'$). Обозначим a – большая полуось эллипса. Обозначим m - прямая, $FF' \subset m$; p - серединный перпендикуляр к FF'. Обозначим d - полуплоскость относительно прямой p, $F \in d$. Обозначим C', C – точки на эллипсе, $C \notin \{p, m, d\}$, $C' \notin \{p, m, d\}$. Тогда луч FC' симметричен лучу FC относительно прямой m тогда и только тогда, когда $\exists M : M = FC' \cap F'C$ (прямых), C' и C – в разных полуплоскостях относительно m и выполнено условие: $FM - F'M = \frac{FF'^2}{2a}$.*

3 Построение и наброски доказательств.

Построение фигуры, невидимой из точки на плоскости.

Пусть дана некоторая точка A. Построим фигуру, невидимую из точки A на плоскости. Рассмотрим произвольную плоскость $\mathbb{E}^2$, $A \in \mathbb{E}^2$. Далее в построении все объекты будут находиться в плоскости $\mathbb{E}^2$. Рассмотрим произвольную прямую $m : A \in m$. Рассмотрим произвольную точку F: $F \in m, F \neq A$.

Обозначим: l - прямая, $A \in l$, $l \perp AF$.

Рассмотрим произвольный эллипс, фокусами которого являются точки A и F. Пусть a - большая полуось эллипса.

[2]Когда работа над статьей была завершена, автор узнал, что теорема 1 была доказана независимо (и практически одновременно) в работе [6]. При этом конструкция, использованная в [6], весьма схожа с нашей. Автор безусловно признает, что первенство в изобретении данной конструкции, равно как и доказательства теоремы 1, принадлежит авторам работы [6].

Далее будем называть этот эллипс "Э1". Обозначим эксцентриситет Э1:

$$\epsilon = \frac{AF}{2a}.$$

Рассмотрим гиперболу, софокусную с Э1 со следующим параметром:

$$a' = a\epsilon^2 - \text{действительная полуось.}$$

Далее будем рассматривать только одну ветвь гиперболы, которая находится в одной из полуплоскостей относительно l. Назовем эту ветвь "Г1".

Софокусные эллипс и гипербола пересекаются в 4 различных точках. Тогда Э1 и Г1 пересекаются в 2 различных точках. Пусть это точки C и C'. $AF \subset m$, поэтому C и C' симметричны относительно m.

Рассмотрим точку D на Г1 такую, что $\angle CAF < \angle DAF$.

Назовем полуплоскость, в которой лежит D относительно m полуплоскостью d.

Обозначим: $B = AD \cap \text{Э}1$. Луч из фокуса пересекает эллипс в единственной точке, поэтому точка B единственная. Точки C, C' – точки пересечения софокусных эллипса и гиперболы, поэтому $AD > AB$. Обозначим через B' точку, симметричную B относительно m.

Рассмотрим точку F', гомотетичную F относительно A с коэффициентом гомотетии:

$$k = \frac{AD}{AB}.$$

Построим эллипс, гомотетичный Э1 относительно A с коэффициентом гомотетии k. Назовем новый эллипс "Э2". Очевидно, A и F' - фокусы Э2. Также,

$$a_{\text{э2}} = k \cdot a.$$

Построим ветвь гиперболы, гомотетичную Г1 относительно A с коэффициентом гомотетии k. Назовем новую гиперболу "Г2". Очевидно, A и F' - фокусы Г2. Также,

$$a_{\text{г2}} = k \cdot a'.$$

Определим точку E условием $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AC}$. Из свойств гомотетии, так как $C = \Gamma 1 \cap \text{Э}1$, то $E = \Gamma 2 \cap \text{Э}2$.

Известно, что любая прямая, проведенная через один из фокусов гиперболы, пересекает каждую ветвь гиперболы не более, чем в одной точке. Тогда D - единственная общая точка Г1 и прямой AB. Тогда из свойств гомотетии $\exists!\, G : G = \Gamma 2 \cap \mathrm{AD}$.

Пусть D', E', G' - точки, симметричные соответственно D, E, G относительно m. Так как $AF \subset m$, $AF' \subset m$, то из свойств гомотетии, а также свойств симметрии эллипса и гиперболы относительно прямой, проведенной через фокусы:

$$\overrightarrow{AD'} = k \cdot \overrightarrow{AB'};$$
$$\overrightarrow{AE'} = k \cdot \overrightarrow{AC'};$$
$$\overrightarrow{AG'} = k \cdot \overrightarrow{AD'};$$
$$E' \in \Gamma 2 \cap \text{Э}2\ (E' \notin d).$$

Далее, из построенных элементов Э1, Э2, Г1, Г2 оставим лишь некоторые части. То есть, будем рассматривать множество точек, являющихся объединением следующим множеств:

в Э1: дуга BC, дуга $B'C'$;
в Г1: дуга CD, дуга $C'D'$;
в Э2: дуга DE, дуга $D'E'$;
в Г2: дуга EG, дуга $E'G'$.

Очевидно, соответствующие дуги Э1 и Э2, Г1 и Г2 гомотетичны (например, BC гомотетична DE).

