Дискретные гармонические функции

Глеб Николаев, Илья Левин
Школа «Интеллектуал»
Научный руководитель - Сгибнев А. И.

25 ноября 2013 г.

1 О работе

Работа представляет собой исследование, применимое, в частности, в области теории потенциала. Основным результатом можно считать дискретный аналог теоремы Лиувилля, доказанный, по-видимому, в 1930–40 годах (таким же методом). Он состоит в том, что ограниченная сверху и снизу дискретная гармоническая функция на бесконечной квадратной решетке обязательно является постоянной. Помимо этого, исследованы некоторые свойства гармонических функций, в том числе и с ограниченной областью определения и начата работа в области численных методов построения таких функций.

2 Определение

Дискретной гармонической называется такая дискретная(задающая отображение $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$) функция, для которой значение в каждой целой точке равно среднему арифметическому значений во всех соседних точках. Другими словами, для каждой целой точки должно соблюдаться равенство:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f(a_1, a_2, \dots, a_i + 1, \dots, a_n) + f(a_1, a_2, \dots, a_i - 1, \dots, a_n))}{2n}.$$

В нашей работе мы на настоящий момент в основном рассматривали двумерные дискретные гармонические функции (далее ДГФ). Для них формула имеет вид:

$$f(x,y) = \frac{f(x+1,y) + f(x,y+1) + f(x-1,y) + f(x,y-1)}{4}.$$

Физический смысл ДГФ. *Дискретными гармоническими функциями приближённо моделируются некоторые физические процессы, такие, как распределение потенциала на N-мерной решётке одинаковых резисторов или тепла в N-мерном пространстве. Примеры см. ниже.*

3 Простейший пример задачи на ДГФ

Имеется улица длиной в N кварталов. Где-то между двумя кварталами на ней стоит пьяница. Двигается он таким образом: сначала случайным образом выбирается одно из двух направлений, потом он проходит в этом направлении один квартал и делает выбор снова. Его перемещения заканчиваются, когда он доходит до бара (левый конец улицы) или до дома (правый конец улицы). Требуется найти вероятность того, что он придёт домой из данного перекрёстка.

Математическая формулировка. Траекторией пьяницы длины $T+1$ назовем упорядоченный набор $T+1$ целых чисел из диапазона от 0 до N. Положением пьяницы в момент t назовем t-е число в этом наборе. Случайным блужданием, стартующим в числе x, назовем отображение, которое каждой строке s длины T из символов 'L' и 'R' сопоставляет траекторию длины $T+1$ по следующим правилам:

1. Положение пьяницы в момент 1 — это число x.

2. Если y — положение пьяницы в момент t, где $1 <= t <= T$, то положение пьяницы в момент $t+1$, это:

$$\begin{cases} y+1; \text{ если } 0 < y < N \text{ и } t\text{-й символ в строке } s \text{ равен 'R'}; \\ y-1; \text{ если } 0 < y < N \text{ и } t\text{-й символ в строке } s \text{ равен 'L'}; \\ \quad y; \text{ если } y = 0 \text{ или } y = N \end{cases}$$

Вероятностью попадания домой назовём долю строк s длины T, для которых соответствующая траектория заканчивается числом N, при $T \to \infty$. Более подробно определение вероятности изложено в Приложении.

Приблизительный набросок решения через ДГФ. Пусть $f(x)$ — дискретная функция, задающая искомые вероятности. С каждого перекрёстка пьяница может пойти в одну из двух сторон с равной вероятностью, то есть $f(x) = 1$. Нетрудно заметить, что в таком случае $f(x)$ — гармоническая. Гармоническая одномерная функция может быть только арифметической прогрессией (т.к. из определения напрямую следует, что $f(x+1) - f(x) = f(x) - f(x-1)$). Значения на концах отрезка нам известны (0 и 1 соответственно). Таким образом, мы можем найти вероятности во всех целых точках. Если принять конец улицы с баром за начало координат, а длину квартала за 1, то $f(x) = x/n$. □

