Многочлены Бернштейна

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x), \text{ где } b_{n,k}(x)\overset{def}{=}C_n^k x^k(1-x)^{n-k},\ C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$b_{n,k}(x)$ называют многочленами Бернштейна, а операторы $B_n(f,x)$ – полиномами Бернштейна функции $f(x)$. , С.Н. Бернштейн доказал, что

$$\lim_{n\to\infty}\|f-B_n(f)\|=0$$

В ходе моей работы было получено несколько основных утверждений.

**Лемма 1.**

Пусть $n\geq 0$, тогда для функции $f(x)$ верно равенство:

$$B_n(f,x)=f(0)(1-x)^{n+1}+f(1)x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\left(1-\frac{k}{n+1}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)b_{n+1,k}(x) \qquad (1)$$

*Доказательство.*

Очевидным является равенство:

$$x^k(1-x)^{m-k}=x^k(1-x)^{m-k+1}+x^{k+1}(1-x)^{m-k}$$

Отсюда имеем

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k\left(x^k(1-x)^{n+1-k}+x^{k+1}(1-x)^{n-k}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^{k+1}(1-x)^{n-k} = f(0)(1-x)^{n+1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)C_n^{k-1} x^k(1-x)^{n+1-k} + f(1)x^{n+1}=$$

$$= f(0)(1-x)^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left( f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k + f\left(\frac{k-1}{n}\right)C_n^{k-1}\right)x^k(1-x)^{n+1-k} + f(1)x^{n+1}=$$

$$= f(0)(1-x)^{n+1}+f(1)x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k\left(\frac{n+1-k}{n+1}f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n+1-k}=$$

$$= f(0)(1-x)^{n+1}+f(1)x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n+1}f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)b_{n+1,k}(x)$$

Лемма доказана.

**Утверждение 1.**

Пусть $f(x)$ – кусочно-линейная функция (ломаная) с узлами в точках $\frac{k}{n}$, $k=1,2,\ldots,n-1$, и $n\geq 0$. Тогда

$$B_{n+1}(f) = B_n(f) \tag{2}$$

Доказательство следует из (1), из того, что $f\left(\frac{k}{n+1}\right)=\left(1-\frac{k}{n+1}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ и по определению функции $f(x)$.

Например, для функции $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$ оказывается, что

$$B_{2n+1}(f) = B_{2n}(f),\ n\geq 0.$$

*Доказательство.*

Так как $B_m(const)=const$, то вместо функции $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$ рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{2}-\left|x-\frac{1}{2}\right|$. Итак,

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\le\frac{1}{2} \\ 1-x, & \text{если } x>\frac{1}{2} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} B_{2n+1}(f,x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2n+1}C_{2n+1}^{k}x^{k}(1-x)^{2n+1-k}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)C_{2n+1}^{k}x^{k}(1-x)^{2n+1-k}= \\ &=\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{k-1}x^{k}(1-x)^{2n+1-k}+\sum_{k=n+1}^{2n}C_{2n}^{k}x^{k}(1-x)^{2n+1-k}=x(1-x)^{2n}+\sum_{k=2}^{n}C_{2n}^{k-1}x^{k}(1-x)^{2n+1-k}+ \\ &+C_{2n}^{n+1}x^{n+1}(1-x)^{n}+\sum_{k=n+2}^{2n-1}C_{2n}^{k}x^{k}(1-x)^{2n+1-k}+x^{2n}(1-x) \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} B_{2n}(f,x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2n}C_{2n}^{k}x^{k}(1-x)^{2n-k}+\sum_{k=n+1}^{2n}\left(1-\frac{k}{2n}\right)C_{2n}^{k}x^{k}(1-x)^{2n-k}= \\ &=\sum_{k=1}^{n}C_{2n-1}^{k-1}x^{k}(1-x)^{2n-k}+\sum_{k=n+1}^{2n-1}C_{2n-1}^{k}x^{k}(1-x)^{2n-k} \end{aligned} \tag{4}$$

Пользуясь очевидным равенством: $x^k(1-x)^{m-k}=x^k(1-x)^{m-k+1}+x^{k+1}(1-x)^{m-k}$ и известным тождеством: $C_m^k=C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^{k}$, преобразуем эти две суммы

$$\sum_{k=1}^{n} C_{2n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{2n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_{2n-1}^{k-1} (x^k (1-x)^{2n-k+1} + x^{k+1} (1-x)^{2n-k}) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} C_{2n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{2n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n-1}^{k-1} x^{k+1} (1-x)^{2n-k} = x(1-x)^{2n} + \sum_{k=2}^{n} C_{2n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{2n-k+1} +$$
$$+ \sum_{k=2}^{n} C_{2n-1}^{k-2} x^k (1-x)^{2n+1-k} + C_{2n-1}^{n-1} x^{n+1} (1-x)^n = x(1-x)^{2n} + \sum_{k=2}^{n} \left( C_{2n-1}^{k-1} + C_{2n-1}^{k-2} \right) x^k (1-x)^{2n-k+1} + \tag{5}$$
$$+ C_{2n-1}^{n-1} x^{n+1} (1-x)^n = x(1-x)^{2n} + \sum_{k=2}^{n} C_{2n}^{k-1} x^k (1-x)^{2n-k+1} + C_{2n-1}^{n-1} x^{n+1} (1-x)^n =$$
$$= x(1-x)^{2n} + \sum_{k=2}^{n} C_{2n}^{k-1} x^k (1-x)^{2n-k+1} + C_{2n-1}^{n} x^{n+1} (1-x)^n$$

