Многочлены Бернштейна

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)b_{n,k}(x),\ \text{где}\ b_{n,k}(x)\overset{def}{=}C_n^k x^k(1-x)^{n-k},\ C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1}$$

$b_{n,k}(x)$ называют многочленами Бернштейна, а операторы $B_n(f,x)$ – полиномами Бернштейна функции $f(x)$. , С.Н. Бернштейн доказал, что

$$\lim_{n\to\infty}\|f-B_n(f)\|=0$$

В ходе моей работы было получено несколько основных утверждений.

Утверждение 1.

Для всех $n, j, p \geq 0$ и $0 \leq j + p \leq n$ верны следующие формулы:

$$x^j=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{n(n-1)\ldots(n-j+1)}b_{n,k}(x)=\frac{1}{[n]_j}\sum_{k=j}^{n}[k]_j b_{n,k}(x) \tag{2}$$

$$x^j(1-x)^p=\frac{1}{[n]_{j+p}}\sum_{k=j}^{n-p}[k]_j[n-k]_p b_{n,k}(x) \tag{3}$$

где $[z]_i=z(z-1)\ldots(z-i+1)$ – обобщенные степени.

Доказательство утверждения 1.

Приведем доказательство (2).

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{n(n-1)\ldots(n-j+1)}b_{n,k}(x)=\sum_{k=j}^{n}\frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{n(n-1)\ldots(n-j+1)}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}=$$

$$=x\sum_{k=j}^{n}\frac{(k-1)\ldots(k-j+1)}{(n-1)\ldots(n-j+1)}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=\ldots=$$

$$=x^j\sum_{k=j}^{n}\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!}x^{k-j}(1-x)^{n-k}=x^j(x+1-x)^{n-j}=x^j$$

Приведем доказательство (3).

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)(n-k)(n-k-1)\ldots(n-k-p+1)}{n(n-1)\ldots(n-j+1)(n-j)\ldots(n-p-j+1)}b_{n,k}(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)(n-k)(n-k-1)\ldots(n-k-p+1)}{n(n-1)\ldots(n-j+1)(n-j)\ldots(n-p-j+1)}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}=$$

$$=x^j(1-x)^p\sum_{k=j}^{n-p}\frac{(n-j-p)!}{(k-j)!(n-j-k)!}x^{k-j}(1-x)^{n-k-p}=x^j(1-x)^p(x+1-x)^{n-j-p}=x^j(1-x)^p$$

Утверждение доказано.

Эвристические соображения об утверждении 1.

Применим методы теории вероятностей для доказательства (2). Пусть некоторое события *A* появляется с вероятностью *x* в любом из *n* независимых испытаний. Случайным образом производится *j* наблюдений некоторых испытаний. Наблюдение считается успешным, если в соответствующем испытании появляется событие *A*. Тогда вероятность, того, что эти *j* наблюдений будут успешными будет равна x^j .С другой стороны, известно (распределения Бернулли), что вероятность появления события *A* ровно *k* раз будет равна $P(k)=C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=b_{n,k}(x)$.Вероятность выбора *j* успехов среди этих *k* испытаний будет равна $\frac{C_k^j}{C_n^j}=\frac{k!\,j!(n-j)!}{j!(k-j)!n!}=\frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{n(n-1)\ldots(n-j+1)}$. Поэтому, если событие появилось *k* раз вероятности *j* успешных наблюдений будет равна $\frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{n(n-1)\ldots(n-j+1)}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{n(n-1)\ldots(n-j+1)}b_{n,k}(x)$. Так как события «появится *k* раз» несовместны, то искомая вероятность будет равна сумме:

$$\sum_{k=j}^{n}\frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{n(n-1)\ldots(n-j+1)}b_{n,k}(x)=\frac{1}{[n]_j}\sum_{k=j}^{n}[k]_j b_{n,k}(x)$$

где $[z]_i=z(z-1)\ldots(z-i+1)$ – обобщенные степени.

Утверждение доказано.

Лемма 1.

Пусть $n\geq 0$, тогда для функции $f(x)$ верно равенство:

$$B_n(f,x)=f(0)(1-x)^{n+1}+f(1)x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\left(1-\frac{k}{n+1}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)b_{n+1,k}(x) \qquad (5)$$

Доказательство.

Очевидным следствием равенства (3) является равенство:

$$x^k(1\text{-}x)^{m\text{-}k}=x^k(1\text{-}x)^{m\text{-}k+1}+x^{k+1}(1\text{-}x)^{m\text{-}k}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
B_n(f,x)&=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k\left(x^k(1-x)^{n+1-k}+x^{k+1}(1-x)^{n-k}\right)=\\
&=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^{k+1}(1-x)^{n-k}=f(0)(1-x)^{n+1}+\\
&+\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)C_n^{k-1}x^k(1-x)^{n+1-k}+f(1)x^{n+1}=\\
&=f(0)(1-x)^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k+f\left(\frac{k-1}{n}\right)C_n^{k-1}\right)x^k(1-x)^{n+1-k}+f(1)x^{n+1}=\\
&=f(0)(1-x)^{n+1}+f(1)x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k\left(\frac{n+1-k}{n+1}f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n+1-k}=\\
&=f(0)(1-x)^{n+1}+f(1)x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n+1}f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)b_{n+1,k}(x)
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Утверждение 2.