Это множество в дальнейшем будем обозначать $Q_{\mathbb{E}^2}$ и называть "фигурой $Q_{\mathbb{E}^2}$". На рисунке 2 изображена фигура $Q_{\mathbb{E}^2}$.

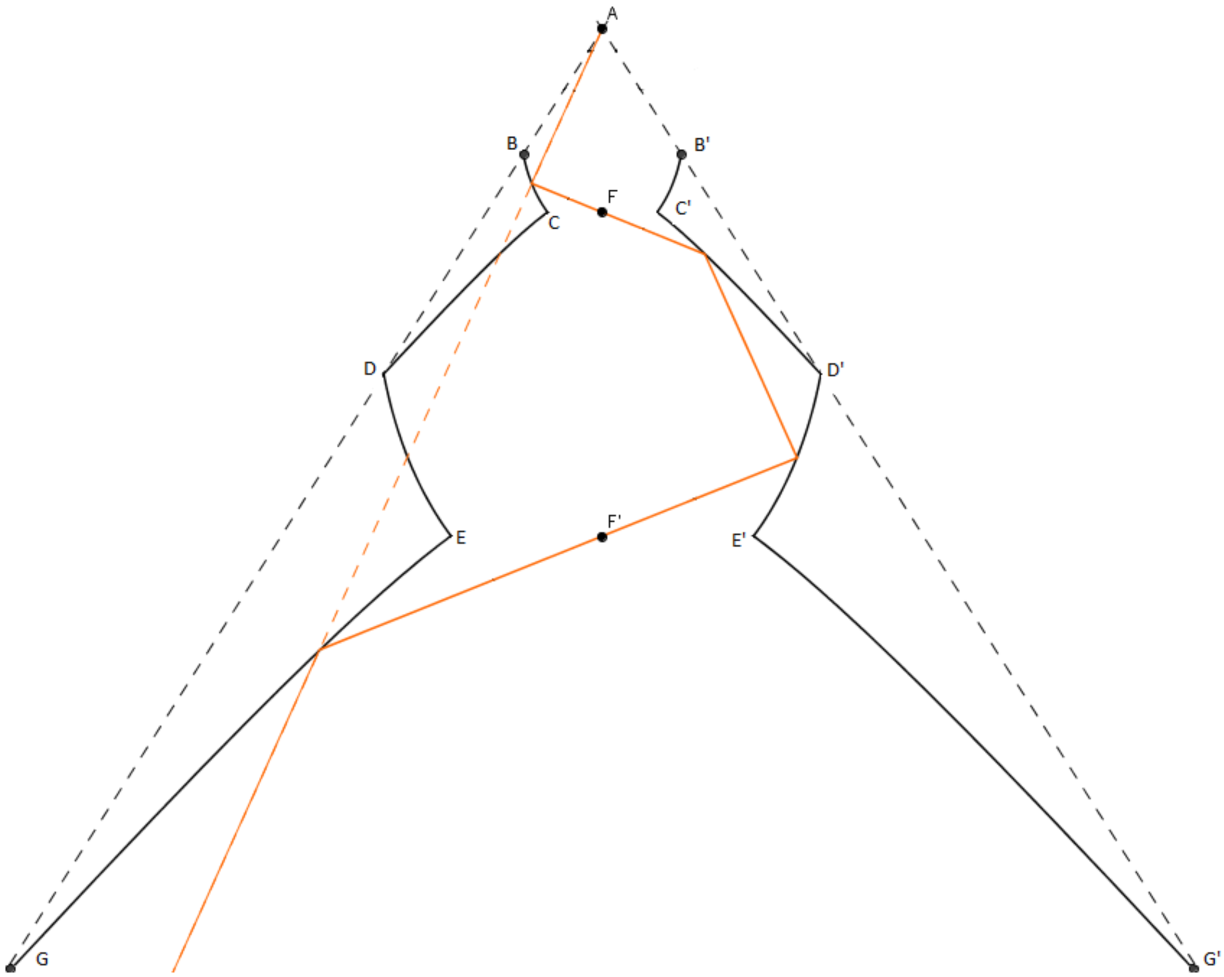

Рис. 2

Замечание. В построении можно рассмотреть гомотетию Э2 и Г2 с коэффициентом:

$$k' > k = \frac{AD}{AB}.$$

Это не повлияет на свойство невидимости, но фигура станет разрывной в точках D и D'. Обозначим точки разрыва на Г1: D_1 и D_1', на Э2: – D_2 и D_2'. Тогда в Г1 оставим дуги CD_1 и $C'D_1'$, на Э2 – D_2E, $D_2'E'$.

Построение поверхности вращения, невидимой из точки в пространстве $\mathbb{E}^3$

Пусть дана некоторая точка A. Построим поверхность, невидимую из точки A в пространстве. Рассмотрим пространство $\mathbb{E}^3$, $A \in \mathbb{E}^3$. Пусть m – прямая, $m \in \mathbb{E}^3, A \in m$. Рассмотрим произвольную плоскость $\alpha \subset \mathbb{E}^3, m \subset \alpha$. Рассмотрим произвольную точку $F : F \in m$, $F \neq A$.

