Степенные последовательности.
Зимин Арсений.
Руководитель: Нурлигареев Хайдар Джамилевич.

Примечание.
Теорема, доказанная в этой работе, разбита на части в листочке с задачами «Степенные последовательности» http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/graphs.pdf.

Определение.
Конечная последовательность целых неотрицательных чисел называется степенной, если существует граф без петель и кратных ребер, степени вершин которого – числа этой последовательности.

Задача заключается в том, чтобы сформулировать необходимое и достаточное условие того, что данная конечная последовательность целых неотрицательных чисел является степенной.
Теорема.
Невозрастающая конечная последовательность целых неотрицательных чисел $d_1,\ldots,d_n$ является степенной тогда и только тогда, когда

(1) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ *- четна.*

(2) $\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$ *для любого* $1 \le k \le n$

Докажем необходимость.
Пусть нам дан граф G с n вершинами, степени которых равны $d_1,\ldots,d_n$. $\sum_{i=1}^{n} d_i$ - четна, потому что сумма степеней вершин в графе четна. Занумеруем вершины числами 1,2,…,n, так чтобы степень *i-ой* вершины была равна d_i. Обозначим через G_1 подграф G, состоящий из 1,2,…,k вершин и ребер, соединяющих эти вершины. Сумма степеней вершин в G_1 не больше k(k-1). Рассмотрим i-ую вершину, i>k, из нее выходит не более $\min(k,d_i)$ таких ребер, которые соединяют ее с вершинами из G_1. Поэтому $\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$.
Необходимость доказана.

Докажем достаточность.
Пусть нам дана невозрастающая конечная последовательность целых неотрицательных чисел $d_{1,\ldots,}d_n$, для которой выполнены условия (1), (2). Докажем, что она степенная.
Будем вести индукцию по сумме чисел в последовательности.

База. $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$. Т.к $d_i \ge 0$, то $d_i = 0$ для всех i. Очевидно, что тогда $d_1,\ldots,d_n$ – степенная.

Переход. Предположим, утверждение теоремы верно для $\sum_{i=1}^{n} d_i < L$, докажем его для $\sum_{i=1}^{n} d_i = L$ (L>0 и L-четно).
Пусть m=min $\{i : d_i = 0\}$. Тогда $d_m=\ldots=d_n=0$, а остальные числа в последовательности положительны. Для последовательности $d_1,\ldots,d_{m-1}$ выполнены условия (1), (2):

1) Сумма чисел в ней четна, т.к $\sum_{i=1}^{m-1} d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i$

2) $\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{m-1} \min(k, d_i) + \sum_{i=m}^{n} \min(k, d_i) = k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{m-1} \min(k, d_i)$, для любого

$1 \le k \le m-1$.
Значит, если мы докажем, что существует граф, степени вершин которого равны $d_1,\dots,d_{m-1}$, то добавив к нему соответствующее число вершин с нулевой степенью, получим граф, степени вершин которого равны $d_1,\dots,d_n$. Поэтому будем считать, что $d_n > 0$.

Предположим, $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$, $d < n$. Тогда расположим n вершин в вершинах правильного n-угольника. Возможны следующие два случая:

a) d – четно. Тогда соединим каждую вершину с $\frac{d}{2}$ последующими вершинами по часовой стрелке и с $\frac{d}{2}$ последующими вершинами против часовой стрелки. Степень каждой вершины в таком графе будет равна d.

b) d – нечетно. Тогда n – четно, т.к dn - четно. В этом случае построим граф с n вершинами, степень каждой из которых равна d-1, так, как это показано выше. А затем соединим ребром вершины, симметричные относительно центра n-угольника и получим граф, степени вершин которого равны d. Такие две вершины есть, т.к n – четно, и они не были соединены ребром до выполнения этой операции.

Если не все числа в последовательности равны, то обозначим $t = \min\{i : d_i > d_{i+1}\}$.

Определим новую последовательность $c_1,\dots,c_n$ так:

$c_i = d_i$, при $i \ne t,n$.

$c_i = d_i - 1$, при $i = t,n$

Лемма.

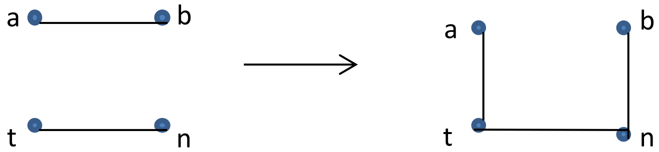
Если последовательность $c_1,\dots,c_n$ - степенная, то и $d_1,\dots,d_n$ – степенная.

Доказательство:

Пусть $c_1,\dots,c_n$ - степенная. Тогда рассмотрим граф G, степени вершин которого равны $c_1,\dots,c_n$.
Сначала докажем, что $d_1 \le n-1$:

$d_1 \le 1(1-1) + \sum_{i=2}^{n} \min(1, d_i) \le n-1$ по условию (2).