Пусть $f(x)$ – кусочно-линейная функция (ломаная) с узлами в точках $\frac{k}{n}$, $k=1,2,\ldots,n-1$, и $n \geq 0$. Тогда

$$B_{n+1}(f) = B_n(f) \tag{6}$$

Доказательство следует из (5), из того, что $f\left(\frac{k}{n+1}\right)=\left(1-\frac{k}{n+1}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ и по определению функции $f(x)$.

Например, для функции $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$ оказывается, что

$$B_{2n+1}(f) = B_{2n}(f),\ n \geq 0.$$

Доказательство.

Так как $B_m(const)=const$, то вместо функции $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$ рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{2}-\left|x-\frac{1}{2}\right|$. Итак,

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x, & \text{если } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} B_{2n+1}(f,x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2n+1}C_{2n+1}^{k}x^k(1-x)^{2n+1-k}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)C_{2n+1}^{k}x^k(1-x)^{2n+1-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{k-1}x^k(1-x)^{2n+1-k}+\sum_{k=n+1}^{2n}C_{2n}^{k}x^k(1-x)^{2n+1-k} = x(1-x)^{2n}+\sum_{k=2}^{n}C_{2n}^{k-1}x^k(1-x)^{2n+1-k} + \\ &+ C_{2n}^{n+1}x^{n+1}(1-x)^n+\sum_{k=n+2}^{2n-1}C_{2n}^{k}x^k(1-x)^{2n+1-k}+x^{2n}(1-x) \end{aligned} \tag{7}$$

Аналогично,

$$B_{2n}(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2n}C_{2n}^{k}x^{k}(1-x)^{2n-k}+\sum_{k=n+1}^{2n}\left(1-\frac{k}{2n}\right)C_{2n}^{k}x^{k}(1-x)^{2n-k}= \\ =\sum_{k=1}^{n}C_{2n-1}^{k-1}x^{k}(1-x)^{2n-k}+\sum_{k=n+1}^{2n-1}C_{2n-1}^{k}x^{k}(1-x)^{2n-k} \tag{8}$$

Пользуясь очевидным равенством(3): $x^k(1\text{-}x)^{m-k}=x^k(1\text{-}x)^{m-k+1}+x^{k+1}(1\text{-}x)^{m-k}$и известным тождеством: $C_m^k=C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^{k}$, преобразуем эти две суммы

$$\sum_{k=1}^{n}C_{2n-1}^{k-1}x^{k}(1-x)^{2n-k}=\sum_{k=1}^{n}C_{2n-1}^{k-1}(x^{k}(1-x)^{2n-k+1}+x^{k+1}(1-x)^{2n-k})= \\ \sum_{k=1}^{n}C_{2n-1}^{k-1}x^{k}(1-x)^{2n-k+1}+\sum_{k=1}^{n}C_{2n-1}^{k-1}x^{k+1}(1-x)^{2n-k}=x(1-x)^{2n}+\sum_{k=2}^{n}C_{2n-1}^{k-1}x^{k}(1-x)^{2n-k+1}+ \\ +\sum_{k=2}^{n}C_{2n-1}^{k-2}x^{k}(1-x)^{2n+1-k}+C_{2n-1}^{n-1}x^{n+1}(1-x)^{n}=x(1-x)^{2n}+\sum_{k=2}^{n}\left(C_{2n-1}^{k-1}+C_{2n-1}^{k-2}\right)x^{k}(1-x)^{2n-k+1}+ \\ +C_{2n-1}^{n-1}x^{n+1}(1-x)^{n}=x(1-x)^{2n}+\sum_{k=2}^{n}C_{2n}^{k-1}x^{k}(1-x)^{2n-k+1}+C_{2n-1}^{n-1}x^{n+1}(1-x)^{n}= \\ =x(1-x)^{2n}+\sum_{k=2}^{n}C_{2n}^{k-1}x^{k}(1-x)^{2n-k+1}+C_{2n-1}^{n}x^{n+1}(1-x)^{n} \tag{9}$$

и

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1}C_{2n-1}^{k}x^{k}(1-x)^{2n-k}=\sum_{k=n+1}^{2n-1}C_{2n-1}^{k}(x^{k}(1-x)^{2n-k+1}+x^{k+1}(1-x)^{2n-k})= \\ =\sum_{k=n+1}^{2n-1}C_{2n-1}^{k}x^{k}(1-x)^{2n-k+1}+\sum_{k=n+1}^{2n-1}C_{2n-1}^{k}x^{k+1}(1-x)^{2n-k}=C_{2n-1}^{n+1}x^{n+1}(1-x)^{n}+ \\ +\sum_{k=n+2}^{2n-1}C_{2n-1}^{k}x^{k}(1-x)^{2n-k+1}+x^{2n}(1-x)+\sum_{k=n+2}^{2n-1}C_{2n-1}^{k-1}x^{k}(1-x)^{2n+1-k}= \\ C_{2n-1}^{n+1}x^{n+1}(1-x)^{n}+\sum_{k=n+2}^{2n-1}\left(C_{2n-1}^{k-1}+C_{2n-1}^{k}\right)x^{k}(1-x)^{2n-k+1}+x^{2n}(1-x)= \\ =C_{2n-1}^{n+1}x^{n+1}(1-x)^{n}+\sum_{k=n+2}^{2n-1}C_{2n}^{k}x^{k}(1-x)^{2n-k+1}+x^{2n}(1-x) \tag{10}$$

Складывая (9) и (10) получаем (7).