Проведем построение невидимой фигуры $\mathrm{Q}_{\mathbb{E}^2}$ в плоскости α для точек A и F. Пусть m - ось симметрии фигуры $\mathrm{Q}_{\mathbb{E}^2}$.

Поверхностью Q обозначим поверхность вращения фигуры $\mathrm{Q}_{\mathbb{E}^2}$ относительно прямой m.

Мы закончили построение поверхности Q, невидимой из заданной точки A. Теперь для доказательства теоремы 1 достаточно установить, что поверхность Q действительно невидима из точки A. Мы начнем с доказательства гипотез 1 и 2, сформулированных в §2.

Наброски доказательств.

Набросок доказательства гипотезы 1.

Назовем данную поверхность вращения Ω, данную невидимую фигуру – $\Omega_{\mathbb{E}^2}$.

Рассмотрим произвольный луч света из точки A, двигающийся по лучу AX, где X - произвольная точка единичной сферы с цетром в точке A. Если луч AX не пересекает поверхность, то и луч света, идущий по лучу AX не претерпит отражений.

Рассмотрим луч света, двигающийся по лучу AX, при этом $AX \cap \Omega$.

Обозначим: l_0 – прямая, $AX \subset l_0$. Если $l_0 \neq m$, то рассмотрим плоскость $\alpha : m \subset \alpha$, $l_0 \subset \alpha$, иначе рассмотрим произвольную $\alpha, m \subset \alpha$. Входящий луч двигается по лучу AX, следовательно, по плоскости α.

Докажем, что траектория луча полностью лежит в α.

Пусть луч света в некоторый момент претерпит отражение от Ω в точке M. Обозначим через l прямую, вдоль которой двигался луч непосредственно перед отражением. Предположим, что в точке M существует β – касательная плоскость к Ω. Так как Ω является поверхностью вращения, то $\beta \perp \alpha$. Пусть после отражения луч света движется по прямой l'. Так как $l \subset \alpha$, $\beta \perp \alpha$, то по свойствам отражения луча света, $l' \subset \alpha$. Следовательно, траектория луча полностью лежит в α.

Фигура $\Omega_{\mathbb{E}^2}$ невидима из точки A на плоскости, поэтому луч света после всех отражений продолжит двигаться по лучу AX.

Так как сечением плоскостью α поверхности Ω является $\Omega_{\mathbb{E}^2}$, а Ω – поверхность вращения, то в точке M не существует касательной плоскости тогда и только тогда, когда $\Omega_{\mathbb{E}^2}$ не имеет касательной в точке M. Обозначим множество всех таких точек M через T.

Рассмотрим фигуру $\Omega_{\mathbb{E}^2}$. Пусть M – точка, лежащая в $\Omega_{\mathbb{E}^2}$, в точке M не существует касательной к $\Omega_{\mathbb{E}^2}$. Обозначим множество всех таких точек M через $T_{\mathbb{E}^2}$. Точка M при вращении относительно m переходит в окружность с радиусом, равным $\rho(M, m)$. Таким образом, T - множество окружностей. Если для покрытия множества $T_{\mathbb{E}^2}$ требуется счетное множество дуг со сколь угодно малой суммарной площадью, то проекцией множества $T_{\mathbb{E}^2}$ на единичную окружность является счетным множеством точек. Значит, проекция множества T на единичную сферу является счетным множеством окружностей. А их пожно покрыть счетным числом открытых кругов со сколь угодно малой площадью. Следовательно, T - множество точек в пространстве меры нуль *(по Лебегу)*.

По определению, поверхность Ω является невидимой из точки A.

Гипотеза 1 доказана.

Набросок доказательства гипотезы 2.