и

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} C_{2n-1}^{k} x^k (1-x)^{2n-k} = \sum_{k=n+1}^{2n-1} C_{2n-1}^{k} (x^k (1-x)^{2n-k+1} + x^{k+1} (1-x)^{2n-k}) =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{2n-1} C_{2n-1}^{k} x^k (1-x)^{2n-k+1} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} C_{2n-1}^{k} x^{k+1} (1-x)^{2n-k} = C_{2n-1}^{n+1} x^{n+1} (1-x)^n +$$
$$+ \sum_{k=n+2}^{2n-1} C_{2n-1}^{k} x^k (1-x)^{2n-k+1} + x^{2n}(1-x) + \sum_{k=n+2}^{2n-1} C_{2n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{2n+1-k} = \tag{6}$$
$$C_{2n-1}^{n+1} x^{n+1} (1-x)^n + \sum_{k=n+2}^{2n-1} \left( C_{2n-1}^{k-1} + C_{2n-1}^{k} \right) x^k (1-x)^{2n-k+1} + x^{2n}(1-x) =$$
$$= C_{2n-1}^{n+1} x^{n+1} (1-x)^n + \sum_{k=n+2}^{2n-1} C_{2n}^{k} x^k (1-x)^{2n-k+1} + x^{2n}(1-x)$$

Складывая (5) и (6) получаем (3).

Утверждение доказано.

Равенства, подобные выведенным, иногда называют «склейками». Они имеют место для любой ломаной $f(x)$, узлы которой принадлежат множеству $\left\{ \frac{k}{n}, k = 1,2,\ldots,n-1 \right\}$.

**Утверждение 2.**

Если непрерывная на [0,1] функция $f(x)$ дважды непрерывно-дифференцируема на $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$ и для бесконечного множества номеров $n$ выполняются равенства:

$B_{2n+1}(f)=B_{2n}(f)$, то $f(x)$

имеет вид:

$$f(x)=a\left|x-\frac{1}{2}\right|+bx+c$$

А, если $B_{2n}(f)=B_{2n-1}(f)$, то $f(x)=ax+b$.

*Приведем доказательство утверждения 2.*

Так как для функции $f(x)$ выполняются равенства $B_{2n+1}(f)=B_{2n}(f)$, $n\geq 1$, из (1) следует, что

$$B_{2n}(f,x)=f(0)(1-x)^{2n+1}+f(1)x^{2n+1}+\sum_{k=1}^{2n}\left(\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)f\left(\frac{k}{2n}\right)+\frac{k}{2n+1}f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\right)b_{2n+1,k}(x)=$$

$$=f(0)(1-x)^{2n+1}+f(1)x^{2n+1}+\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{2n+1}\right)b_{2n+1,k}(x)$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{2n}\left(\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)f\left(\frac{k}{2n}\right)+\frac{k}{2n+1}f\left(\frac{k-1}{2n}\right)-f\left(\frac{k}{2n+1}\right)\right)b_{2n+1,k}(x)=0$$

Так как многочлены $b_{2n+1,k}$ линейно независимы, то имеем равенства:

$$\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)f\left(\frac{k}{2n}\right)+\frac{k}{2n+1}f\left(\frac{k-1}{2n}\right)-f\left(\frac{k}{2n+1}\right)=0,\ \ k=1,..2n \qquad ..$$

По теореме Лагранжа на каждом из отрезков $\left[\frac{k-1}{2n},\frac{k}{2n}\right]$, $k=1,...2n$, получаем

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(1-\frac{k}{2n+1}\right)\left(f\left(\frac{k}{2n}\right)-f\left(\frac{k}{2n+1}\right)\right)-\frac{k}{2n+1}\left(f\left(\frac{k}{2n+1}\right)-f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\right)= \\
&= \left(1-\frac{k}{2n+1}\right)f'(c_1)\left(\frac{k}{2n}-\frac{k}{2n+1}\right)-\frac{k}{2n+1}f'(c_2)\left(\frac{k}{2n+1}-\frac{k-1}{2n}\right)= \\
&= \frac{2n+1-k}{2n+1}\frac{k}{(2n+1)2n}f'(c_1)-\frac{k}{2n+1}\frac{2n+1-k}{(2n+1)2n}f'(c_2)= \\
&= \frac{(2n+1-k)k}{(2n+1)^2 2n}f''(c)(c_1-c_2),\ c\in\left(\frac{k-1}{2n},\frac{k}{2n}\right),\ k=1,2,\ldots 2n
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Доказательство следует из непрерывности второй производной функции $f(x)$, которая, в силу (7), обращается в ноль на плотном множестве отрезка [0,1] и, следовательно, на каждом из отрезков $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2},1\right]$ она является линейной. Отсюда следует первая часть утверждения. Для окончательного доказательства второй части достаточно заметить, что если $B_{2n-1}(f)=B_{2n}(f)$, то

$$
\left(1-\frac{k}{2n}\right)f\left(\frac{k}{2n-1}\right)+\frac{k}{2n}f\left(\frac{k-1}{2n-1}\right)-f\left(\frac{k}{2n}\right)=0,\ \ k=1,\ldots 2n
$$

И, в частности,

$$
\frac{1}{2}f\left(\frac{n}{2n-1}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{n-1}{2n-1}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=0
$$

Утверждение доказано.

Список литературы.

.


- [1] Бернштейн С.Н., Собрание сочинений. — М.: 158. — Т. 1. — С. 61-62
- [2] Бернштейн С. Н., Собрание сочинений. — М.: 1514. — Т. 3. — С. 36-344
- [3] Тихонов И.В., Шерстюков В.Б,. Приближение модуля полиномами Бернштейна —М. 2012.
- [4] Малозёмов В.Н., Сергеев А.Н., Григорьев М.И., Полиномы Бернштейна и Составные кривые Безье — С-П. 2004.