РАЗРЕШИМОСТЬ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОДНОГО РАДИКАЛА [1]

Данил Ахтямов

Теорема. *Кубическое уравнение $x^3+px+q=0$ с рациональными коэффициентами имеет корень вида $a+br+cr^2$, с рациональными a,b,c,r^3 и вещественным r тогда и только тогда, когда либо оно имеет рациональный корень, либо $D\ge 0$ и число $\sqrt{D}$ рационально, где $D=(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2$.*

Эту теорему можно использовать для проверки того, имеет ли кубическое уравнение $wx^3+ux^2+vx+s=0$ с рациональными коэффициентами корень вида $a+br+cr^2$, где числа a,b,c,r^3 рациональны и r вещественно. Для доказательства этого поделим обе части равенства на w и применим стандартную замену $y:=x+\frac{u}{3w}$.

Введем следующее обозначение: $R:=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}$.

Тогда достаточность в теореме следует из того, что, по формуле Кардано, один из корней уравнения $x^3+px+q=0$ равен $R-\frac{p}{3R}=R-\frac{p}{3R^3}R^2$.

Формулировка и доказательство формулы Кардано находятся в конце этой работы.

Для доказательства необходимости в теореме обозначим

$$G(x):=x^3-3bcr^3x-(b^3r^3+c^3r^6),\quad \epsilon:=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{i\sqrt{3}-1}{2}.$$

Тогда $\epsilon^3=1$ и $1+\epsilon+\epsilon^2=0$.

Утверждение 1. *Корнями многочлена $G(x)$ являются числа $br+cr^2$, $br\epsilon+cr^2\epsilon^2$, и $br\epsilon^2+cr^2\epsilon$.*

Доказательство.

$$G(br+cr^2)=(br+cr^2)^3-3bcr^3(br+cr^2)-(b^3r^3+c^3r^6)=(br+cr^2)^3-(br+cr^2)^3=0.$$

Так как $\epsilon^3=1$ и доказательство равенства $G(a+br+cr^2)=0$ останется справедливым, если r заменить на $r\epsilon$ или на $r\epsilon^2$,то $G(a+br\epsilon+cr^2\epsilon^2)=0$ и $G(a+br\epsilon^2+cr^2\epsilon)=0$. QED.

Утверждение 2. *Пусть числа a,b,c,r^3 рациональны, r иррационально и вещественно и хотя бы одно из чисел b и c является ненулевым.*

Тогда

(a) $a+br\epsilon+cr^2\epsilon^2\ne a+br\epsilon^2+cr^2\epsilon$.

(b) Ни одно из чисел $a+br\epsilon+cr^2\epsilon^2$ и $a+br\epsilon^2+cr^2\epsilon$ не является действительным.

(c) Число $br+cr^2$ иррационально.

(d) Многочлен $G(x-a)$ неприводим над рациональными числами.

(e) Если многочлен с рациональными коэффициентами, степень которого меньше 3, имеет корень $a+br+cr^2$, то этот многочлен нулевой.

(f) Если многочлен $B(x)$ с рациональными коэффициентами имеет корень $a+br+cr^2$, тогда $B(x)$ делится на $G(x-a)$ без остатка.

Доказательство пункта (a). Предположим, $a+br\epsilon+cr^2\epsilon^2=a+br\epsilon^2+cr^2\epsilon$. Тогда получаем: $(\epsilon^2-\epsilon)(br+cr^2)=0$. Очевидно, что $\epsilon^2-\epsilon\ne 0$, так как иначе $\epsilon=1$ или $\epsilon=0$, что, очевидно не так. Поэтому $br+cr^2=0$.

Если $c=0$, то $b\ne 0$ и $br=0$. Значит, $r=0$ рационально. Противоречие.

[1] Я хочу поблагодарить Григория Мерзона, Андрея Кушнира и Олега Орлова за данные мне ценные советы по работе с tex-файлами

Если же $c \neq 0$, то $r = -\frac{b}{c}$ рационально. Противоречие. QED.

Доказательство пункта (b). Предположим противное. Так как $\overline{\epsilon} = \epsilon^2$, то числа $a + br\epsilon + cr^2\epsilon^2$, $a + br\epsilon^2 + cr^2\epsilon$ сопряжены. Значит, поскольку хотя бы одно из них действительно, они равны. Но это не так, согласно пункту (a). QED.

Доказательство пункта (c). Предположим, $br + cr^2$ рационально. Пусть он равно α. Обозначим $A(x) = x^3 - r^3$ и $C(x) = bx + cx^2 - \alpha$. Поделим $A(x)$ на $C(x)$. Остаток будет нулевым, так как $A(r) = C(r) = 0$. Тогда $A(x) = C(x)M(x)$. Но многочлен третьей степени $A(x)$, очевидно, неприводим над рациональными числами, так как он имеет один один действительный корень и этот корень иррационален. Противоречие. QED.