4 Примеры ДГФ

Как понятно из рассмотренного случая, все одномерные ДГФ будут иметь вид арифметической прогрессии. По этой причине их изучение само по себе не представляет особого интереса, и мы сразу начали рассматривать двумерные случаи. Вот несколько простых примеров ДГФ на плоскости:

- *Постоянная функция*

2013	2013	2013	2013
2013	2013	2013	2013
2013	2013	2013	2013
2013	2013	2013	2013

- *Арифметические прогрессии*

1	8	15	22
1	8	15	22
1	8	15	22
1	8	15	22

- xy

4	8	12	16
3	6	9	12
2	4	6	8
1	2	3	4

- $x^2 - y^2$

-15	-12	-7	0
-8	-5	0	7
-3	0	5	12
0	3	8	15

Гармоничность последних двух функций доказывается подставлением их в формулу гармоничности и несложными алгебраическими преобразованиями.

5 Некоторые свойства ДГФ

Свойство 1. ***(Принцип суперпозиции)*** *Сумма двух гармонических дискретных функций также будет гармонической.*

Доказательство. Пусть A и B - ДГФ, их значение в некоторой точке - a_0 и b_0, а значения в соседних с этой точках - a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4 соответственно. Тогда $a_0 = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$, а $b_0 = \frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4}$. Следовательно,

$$a_0 + b_0 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{4};$$

$$a_0 + b_0 = \frac{(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + (a_4 + b_4)}{4}.$$

Таким образом, функция $A + B$ — тоже соответствует определению гармонической. □

Примечание 1. *Используя доказанный принцип и простейшие свойства операции сложения, нетрудно доказать, что множество ДГФ является группой относительно операции сложения. В нашей работе это нигде не используется, но в дальнейшем может пригодиться.*

Примечание 2. *В частности, из этого принципа следует, что мы можем прибавить к функции любую константу, так как постоянная функция также является гармонической.*

Свойство 2. *При умножении ДГФ на константу она останется ДГФ.*

Доказательство. Если A — функция, a_0 — некоторое её значение, окружённое значениями a_1, a_2, a_3, a_4, а k — константа, то

$$a_0 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4};$$
$$ka_0 = \frac{k(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}{4};$$
$$ka_0 = \frac{ka_1 + ka_2 + ka_3 + ka_4}{4}.$$

что и требовалось доказать. □

6 ДГФ с ограниченной областью значений

Для ДГФ с ограниченной областью значений $(E(f))$ верны несколько теорем:

Теорема 1. *Если область значений ДГФ принадлежит множеству натуральных чисел, то эта функция принимает одинаковое значение на всей дискретной плоскости.*

$$E(f) \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists c \mid f(x, y) \equiv c.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку (x_0, y_0) на дискретной плоскости, значение которой не совпадает со значением в одной из соседних с ней точек. Если таких точек нет, то функция принимает одинаковое значение во всех точках, что и требовалось доказать. Пусть такая точка есть. Тогда, исходя из условия гармоничности функции, в одной из соседних точек (x_1, y_1) значение функции будет меньше. Из тех же соображений найдется точка (x_2, y_2), соседняя с точкой (x_1, y_1) такая, что $f(x_2, y_2) < f(x_1, y_1)$ и так далее. Заметим, что в полученой последовательности точек (x_i, y_i) выполняется условие:

$$j > i \Rightarrow f(x_j, y_j) < f(x_i, y_i).$$

При этом, так как область значений функции f — натуральные числа,

$$f(x_i, y_i) - f(x_{i+1}, y_{i+1}) \geqslant 1;$$

То есть, в общем случае,

$$f(x_i, y_i) - f(x_{i+n}, y_{i+n}) \geqslant n. \tag{1}$$

Подставим $i = 0$, $n = f(x_0, y_0)$ в (1), и получим:

$$f(x_0, y_0) - f(x_n, y_n) \geqslant n = f(x_0, y_0).$$

А значит $f(x_n, y_n) \leqslant 0$, что противоречит условию, ведь область значений функции — натуральные числа. □