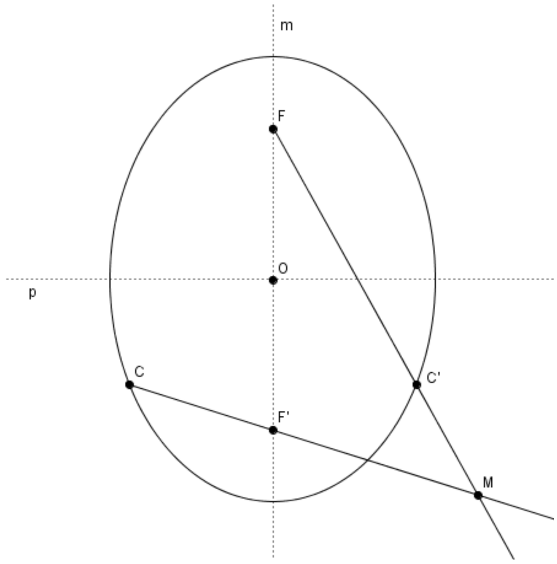

Рис. 3

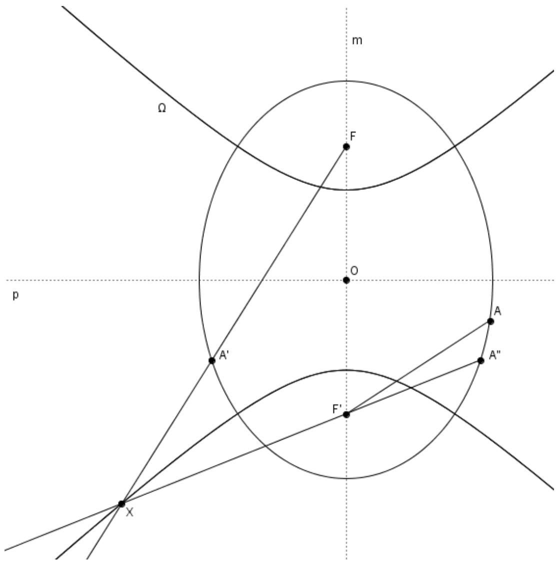

Рис. 4

Обозначим эксцентриситет эллипса $\epsilon = \frac{FF'}{2a}$, $a' = a\epsilon^2$.

Докажем прямое утверждение. Дано, что луч FC' симметричен лучу $F'C$ относительно прямой m. Так как луч FC' пересекает эллипс в единственной точке (в полярных координатах с полюсом в точке F точка эллипса однозначно определяется азимутом), а $C' \in \Upsilon$, то C' симметрична C относительно m; $C' \in d$, так как $m \perp d$, C' и C - в разных полуплоскостях, относительно m.

Нужно показать, что $\exists M : M = FC' \cap F'C$. Предположим, $FC' \parallel F'C$. Обозначим через ω полуплоскость относительно m, в которой лежит точка C. Тогда $C' \notin \omega$.

Прямые, проходящие через фокус параллельны, если они симметричны относительно центра эллипса (центра FF'). Тогда прямые $F'C$ и FC' пересекает эллипс в двух точках. Пусть прямая $F'C$ пересекает эллипс в точке $C'' \neq C$. Тогда $C'' \notin \omega$, так как $F \in m$, $C \in \omega$. Прямая FC' пересекает эллипс в двух точках, одна из которых симметрична C относительно центра эллипса – значит, лежит в d – а другая симметрична C'' – значит, лежит в w. Но C' - одна из этих точек, $C' \notin d, C' \notin w$ – противоречие.

Таким образом, $FC' \nparallel F'C \Rightarrow \exists M : M = FC' \cap F'C$.

Пусть C' на отрезке FM. В другом случае доказательство аналогично. Рассмотрим $\triangle FCM$ на рисунке 3. Так как C' симметрична C относительно m, то $\angle C'FF' = \angle CFF'$. Тогда в нем FF' - бисектрисса. По свойству бисектриссы:

$$\frac{FC}{FM} = \frac{F'C}{F'M}. \tag{1}$$

Формула бисектриссы имеет вид:

$$(FF')^2 = (FC \cdot FM) - (F'C \cdot F'M). \tag{2}$$

По свойству эллипса, $FC + F'C = 2a = const$. Из (1) имеем:

$$FC = \frac{2a}{1 + \frac{F'M}{FM}} = \frac{2a \cdot FM}{F'M + FM},$$

$$F'C = \frac{2a \cdot F'M}{F'M + FM}.$$

Подставим в (2):

$$FF'^2 = \frac{2a \cdot FM}{F'M + FM} FM - \frac{2a \cdot F'M}{F'M + FM} F'M = 2a(FM - F'M),$$

$$FM - F'M = 2a' = \frac{FF'^2}{2a} = \frac{4c^2}{2a} = 2a\epsilon^2 = const.$$

Прямое утверждение доказано. Заметим, что выражение $FM - F'M = 2a' = const$ означает, что точки M лежат на ветви одной гиперболы, софокусной с эллипсом. Действительная полуось этой гиперболы равна a'.

Также заметим, что $FM - F'M > 0$, поэтому $M \notin d$. Так как M лежит на луче FC', все точки которого, не лежащие в d, лежат в одной полуплоскости относительно m. Но C и C' лежат в разных полуплоскостях относительно m, следовательно, M и C также лежат в разных полуплоскостях относительно m.

Так как $M \in FC'$, то луч FM симметричен лучу FC.

Докажем обратное утверждение. Дано:

$$FM - F'M = \frac{FF'^2}{2a}, \tag{3}$$

$$FC + F'C = 2a.$$

Предположим, C' не симметрична C. Тогда рассмотрим C'', симметричную C'. Очевидно, $C'' \notin \{d, m, p\}$, C'' и C – в одной полуплоскости относительно m. Тогда из прямого утверждения гипотезы 2 следует, что

$$\exists X = FC' \cap F'C'';$$

$$FX - F'X = 2a'. \tag{4}$$

Докажем, что $X = M$. Уравнения (3) и (4) показывают, точки M и X лежат на ветви гиперболы (по определению гиперболы), в полуплоскости точки F' относительно p. Таким образом,

Обозначим O – центр FF'. Известно, что любая прямая, проходящая через центр отрезка, соединяющего фокусы гиперболы, пересекает гиперболу либо в двух, либо ни в одной точке, причем эти точки симметричны относительно O. Это значит, что такая прямая пересекает ветвь гиперболы не более, чем в одной точке, следовательно, $X = M$.

