О ГРАФАХ ДАННОГО ДИАМЕТРА БЕЗ МАЛЫХ ЦИКЛОВ

Крутовский Роман [1]

Теорема. *Если диаметр связного графа равен d, и длина каждого несамопересакающегося цикла не меньше $2d + 1$, причем хотя бы один цикл существует, то степени всех вершин графа равны.*

Эта теорема предложена в виде задачи (с. 294, задача N 12) в книге "Математика в задачах под редакцией А. Заславского, Д. Пермякова, А. Скопенкова, М. Скопенкова и А. Шаповалова, Москва, МЦНМО, 2009. В настоящей заметке приводится решение, отличное от решения Дмитрия Пермякова. Благодарю за обсуждение данной задачи Ивана Павлова и Константина Хадаева, которые помогли выбрать более простое доказательство леммы 3.

Далее рассматриваются только вершины данного в теореме графа. Далее в тексте каждая из фраз 'путь $A - B$' и '$A - B$' будет обозначать 'некоторый кратчайший путь из A в B'.

Лемма 1. *Для любых вершин A и B существует ровно одно ребро, соединяющее B с некоторой вершиной, более близкой к A, чем B.*

Доказательство. Из связности графа следует, что хотя бы одно такое ребро существует.

Если есть два таких ребра BC и BD, то цикл, состоящий из $A - D$, $A - C$ и ребер BD, BC, имеет длину $\leq 2d$. Если он самопересекающийся, то в нем можно выделить несамопересекающийся цикл меньшей длины. Противоречие. QED

Лемма 2. *Если между некоторыми вершинами, находящимися на расстоянии k от A, есть ребро, то $k = d$.*

Доказательство. Пусть эти вершины — C и D. Длина цикла, состоящего из $C - A$, $A - D$ и ребра CD, не превосходит $2k + 1$. Внутри найденного нами цикла можно выделить несамопересекающийся цикл длины $\leq 2k + 1$. Значит $k = d$. QED

Лемма 3. *Степени любых двух вершин, расположенных на расстоянии d друг от друга, равны.*

Для каждого соседа B вершины A через W_B обозначим множество всех вершин L на расстоянии d от A таких, что $A - L$ проходит через B.

Утверждение. *Между вершинами множества W_B нет ребер.*

Доказательство. Иначе нашелся бы цикл длины меньше $2d + 1$. QED

Доказательство леммы 3. Докажем, что для любых двух вершин A и C, расположенных на расстоянии d друг от друга, $degC \leq degA$. Тогда ввиду симметричности A и C мы докажем лемму 3.

Допустим, что $degC > degA$. Обозначим через B того соседа вершины A, для которого $C \in W_B$. Из вершины C по леммам 1 и 2 выходит только одно ребро в вершины, расположенные на меньшем расстоянии от A, чем C. Значит, из нее выходит хотя бы n ребер в вершины, расположенные на расстоянии d от A.

Из C по утверждению не выходит ребер в множество W_B.

Значит, существует такой сосед D вершины A, что из вершины C выходит два ребра в две вершины из W_D. Обозначим их через X и Y. Тогда цикл, состоящий из CX, $X - D$, $D - Y$, YC, имеет длину $2d$. Если он самопересекающийся, то в нем можно найти несамопересекающийся цикл меньшей длины. Противоречие. QED

Ввиду связности графа теорема вытекает из следующей леммы.

Лемма 4. *Степени любых двух соседних вершин равны.*

Доказательство. Обозначим через A произвольную вершину.

[1] rice12@yandex.ru; ГБОУ Гимназия 1514.

Если некоторая вершина X одновременно принадлежит множествам W_P и W_Q, то цикл, состоящий из AP, $P - X$, $X - Q$ и QA, имеет длину $2d$. Внутри него можно выделить несамопересекающийся цикл длины не больше $2d$. Противоречие. Поэтому $W_P \cap W_Q = \emptyset$.

Возьмем произвольный цикл в графе и одну из его вершин, наиболее удаленную от A. Применяя к ней леммы 1 и 2 получаем, что в цикле есть по крайней мере 2 вершины, находящиеся на расстоянии d от A. Обозначим их через C_1 и C_2. Обозначим через B_1 и B_2 вторые вершины на путях $A - C_1$ и $A - C_2$ соответственно. По утверждению $B_1 \neq B_2$.

Тогда по лемме 3 $degC_1 = degA = degC_2$. Все соседи вершины A, кроме B_1, будут располагаться на расстоянии d от C_1, иначе для такого соседа N существовал бы цикл $N - C_1 - AN$ длины меньше $2d + 1$.В нем можно выделить несамопересекающийся цикл длины не больше $2d$. Аналогичное утверждение справедливо и для B_2, C_2. Тогда по лемме 3 $degC_1 = degA$ равна степени каждого соседа вершины A, кроме B_1. Аналогично $degC_2 = degA$ равна степени каждого соседа вершины A, кроме B_2. Значит, степень каждого соседа вершины A равна $degA$. QED