Раздаточный материал
Неравенство Йенсена и выпуклые функции
А.Н. Лепес

Неравенство Йенсена (общий случай):

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq nf(x_0),$$

где $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $\sum_{j=1}^{n} l(x_j) = n \cdot l(x_0)$.

Baltic way, 2011, задача 4. Пусть даны положительные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d=4$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leq \frac{4}{9}.$$

Пример 1. ([3], стр. 31, упр. 1.2.9) Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите неравенство $\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geq 1$.

Пример 2. ([3], стр. 55, упр. 3.1.4) Пусть даны неотрицательные числа a, b, c, d, e такие, что

$$\frac{1}{4+a} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{4+c} + \frac{1}{4+d} + \frac{1}{4+e} = 1.$$

Докажите, что

$$\frac{a}{4+a^2} + \frac{b}{4+b^2} + \frac{c}{4+c^2} + \frac{d}{4+d^2} + \frac{e}{4+e^2} \leq 1.$$

Пример 3. (Китай, 2005, [1], стр. 196, задача 132) Пусть даны положительные числа a, b, c, сумма которых равна 1. Докажите неравенство

$$10(a^3+b^3+c^3) - 9(a^5+b^5+c^5) \geq 1.$$

Пример 4. ([1], стр. 196, задача 124) Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $a^2+b^2+c^2=12$. Найдите наибольшее значение выражения

$$A = a \cdot \sqrt[3]{b^2+c^2} + b \cdot \sqrt[3]{c^2+a^2} + c \cdot \sqrt[3]{a^2+b^2}.$$

Пример 5. (Baltic Way, 2002, задача 4, [4]) Путь дано целое положительное число n. Для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ таких, что $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(1-x_k)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Определение 1. Пусть дана числовая функция f, определенная на некотором промежутке I. Непрерывная функция g: $I \to R$ называется локальной опорной кривой к графику f в точке $x_0 \in I$, если $f(x_0)=g(x_0)$ и существует $\delta>0$ такое, что выполнено одно из следующих условий

1) для всякого $x \in I \cap (x_0-\delta; x_0+\delta)$ справедливо неравенство $f(x) \geq g(x)$;

2) для всякого $x \in I \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ справедливо неравенство $f(x) \leq g(x)$.

Лемма 1 (частный случай теоремы Ферма). *Пусть даны числовые функции f и g, определенные на промежутке I. Пусть также функции f и g дифференцируемы в точке $x_0 \in I$ и $f(x_0)=g(x_0)$. Если существует $\delta>0$ такое, что для всякого $x \in I \cap (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ выполнено неравенство $f(x) \geq g(x)$, то $f'(x_0)=g'(x_0)$.*

Лемма 2. *Пусть даны многочлены P, Q и g, промежуток I, точка $x_0 \in I$ такие, что $f(x_0)=g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, где $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Пусть также для всякого $x \in I$ выполнено неравенство $Q(x)>0$. Тогда разность $h(x) = f(x) - g(x)$ представима в виде $\frac{(x-x_0)^2 \cdot T(x)}{Q(x)}$, где T – многочлен.*

Теорема 1 (достаточные условия выполнения неравенства Йенсена). *Пусть даны числовые функции f и l, определенные на промежутке I. Пусть также функции f и l дифференцируемы в точке $x_0 \in I$. Если для каждого $x \in I$ выполнено неравенство*

$$f(x) \geq k \cdot l(x) + m,$$

где $k = \begin{cases} 0, \text{если } l'(x_0) = 0, \\ \frac{f'(x_0)}{l'(x_0)}, \text{если } l'(x_0) \neq 0, \end{cases}$ $m = f(x_0) - k \cdot l(x_0)$, *то для функции f справедливо неравенство Йенсена в точке x_0.*

Теорема 2 (достаточные условия выполнения неравенства Йенсена). *Пусть даны числовые функции f и l, определенные на промежутке I, и множество G, $x_0 \in I/G$. Пусть также функции f и l дифференцируемы в точке x_0 и на множествах G и I функция f достигает своего наименьшего значения. Если*

$$\min_G f + (n-1) \min_I f \geq n f(x_0)$$

и для каждого $x \in I/G$ выполнено неравенство

$$f(x) \geq k \cdot l(x) + m,$$

где $k = \begin{cases} 0, \text{если } l'(x_0) = 0, \\ \frac{f'(x_0)}{l'(x_0)}, \text{если } l'(x_0) \neq 0, \end{cases}$ $m = f(x_0) - k \cdot l(x_0)$, *то для функции f справедливо неравенство Йенсена в точке x_0.*