Далее, если вершина t (степень которой равна c_t) не соединена ребром с вершиной n, то, соединив их, получим граф с нужным набором степеней вершин, т.к $c_t = d_t - 1$, $c_n = d_n - 1$. Пусть в графе есть ребро (tn). $c_t = d_t - 1 \le n-2$. Значит, t соединена не со всеми вершинами графа. Тогда выберем вершину a, не соединенную с t. Среди вершин, соединенных с a, выберем вершину b, отличную от n, которая не соединена с n. Такая найдется, т.к иначе вершина n будет соединена с теми же вершинами, что и a и соединена с t. Значит $c_n > d_A$, но $c_n = d_n - 1 \le d_a - 1 < d_a$ - противоречие.
Тогда возьмем граф $G \cup (at) \cup (bn) - (ab)$ (см. рисунок). Понятно, что степени вершин этого графа будут равны $d_1,\dots,d_n$.



Лемма доказана.

Достаточно доказать, что последовательность $c_1,\dots,c_n$ удовлетворяет условиям (1), (2), тогда по предположению индукции $c_1,\dots,c_n$ будет степенной, т.к $c_1,\dots,c_n$ - невозрастающая последовательность и сумма чисел в ней меньше, чем в $d_1,\dots,d_n$. Тогда $d_1,\dots,d_n$ будет степенной по лемме. Докажем, что для $c_1,\dots,c_n$ выполнены условия (1), (2).

Условие (1) выполнено, т. к. $\sum_{i=1}^{n} c_i$ =($\sum_{i=1}^{n} d_i$ - 2) –четна.

Докажем неравенство (2)

Возможно несколько случаев.

Случай. k≥t, k≠n. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \le \left(\sum_{i=1}^{k} d_i\right) - 1 \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i) - 1 \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, c_i)$$

Если k<t, то $c_1=\ldots=c_k=d_1=\ldots=d_k$,

Случай. $d_k \le k-1 \le t-2$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i = \sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, c_i)$$

Случай. $d_k = k \le t-1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} c_i = \sum_{i=1}^{k} d_i = k^2 = k(k-1) + k \overset{(*)}{\le} k(k-1) + k-1 + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, c_i)$$

(*) – верно, т.к. $\sum_{i=k+1}^{n} \min(k, c_i) \ge 1$, т.к.

- если $d_n>1$, то $c_i \ge 1$. Тогда $\sum_{i=k+1}^{n} \min(k, c_i) \ge 1$.

- если $d_n=1$ и $t<n-1$, то $c_{t+1}=d_{t+1}\ge 1$. Тогда $\sum_{i=k+1}^{n} \min(k, c_i) \ge \min(k, c_{t+1}) \ge 1$.

- если $d_n=1$, $t=n-1$, то $d_1=\ldots=d_{n-1}=n-1$, $d_n=1$. Но тогда не выполняется неравенство (2) для $k=n-1$:

$\sum_{i=1}^{n-1} d_i = (n-1)^2 \le (n-1)(n-2) + \min(n-1,1) \le (n-1)(n-2) + 1$ – неверно, значит этот случай невозможен.

Случай. $d_k \ge k+1 \le t$.

Подслучай. $d_n \ge k+1$. Тогда $\min(c_n,k)=\min(d_n,k)=k$, значит и $\min(c_t,k)=\min(d_t,k)=k$.

Значит, $\sum_{i=k+1}^{n} \min(k, c_i) = \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$, тогда неравенство следует из условия (2) для последовательности $d_1,\ldots,d_n$.

Подслучай. $d_n \le k$. Нам надо доказать, что

$\sum_{i=1}^{k} c_i = \sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, c_i) = k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i) - 1$. Для этого докажем, что неравенство $\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$ - строгое.

Доказательство:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = kd_k = \frac{k}{k+1}(k+1)d_k = \frac{k}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} d_i \le \frac{k}{k+1}\left(k(k+1) + \sum_{i=k+2}^{n} \min(k+1, d_i)\right) =$$

$$= k^2 + \frac{k}{k+1}\sum_{i=k+2}^{n} \min(k+1, d_i) = k(k-1) + k-1 + \frac{k}{k+1}\sum_{i=k+2}^{n} \min(k+1, d_i) <$$

$< k(k-1) + \frac{k}{k+1}\min(k+1,d_{k+1}) + \frac{k}{k+1}\sum_{i=k+2}^{n}\min(k+1,d_i) = k(k-1) + \frac{k}{k+1}\sum_{i=k+1}^{n}\min(k+1,d_i) \overset{(**)}{\le}$

$\le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n}\min(k,d_i)$

Докажем неравенство (**). $\frac{k}{k+1}\min(k+1,d_i)\le\min(k,d_i)$ для любого i. Действительно:

- если $d_i \ge k+1$, то неравенство принимает вид $\frac{k}{k+1}(k+1)\le k$, что верно.

- если $d_i \le k$, то неравенство принимает вид $\frac{k}{k+1}d_i \le d_i$, что верно.

Значит, $\frac{k}{k+1}\sum_{i=k+2}^{n}\min(k+1,d_i) \le \sum_{i=k+1}^{n}\min(k,d_i)$

Значит, $\sum_{i=1}^{k} d_i < k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n}\min(k,d_i)$

Значит, $\sum_{i=1}^{k} c_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n}\min(k,c_i)$

Итак, последовательность $c_1,\dots,c_n$ удовлетворяет условиям (1), (2), Она невозрастающая и сумма чисел в ней меньше чем в $d_1,\dots,d_n$. Значит, по предположению индукции $c_1,\dots,c_n$ - степенная, а по лемме и $d_1,\dots,d_n$ – степенная, ч.т.д.