Лучи $C''F$ и CF имеют две общие точки: точка F и точка M. При этом точки C'' и C лежат в одной полуплоскости относительно m. Тогда $C'' = C$ и C' симметрична C. Это равносильно тому, что луч FC симметричен FC'.

Заметим, что $M \in d, M \in FC'$, поэтому M на луче FC'. Следовательно, луч FM симметричен FC.

Гипотеза 2 доказана.

Замечание 1.

В гипотезе 2 будем называть точку M образом точки C. Из гипотезы 2 следует, что образ точки C определен для любой точки C на эллипсе, не лежащей на прямых m и p. Назовем точки X на эллипсе, для которых определен образ *допустимыми* точками. Прообразом точки M будем называть такую допустимую точку X, образом которой является точка M.

Замечание 2.

В прямом утверждении гипотезы 2: $M = FC' \cap F'C$. Прямые пересекаются в единственной точке, поэтому образ точки C единственный.

Рассмотрим Υ - произвольный эллипс, не являющийся окружностью. Пусть Ω – гипербола, на которой лежат образы допустимых точек Υ (соответствующее отображение определено в замечании 1). Такая гипербола существует и единственна по гипотезе 2. Обозначим: m – прямая, проходящая через фокусы эллипса. Обозначим множество точек $T = \{X : X \in \Omega, X \notin m\}$.

Следствие 1.

Каждая точка множества T имеет единственный соответствующий ей прообраз, а каждая точка множества допустимых точек эллипса – единственный соответствующий ей образ.

Набросок доказательства следствия 1.

Рассмотрим произвольную точку $X \in T$. Обозначим серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему фокусы эллипса (гиперболы) через p, прямую, соединяющую фокусы через m. Обозначим полуплоскость, в которой находится точка X относительно p через d. Обозначим фокусы через F, F', при этом $F' \in d$. Обозначим через O середину FF'. Так как $T \subset \Omega$, то $FX - F'X = 2a'$, где a' - действительная полуось гиперболы. Пусть a – большая полуось эллипса, $\epsilon = \frac{FF'}{2a} < 1$; $\epsilon' = \frac{FF'}{2a'} > 1$.

Рассмотрим полярные координаты, в которых F – полюс, FF' – ось. Обозначим: $\alpha = \angle XFF'$. Уравнение гиперболы в полярных координатах имеет вид:

$$r(\alpha) = \frac{a'(\epsilon'^2 - 1)}{\epsilon' \cos\alpha - 1}.$$

Из гипотезы 2 параметры гиперболы имеют вид: $a' = a\epsilon^2 \Rightarrow \epsilon' = \frac{FF'}{2a'} = \frac{1}{\epsilon}$. Тогда

$$r(\alpha) = \frac{a\epsilon^2(\frac{1}{\epsilon^2} - 1)}{\frac{1}{\epsilon}\cos\alpha - 1} = \frac{a\epsilon(1-\epsilon^2)}{\cos\alpha - \epsilon}. \tag{5}$$

Точка гиперболы определена, если ($|\alpha| < \arccos\epsilon < \frac{\pi}{2}$). Множество T не включает в себя точки гиперболы при $\alpha = 0$, $|\alpha| = \pi$ $(-\pi < \alpha \leqslant \alpha)$ и включает все остальные точки. Гипербола симметрична относительно m и p, поэтому рассмотрим α: $0 < |\alpha| < \arccos\epsilon$.

Рассмотрим произвольный луч из F, пересекающий эллипс в полуплоскости d. Очевидно, он пересечет эллипс в единственной точке.

Заметим, что луч, наклоненный к FF' под углом $\varphi = \arccos\epsilon = \arccos\frac{FF'}{2a}$ пересечет эллипс в точке, лежащей на прямой p, а луч, наклоненный под нулевым углом, пересечет эллипс в точке, лежащей на прямой m. Тогда любой луч из F, заключенный между этими двумя лучами, пересечет эллипс в некоторой единственной точке, являющейся допустимой. Обозначим через A' точку пересечения луча FX с эллипсом. Луч FX составляет угол α с прямой m, поэтому A' – допустимая точка.

Тогда рассмотрим точку A, симметричную точке A' (рисунок 4). Она также является допустимой и имеет образ на луче $l = FX$. Из замечания 2: образ точки A единственный, причем это точка X. Тогда X имеет прообраз – точка A'.

Покажем теперь, что прообраз точки X единственный. Допустим, существует допустимая точка A'', отличная от A, образом которой является точка X. В гипотезе 2 показано, что образ точки A'' и сама точка A'' лежат в одной полуплоскости относительно прямой p. Тогда $A'' \in d$, потому что $X \in d$. Пусть FA'' составляет угол β с FF'. Тогда образ точки A'' лежит на луче l'', симметричном лучу FA'' относительно m, то есть луч l'' также составляет угол β с прямой m. Чтобы X являлась образом A'' необходимо, чтобы $X \in l''$. Но это возможно только при $\alpha = \beta$, потому что если лучи FX и l'' отличны, то они имеют не более одной общей точки, которой уже является точка F. Но тогда по построению A'' совпадает с A – противоречие.