Определение 2. Пусть даны положительные числа x_1, x_2, …., x_n. Если число α отлично от нуля, то средним степенным чисел x_1, x_2, …., x_n называется число

$$c_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Если α=0, то

$$c_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Справедлива

Теорема 3 (достаточные условия для выполнения неравенство Йенсена). *Пусть даны число* α*, положительное число* x_0 *и натуральное число* $n \geq 2$*. Пусть дана функция f, определенная на множестве всех положительных чисел, и дифференцируема в точке* x_0*. Если* $(\alpha - 1) \cdot f'(x_0) \leq 0$ *и для всякого положительного числа x такого, что* $x^\alpha < n x_0^\alpha$ *выполнено* $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$*, то*

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq n f(x_0),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ *и* $c_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_0$.

Теорема 4 (достаточные условия для выполнения неравенство Йенсена). *Пусть даны число* $\alpha \neq 0$*, положительное число* x_0 *и натуральное число* $n \geq 2$*. Пусть дана функция f, определенная на множестве всех положительных чисел, и дифференцируема в точке* x_0*. Если* $(\alpha - 1) \cdot f'(x_0) \geq 0$ *и для всякого положительного числа x такого, что* $x < n x_0$ *выполнено* $f(x) \geq \frac{f'(x_0)}{\alpha \cdot x_0^{\alpha-1}}(x^\alpha - x_0^\alpha) + f(x_0)$*, то*

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq n f(x_0),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ *и* $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n x_0$.

Теорема 5. *Пусть дан многочлен* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$*, натуральное число n и положительное число* x_0*. Пусть даны неотрицательные числа* $x_1, x_2, \dots, x_n$*, сумма которых равна* $n x_0$*. Если* $2ax_0 + b \geq 0$ и $(n+2)ax_0 + b \geq 0$*, то справедливо неравенство Йенсена в точке* x_0*.*

Задача-подарок. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $ab+bc+ca=1$. Докажите неравенство $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Публикации по Проекту

1) г. Чебоксары, Россия

Ибатулин И.Ж., Лепес А.Н. Об одном методе доказательства неравенств //Математика. В образование: сб. статей. Вып. 9. Чебоксары: Изд-во Чуваш.ун-та. 2013. С. 34-59;

2) г. София, Болгария

Ibatulin I.Zh., Lepes A.N. Application of the method of separating tangents to prove inequalities // Didactical Modeling: e-journal 2013. URL: http://www.math.bas.bg/omi/DidMod/index.htm. 13 pages (в печати, 2014);

3) г. Гонконг, Китай

Ibatulin I.Zh., Lepes A.N. Using tangent lines to prove inequalities (part II) // Mathematical Excalibur. 2013-2014. 6 pages. (в печати, январь-февраль 2014);

4) г. Москва, Россия

Ибатулин И.Ж., Лепес А.Н. Применение касательной для доказательства неравенств // Математика в школе. 2014. 13 стр. (в печати, январь-февраль 2014).

Список литературы

1. Chetkovski Z. Inequalities. Theorems, techniques and Problems. – Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2012.
2. http://www.balticway-2011.de
3. Pham Kim Hung Secrets in Inequalities (volume 1). – Zalău : Gill. 2007.
4. http://www.ut.ee/bw2002
5. Берлов С.Л., Петров Ф.В., Смирнов А.В. Петербургские математические олимпиады 2011 года – М.: МЦНМО, 2012.
6. Suppa E. Inequalities from around the world 1995-2005. Teramo, 2011. 157 p.
7. Шабунин М.И. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008.
8. Гаврилов В.И., Субботин А.В. Изложение темы «выпуклые функции» в университетском курсе математического анализа// Математика в высшем образовании. 2003. №1. С. 21-28.
9. Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Йенсена//Квант. 2000. N 4. С.7-10.
10. Курляндчик Л., Файбусович А. История одного неравенства//Квант. 1991. N 4. С.14-18.
11. Берколайко С.Т., Каток С.Б. Об одном индуктивном методе доказательства неравенств//Квант. 1970.N8. С.33-36, 64.
12. Коровкин П.П. Неравенства. – М.: Наука, 1966.