Утверждение доказано.

Равенства, подобные выведенным, иногда называют «склейками». Они имеют место для любой ломаной $f(x)$, узлы которой принадлежат множеству $\left\{\frac{k}{n}, k=1,2,\ldots,n-1\right\}$.

Утверждение 3.

Если непрерывная на [0,1] функция $f(x)$ дважды непрерывно-дифференцируема на $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$ и для бесконечного множества номеров n выполняются равенства:

$$B_{2n+1}(f)=B_{2n}(f), \text{ то } f(x)$$

имеет вид:

$$f(x)=a\left|x-\frac{1}{2}\right|+bx+c$$

А, если $B_{2n}(f)=B_{2n-1}(f)$, то $f(x)=ax+b$.

Приведем доказательство утверждения 3.

Так как для функции $f(x)$ выполняются равенства $B_{2n+1}(f)=B_{2n}(f)$, $n\geq 1$, из (5) следует, что

$$B_{2n}(f,x)=f(0)(1-x)^{2n+1}+f(1)x^{2n+1}+\sum_{k=1}^{2n}\left(\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)f\left(\frac{k}{2n}\right)+\frac{k}{2n+1}f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\right)b_{2n+1,k}(x)=$$

$$=f(0)(1-x)^{2n+1}+f(1)x^{2n+1}+\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{2n+1}\right)b_{2n+1,k}(x)$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{2n}\left(\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)f\left(\frac{k}{2n}\right)+\frac{k}{2n+1}f\left(\frac{k-1}{2n}\right)-f\left(\frac{k}{2n+1}\right)\right)b_{2n+1,k}(x)=0$$

Так как многочлены $b_{2n+1,k}$ линейно независимы, то имеем равенства:

$$\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)f\left(\frac{k}{2n}\right)+\frac{k}{2n+1}f\left(\frac{k-1}{2n}\right)-f\left(\frac{k}{2n+1}\right)=0,\ k=1,\ldots 2n \quad ..$$

По теореме Лагранжа на каждом из отрезков $\left[\frac{k-1}{2n},\frac{k}{2n}\right]$, $k=1,...2n$, получаем

$$\begin{aligned}
0 &= \left(1-\frac{k}{2n+1}\right)\left(f\left(\frac{k}{2n}\right)-f\left(\frac{k}{2n+1}\right)\right)-\frac{k}{2n+1}\left(f\left(\frac{k}{2n+1}\right)-f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\right)= \\
&= \left(1-\frac{k}{2n+1}\right)f'(c_1)\left(\frac{k}{2n}-\frac{k}{2n+1}\right)-\frac{k}{2n+1}f'(c_2)\left(\frac{k}{2n+1}-\frac{k-1}{2n}\right)= \\
&= \frac{2n+1-k}{2n+1}\frac{k}{(2n+1)2n}f'(c_1)-\frac{k}{2n+1}\frac{2n+1-k}{(2n+1)2n}f'(c_2)= \\
&= \frac{(2n+1-k)k}{(2n+1)^2 2n}f''(c)(c_1-c_2),\ c\in\left(\frac{k-1}{2n},\frac{k}{2n}\right),\ k=1,2,...2n
\end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство следует из непрерывности второй производной функции $f(x)$, которая, в силу (11), обращается в ноль на плотном множестве отрезка [0,1] и, следовательно, на каждом из отрезков $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2},1\right]$ она является линейной. Отсюда следует первая часть утверждения. Для окончательного доказательства второй части достаточно заметить, что если $B_{2n-1}(f)=B_{2n}(f)$, то

$$\left(1-\frac{k}{2n}\right)f\left(\frac{k}{2n-1}\right)+\frac{k}{2n}f\left(\frac{k-1}{2n-1}\right)-f\left(\frac{k}{2n}\right)=0,\ k=1,..2n$$

И, в частности,

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{n}{2n-1}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{n-1}{2n-1}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

Утверждение доказано.

Список литературы.

.

- [1] Бернштейн С.Н., Собрание сочинений. — М.: 1952. — Т. 1. — С. 105-106
- [2] Бернштейн С. Н., Собрание сочинений. — М.: 1954. — Т. 3. — С. 310-348
- [3] Тихонов И.В., Шерстюков В.Б,. Приближение модуля полиномами Бернштейна —М. 2012.
- [4] Малозёмов В.Н., Сергеев А.Н., Григорьев М.И., Полиномы Бернштейна и Составные кривые Безье — С-П. 2004.