Таким образом, каждая точка множества T имеет единственный соответствующий ей прообраз, а каждая точка множества допустимых точек эллипса - единственный соответствующий ей образ.

Следствие 1 доказано.

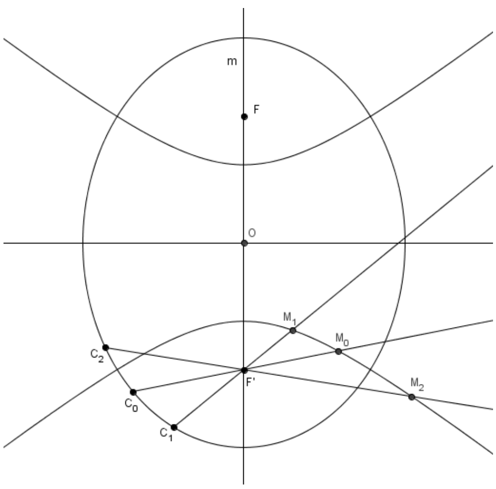

Рис. 5

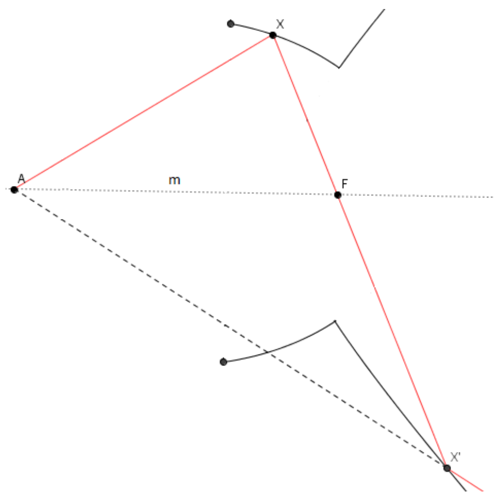

Рис. 6

Следствие 2.

Пусть дан эллипс, не являющийся окружностью. Рассмотрим две произвольные различные допустимые точки на эллипсе – точки C_1 и C_2, находящиеся в одной полуплоскости относительно p, а также в одной полуплоскости, относительно m.

Пусть точки M_1, M_2 - образы точек C_1 и C_2.

Рассмотрим произвольную точку C_0 на дуге эллипса C_1C_2, $C_0 \neq C_1, C_0 \neq C_2$. Обозначим через M_0 образ точки C_0. Тогда M лежит на дуге ветви гиперболы M_1M_2, $M_0 \neq M_1, M_0 \neq M_2$.

Набросок доказательства следствия 2.

Обозначим серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему фокусы эллипса через p, прямую, соединяющую фокусы через m. Обозначим полуплоскость, в которой находится точка C относительно p через d. Обозначим фокусы через F, F', при этом $F' \in d$. Обозначим через O середину FF'. Обозначим через ω полуплоскость, в которой лежит точка C относительно m. Обозначим: a – большая полуось эллипса, $\epsilon = \frac{FF'}{2a} < 1$ – эксцентриситет.

Обозначим через $\varphi_{_N}$ угол $C_N F F'$, $N \in \{0,1,2\}$. Чтобы $C_N \in d, C_N \in \omega$ необходимо, чтобы $(0 < \varphi_{_N} < \arccos\epsilon)$, $N \in \{0,1,2\}$. Пусть для определенности $\varphi_{_1} < \varphi_{_2}$. Так как произвольный луч из точки F, характеризуемый азимутом α пересекает эллипс в единственной точке, то существует однозначная непрерывная функция, ставящая в соответствие азимуту α точку на эллипсе. Так как точка C_0 лежит внутри дуги C_1C_2, следовательно $\varphi_{_1} \leqslant \varphi_{_0} \leqslant \varphi_{_2}$. Но эта функция строго монотонна на отрезке $[\varphi_{_1}; \varphi_{_2}]$, поэтому

$$\varphi_{_1} < \varphi_{_0} < \varphi_{_2}.$$

Так как C_1, C_2 – допустимые точки на эллипсе, находящиеся в одной полуплоскости относительно m и p, то каждая точка дуги эллипса C_1C_2 – допустимая точка, следовательно, C_0 – допустимая точка, а значит, имеет образ.

Точка на эллипсе и ее образ находятся в разных полуплоскостях относительно m и в одной полуплоскости относительно p. Из этого следует, что $M_N \in \omega$, $M_N \in d$, $N \in \{0,1,2\}$. Также, азимут точки M_N противоположен азимуту C_N, так луч FC_N симметричен лучу FM_N относительно m, $N \in \{0,1,2\}$.

Воспользуемся уравнением гиперболы в полярных координатах (5).

