О ГРАФАХ ДАННОГО ДИАМЕТРА БЕЗ МАЛЫХ ЦИКЛОВ

Крутовский Роман [1]

Теорема. *Если диаметр связного графа равен d, и длина каждого несамопересакающегося цикла не меньше $2d+1$, причем хотя бы один цикл существует, то степени всех вершин графа равны.*

Эта теорема предложена в виде задачи N 2.11 без решения в книге Ф. Харари,'Теория графов'. Благодарю Дмитрия Пермякова за обсуждение данной задачи и рассказ своего решения. Благодарю за обсуждение данной задачи Ивана Павлова и Константина Хадаева, которые помогли выбрать более простое доказательство леммы 3.

Далее рассматриваются только вершины данного в теореме графа.

Далее в тексте для любых двух вершин A и B каждая из фраз 'путь $A-B$' и '$A-B$' будет обозначать кратчайший путь из A в B. То, что такой есть следует из связности графа. Такой путь всего один, потому что если бы их было бы хотя бы 2, то ввиду того, что диаметр графа равен d, нашелся бы цикл длины не больше $2d$. А в нем можно выделить несамопересекающийся цикл длины не больше $2d$, что противоречит условию.

Лемма 1. *Для любых вершин A и B существует ровно одно ребро, соединяющее B с вершиной B' такой, что расстояние от B' до A меньше чем расстояние от B до A .*

Доказательство. Из связности графа следует, что хотя бы одно такое ребро существует.

Если есть два таких ребра BB' и BB'', то цикл, состоящий из $A-B''$, $A-B'$ и ребер BB', BB'', имеет длину не больше $2d$. Если он самопересекающийся, то в нем можно выделить несамопересекающийся цикл меньшей длины. Противоречие. QED

Лемма 2. *Если между некоторыми вершинами, находящимися на расстоянии k от A, есть ребро, то $k=d$.*

Доказательство. Пусть эти вершины — C и D. Длина цикла, состоящего из $C-A$, $A-D$ и ребра CD, не превосходит $2k+1$. Внутри найденного нами цикла можно выделить несамопересекающийся цикл длины не больше $2k+1$. Значит, $k=d$, потому что из условия $k \le d$. QED

Лемма 3. *Степени любых двух вершин, расположенных на расстоянии d друг от друга, равны.*

Для каждого соседа B вершины A через W_B обозначим множество всех вершин L на расстоянии d от A таких, что $A-L$ проходит через B. Поскольку далее понятно из контекста, какая из вершин является вершиной A, мы не указываем ее в обозначениях.

Утверждение. *Для любых двух вершин A и B, соединенных ребром, между вершинами множества W_B нет ребер.*

Доказательство. Иначе нашелся бы цикл длины меньше $2d+1$. Если он самопересекающийся, то в нем можно найти несамопересекающийся цикл меньшей длины. QED

Доказательство леммы 3. Докажем, что для любых двух вершин A и C, расположенных на расстоянии d друг от друга, $degC \le degA$. Тогда ввиду симметричности A и C мы докажем лемму 3.

Допустим, что $degC > degA$. Обозначим через B того соседа вершины A, для которого $C \in W_B$. Из вершины C по лемме 1 выходит только одно ребро в вершины, расположенные на меньшем расстоянии от A, чем C. Значит, из C выходит хотя бы n ребер в вершины, расположенные на расстоянии d от A.

По утверждению из C не выходит ребер в множество W_B.

Значит, существует такой сосед B' вершины A, что из вершины C выходит два ребра в две вершины из $W_{B'}$. Обозначим эти две вершины через X и Y. Тогда цикл, состоящий из CX,

[1] rice12@yandex.ru; ГБОУ Гимназия 1514.

$X - B'$, $B' - Y$, YC, имеет длину $2d$. Если он самопересекающийся, то в нем можно найти несамопересекающийся цикл меньшей длины. Противоречие. QED

Ввиду связности графа теорема вытекает из следующей леммы.

Лемма 4. *Степени любых двух соседних вершин равны.*

Доказательство. Обозначим через A произвольную вершину.

Если некоторая вершина X одновременно принадлежит произольным множествам W_P и W_Q, то цикл, состоящий из AP, $P - X$, $X - Q$ и QA, имеет длину $2d$. Внутри него можно выделить несамопересекающийся цикл длины не больше $2d$. Противоречие. Поэтому $W_P \cap W_Q = \emptyset$.

Возьмем произвольный цикл в графе и одну из его вершин C_1, наиболее удаленную от A. Обозначим через k расстояние от C_1 до A. Тогда из C_1 выходит хотя бы два ребра в вершины, находящиеся на расстоянии не превосходящем k от A. По лемме 1 только одно ребро выходит из C_1 в вершину, расположенную на расстоянии меньшем k от A. Значит, из C_1 выходит хотя бы одно ребро в вершину C_2 на расстоянии k от A. Из леммы 2 следует, что $k = d$.

Обозначим через B_1 и B_2 вторые вершины на $A - C_1$ и $A - C_2$, соответственно. По утверждению $B_1 \neq B_2$;

Ввиду леммы 3 получаем, что $degC_1 = degA = degC_2$. Все соседи вершины A, кроме B_1, будут располагаться на расстоянии d от C_1. Иначе для такого соседа N существовал бы цикл $N - C_1 - AN$ длины меньше $2d + 1$. В нем можно выделить несамопересекающийся цикл длины не больше $2d$.

Аналогично все соседи вершины A, кроме B_2, будут располагаться на расстоянии d от C_2 Из леммы 3 следует, что $degC_1 = degA$ и равна степени каждого соседа вершины A, кроме B_1. Аналогично $degC_2 = degA$ и равна степени каждого соседа вершины A, кроме B_2. Значит, степень каждого соседа вершины A равна $degA$. QED