Доказательство пункта (d). Предположим противное. Тогда $G(x - a)$ имеет рациональный корень. Тогда $G(x)$ имеет рациональный корень. Но это не так, согласно утверждению 1 и пунктам (b) и (c). Противоречие. QED.

Доказательство пункта (e). Обозначим как $V(x)$ любой многочлен с рациональными коэффициентами, степень, которого меньше 3, имеющий корень $a + br + cr^2$, где a, b, c, r^3 рациональны, r-иррационально и вещественно и хотя бы одно из чисел b и c является ненулевым. Поделим $G(x - a)$ на $V(x)$ с остатком: $G(x - a) = V(x)H(x) + T(x)$, тогда $T(x)$- многочлен с рациональными коэффициентами степени, не большей первой и $T(a + br + cr^2) = 0$. Согласно пункту (c), число $br + cr^2$ иррационально. Значит, $a + br + cr^2$ иррационально. Поэтому, очевидно, $T(x)$-нулевой многочлен. Значит, $G(x-a) = V(x)H(x)$. Видим, что тогда $G(x - a)$ приводим над рациональными числами. Но это противоречит пункту (d). QED.

Доказательство пункта (f). Обозначим как $P(x)$ любой многочлен с рациональными коэффициентами, имеющий корень $a+br+cr^2$. Поделим $P(x)$ на $G(x-a)$ с остатком: $P(x) = G(x)F(x) + L(x)$. Предположим, что $L(x)$- ненулевой многочлен. Тогда $L(x)$-многочлен первой либо второй степени и имеет корень $a + br + cr^2$. Но это противоречит пункту (e). QED.

Доказательство необходимости в теореме. Если кубическое уравнение с рациональными коэффициентами имеет рациональный корень, то необходимость очевидна.

Пусть теперь многочлен $U(x) := x^3 + px + q$ имеет иррациональный корень $a + br + cr^2$, где a, b, c, r^3 рациональны и r действительно.

Тогда, очевидно, r иррационально и хотя бы одно из чисел b и c является ненулевым.

Значит, согласно утверждению 2, многочлен $U(x)$ делится на $G(x - a)$.

Так как степени и старшие коэффициенты многочленов $U(x)$ и $G(x - a)$ равны, то $U(x) = G(x - a)$.

Поэтому $x^3 + px + q = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 - 3bcr^3(x - a) - (b^3r^3 + c^3r^6)$.

Значит, $a = 0$.

Значит, $p = -3bcr^3$ и $q = -(b^3r^3 + c^3r^6)$.

Тогда $D = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 = (-bcr^3)^3 + (\frac{-b^3r^3 - c^3r^6}{2})^2 = \frac{(b^3r^3)^2 + (c^3r^6)^2 + 2b^3c^3r^9 - 4b^3c^3r^9}{4} = (\frac{b^3r^3 - c^3r^6}{2})^2$.

Значит, $D \geq 0$ и число $\sqrt{D}$ рационально. QED.

Формула Кардано. *Если $D \geq 0$, то один из корней уравнения $x^3 + px + q = 0$ равен $R - \frac{p}{3R}$.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен $x^3 - 3xgh + g^3 + h^3$. Несложно проверить, что $x^3 - 3xgh + g^3 + h^3 = (x + g + h)(x^2 + g^2 + h^2 - xh - gh - xg)$, поэтому корнем многочлена $x^3 - 3xgh + g^3 + h^3$ является число $(-g - h)$. Тогда, чтобы решить уравнение вида $x^3 + px + q = 0$, достаточно найти хотя бы одно решение системы уравнений $p = -3gh$ и $q = g^3 + h^3$ относительно g и h. Получаем: $(\frac{-p}{3})^3 = g^3h^3$ и $q = g^3 + h^3$. Получаем квадратное уравнение: $x^2 - qx - (\frac{p}{3})^3 = 0$, корнями которого, очевидно, будут числа g^3 и h^3. Поэтому корень уравнения $x^3 + px + q = 0$ равен $-g - h = \sqrt[3]{-(\frac{q}{2}) + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-(\frac{q}{2}) - \sqrt{D}} = R - \frac{p}{3R}$. QED.

Стоит заметить, что существуют кубические уравнения вида $x^3 + px + q = 0$ с рациональными p и q, имеющие рациональный корень, такие, что $\sqrt{D}$- иррациональное число. Для доказательства этого факта рассмотрим, например, уравнение $x^3 + 3x - 4 = 0$. С одной стороны, т. к. 1 является его корнем, оно имеет рациональный корень. С другой стороны, т. к. $\sqrt{D} = \sqrt{(\frac{3}{3})^3 + (\frac{-4}{2})^2} = \sqrt{5}$, $\sqrt{D}$ иррационально.

Результат, доказанный в моей статье, известен специалистам. На эту тему есть, например, статья А. Б. Скопенкова arxiv.org/pdf/0804.4357v5.pdf