Функция $r(\alpha)$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций на интервале $(-\arccos\epsilon; 0)$ и убывает по α. Так как M_N лежат на ветви гиперболы, $N \in \{0,1,2\}$, то $-\arccos\epsilon < \alpha_{_N} < 0$, то есть функция непрерывна на отрезке $[-\alpha_{_2}; -\alpha_{_1}]$. Функция $r(\alpha)$ строго монотонна на этом отрезке. Тогда на этом отрезке существует однозначная обратимая непрерывная функция, ставящая в соответствие азимуту α точку на гиперболе. Так как $\alpha_{_1} < \alpha_{_0} < \alpha_{_2}$, то M_0 лежит на дуге M_1M_2, $M_0 \neq M_1, M_0 \neq M_2$.

Следствие 2 доказано.

Гипотеза 3. *Рассмотрим фигуру $Q_{_{\mathbb{E}^2}}$. Рассмотрим произвольный луч света, отразившийся от Э1 в точке, где существует касательная к Э1. Пусть луч света двигался в начале движения по лучу l, $A \in l$. Тогда луч света отразится от Г1, причем после отражения он будет двигаться по лучу, симметричному l.*

Набросок доказательства гипотезы 3.

Рассмотрим траекторию луча света, вышедшего из точки A. Из построения следует, что если

$$\angle(l,m) < \angle CAF, \text{ либо}$$

$$\angle(l,m) > \angle BAF,$$

то луч света не претерпит отражения от Э1.

Рассмотрим теперь луч, который претерпевает хотя бы одно отражение. Тогда:

$$\angle CAF \leqslant \angle(l,m) \leqslant \angle BAF.$$

Следовательно, луч l пересекает дугу Э1 в некоторой точке X_1, а дугу Г1 в некоторой точке X_2. По построению, C, C' – точки пересечения эллипса и ветви гиперболы. Тогда $AX_1 \leqslant AX_2$, при этом неравенство строгое, если $B, B', C, C' \notin l$.

Э2 и Г2 гомотетичны Э1 и Г1 с $k > 1$, поэтому если обозначить $X_3 = l \cap Э2$, $X_4 = l \cap Г2$, то $AX_3 > AX_1, AX_4 > AX_1$.

Расмотрим произвольный луч света, для которого $\angle CAF < \angle(l,m) < \angle BAF$.

Тогда первое отражение такого луча будет о Э1, потому что дуги BC, $B'C'$ принадлежат Э1. Обозначим точку отражения от Э1 через X. Дуга Э1 непрерывна во всех внутренних точках (а также дифференцируема, так как является частью эллипса), поэтому отражение в точке X определено. Тогда луч света после отражения будет двигаться по лучу XF.

Пусть ϵ – эксцентриситет Э1, a – большая полуось.

Пусть a' – действительная полуось Г1. По построению $a' = \frac{AF^2}{2a}$.

Из следствия 1 следует, что Г1 является множеством образов точек дуг $BC, B'C'$ на Э1. При этом образом точки B является D', $C - C'$, $B' - D, C' - C$. Точка X лежит внутри одной из дуг Э1. Тогда луч XF пересекает Г1 в точке, находящейся внутри одной из дуг (по следствию 2).

По построению $k \geqslant \frac{AD}{AB}$. Если k в точности равно этому отношению, то Э2 имеет с Г1 две общие точки – D, D'. Для любой точки X_2, лежащей на одной из дуг Г1, $AX_2 < AX_3$, если $AX_2 \cap \text{Э}2 = X_3$. Это следует из того, что $r_{_{\Gamma1}}(|\alpha|)$ возрастает по $|\alpha|$, а $r_{_{\text{Э}2}}(|\alpha|)$ убывает по $|\alpha|$ на отрезке $[\angle CAF; \angle BAF]$ в полярных координатах с полюсом A и осью OF. Если $k > \frac{AD}{AB}$, то $AX_3 > AX_2$ при $|\alpha| \in [\angle CAF; \angle BAF]$.

Таким образом, следующее отражение будет о Г1. Обозначим эту точку X'. Движение луча света происходит по лучу XF, а $XF \cap \Gamma 1 = X'$, при этом X' – образ точки X. Тогда X' симметрична X, значит лежит внутри дуги гиперболы. Тогда отражение в точке X' определено и, по свойству гиперболы, после отражения луч будет двигаться по лучу AX'. Однако X' симметрична X относительно m, следовательно, AX' симметричен AX. На рисунке 6 изображены первые два отражения.

Отражения в точках B, B', C, C' не определены, поэтому следует рассмативать только лучи, для которых $\angle CAF < \angle(l, m) < \angle BAF$.

Гипотеза 3 доказана.

Набросок доказательства теоремы 1.

Сначала рассмотрим фигуру $Q_{_{\mathbb{E}^2}}$ и покажем, что она является невидимой.

Рассмотрим траекторию луча света, вышедшего из точки A. Пусть l - луч, по которой начал движение луч света, A – начало луча. Из построения следует, что если

$$\angle(l, m) < \angle CAF, \text{ либо}$$

$$\angle(l, m) > \angle BAF,$$

то луч света не претерпит ни одного отражения. Если луч не претерпевает ни одного отражения, то он не меняет своего направления.

Рассмотрим теперь луч, который претерпевает хотя бы одно отражение. Тогда, если

$$\angle CAF < \angle(l, m) < \angle BAF,$$

то по гипотезе 3 луч света после двух отражений движется по лучу, симметричному l. Будем пользоваться обозначениями из гипотезы 3.

Луч света двигается по лучу AX', $\angle(AX'; m) = \alpha$. Пусть $AX' \cap \text{Э}2 = Y$. Так как Э2 гомотетичен Э1, то Y лежит внутри одной из дуг Э2.

Рассмотрим точку $F' : \overrightarrow{AF'} = k \cdot \overrightarrow{AF}$. Если для точек A, F' построить фигуру $Q_{_{\mathbb{E}^2}}$ с параметрами малого эллипса $a' = k \cdot a$, то эллипс Э1' новой фигуры совпадет с Э2, а гипербола Г1' совпадет с Г2. Тогда по гипотезе 3 луч света, двигающийся по лучу AX'

после двух отражений будет двигаться по лучу AX'' (X'' – точка отражения луча света от Г2), симметричному AX', то есть, совпадающему с AX.

Итак, любой луч, выпущенный по лучу l, первое отражение которого было определено, после отражений движется по лучу l.

Рассмотрим теперь лучи света, для которых траектория после первого отражения не определена. Из рассуждений выше, траекторию любого луча света, точка первого отражения которого не совпадает с B, C, B', C' можно однозначно определить. Таким образом, на единичной окружности точки A существуют 4 точки, для которых свойство невидимости не выполняется. А их, очевидно, можно покрыть дугами сколь угодно малой длины.

Тогда фигура $\mathrm{Q}_{_{\mathbb{E}^2}}$ по определению невидима из точки A на плоскости.

По построению, фигура $\mathrm{Q}_{_{\mathbb{E}^2}}$ симметрична относительно m, следовательно, поверхность Q, полученная путем вращения фигуры $\mathrm{Q}_{_{\mathbb{E}^2}}$ относительно прямой m является невидимой из точки A в пространстве $\mathbb{E}^3$ (по гипотезе 1).

Теорема 1 доказана.

Замечание. Рассмотрим возможные значение угла $\varphi = \angle DAF = \angle D'AF$. В следствии 2 показано, что точка гиперболы определена при $\varphi < \arccos(\epsilon)$, где ϵ – эксцентриситет Э1 (и Э2, так как эллипсы подобны).

Рассмотрим точку C пересечения Э1 и Г1. Пусть a – большая полуось Э1, $a' = a\epsilon^2$ – действительная полуось гиперболы. Тогда по определению эллипса и гиперболы:

$$\begin{cases} AC + FC = 2a; \\ AC - FC = 2a\epsilon^2. \end{cases} \iff \begin{cases} AC = a(1+\epsilon^2); \\ FC = a(1-\epsilon^2). \end{cases}$$

По определению эксцентриситета: $AF = 2a\epsilon$.

Запишем теорему косинусов для $\angle CAF = \beta$ в треугольнике CAF:

$$FC^2 = AF^2 + AC^4 - 2 \cdot AF \cdot AC \cos\beta$$

$$a^2\left(1-\epsilon^2\right)^2 = 4\epsilon^2 a^2 + a^2\left(1+\epsilon^2\right)^2 - 4\epsilon a^2(1+\epsilon^2)\cos\beta$$

$$1 + \epsilon^4 - 2\epsilon^2 = 4\epsilon^2 + 1 + \epsilon^4 + 2\epsilon^2 - 4\epsilon(1+\epsilon^2)\cos\beta$$

$$(1+\epsilon^2)\cos\beta = 2\epsilon$$

$$\beta = \arccos\frac{2\epsilon}{1+\epsilon^2}$$

Для эллипса $\epsilon < 1$, поэтому:

$$\arccos\frac{2\epsilon}{1+\epsilon^2} < \arccos(\epsilon)$$

Тогда:

$$\arccos\frac{2\epsilon}{1+\epsilon^2} < \varphi < \arccos(\epsilon).$$

Список литературы

[1] И. Ньютон. Математические начала натуральной философии. Отдел VII: О движении жидкостей и сопротивлении брошенных тел / Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. VII. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1936. С. 422—433.

[2] А. Ю. Плахов. Рассеяние в биллиардах и задачи ньютоновской аэродинамики // Успехи математических наук. 2009. Т. 64. Вып. 5 (389). С. 97—166.

[3] Buttazzo G and Kawohl B 1993 On Newton's problem of minimal resistance *Math. Intell.*

[4] Aleksenko A and Plakhov A 1993 Bodies of zero resistance and bodies invisible in one direction *Nonlinearity.*

[5] А. Ю. Плахов. Невидимые тела с зеркальной поверхностью. 2011. Ежегодник РАО. 2011. Выпуск 12. С. 103-106.

[6] Alexander Plakhov, Vera Roshchina. Bodies invisible from one point. arXiv:1112.6167