Теорема 2. *Если область значений ДГФ ограничена сверху и снизу, то эта функция принимает одинаковое значение на всей дискретной плоскости.*

$$E(f) \in [R_1, R_2] \Rightarrow \exists c \mid f(x, y) \equiv c.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию:

$$g(x, y) = f(x, y) - f(x - 1, y). \tag{2}$$

Она будет ограничена, так как она не может принимать значения, по модулю большие, чем $R_2 - R_1$. По принципу суперпозиции она будет гармонической. Рассмотрим последовательность $\{a_i\}$, включающую все значения функции g в любом порядке. Возьмём подпоследовательность $\{b_i\}$ этой последовательности $\{a_i\}$ по следующим правилам:

1. $b_0 = a_0$,

2. Если $\forall j < i \quad a_i > a_j$, то a_i включается в $\{b_i\}$.

Заметим, что полученная подпоследовательность монотонна и ограниченна, а следовательно сходится. Её предел (T) больше любого из её членов, так как она монотонно возрастает, а значит является точной верхней границей. Если $T \neq 0$, то пусть:

$$N = \left\lceil \frac{R_2 - R_1}{T} \right\rceil + 2; \tag{3}$$

$$\varepsilon = \frac{T}{\sum_{i=0}^{N} 4^i}. \tag{4}$$

Тогда рассмотрим значение $f(x_0, y_0)$, лежащее в ε-окрестности T.

Лемма 1. *Если* $f(x_0, y_0) \geqslant T - \varepsilon$, *то* $f(x_0 - 1, y_0) \geqslant T - 4\varepsilon$.

Доказательство. Из формулы гармоничности:

$$f(x_0, y_0) = \frac{f(x_0 - 1, y_0) + f(x_0, y_0 + 1) + f(x_0 + 1, y_0) + f(x_0, y_0 - 1)}{4};$$
$$f(x_0 - 1, y_0) = 4f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 + 1) - f(x_0 + 1, y_0) - f(x_0, y_0 - 1);$$
$$f(x_0 - 1, y_0) \geqslant 4(T - \varepsilon) - f(x_0, y_0 + 1) - f(x_0 + 1, y_0) - f(x_0, y_0 - 1);$$
$$f(x_0 - 1, y_0) \geqslant 4(T - \varepsilon) - 3T = T - 4\varepsilon.$$

□

По лемме, при продвижении влево каждое следующее значение будет иметь максимальное отклонение от T в 4 раза больше, чем предыдущее. То есть:

Координаты	...	$(x_0 - 2, y_0)$	$(x_0 - 1, y_0)$	(x_0, y_0)
Минимальное значение	...	$T - 4^2\varepsilon$	$T - 4\varepsilon$	$T - \varepsilon$

Теперь рассмотрим сумму

$$S = \sum_{i=x_0-N}^{x_0} g(i, y_0). \tag{5}$$

Воспользуемся нижними оценками для $g(x_0 - i, y_0)$, приведенными в таблице:

$$S \geqslant \sum_{i=0}^{N} (T - 4^i\varepsilon) = NT - \varepsilon \sum_{i=1}^{N} 4^i. \tag{6}$$

Подставим значение ε из (4) и N из (3) в (6):

$$S \geqslant R_2 - R_1 + 2T - T = R_2 - R_1 + T > R_2 - R_1. \tag{7}$$

С другой стороны, подставив g из (2) в (5) получим:

$$S = \sum_{i=x_0-N}^{x_0} (f(i, y_0) - f(i - 1, y_0)) = f(x_0, y_0) - f(x_0 - N - 1, y_0). \tag{8}$$

Тогда, из (8) и (7):

$$f(x_0, y_0) - f(x_0 - N - 1, y_0) > R_2 - R_1. \qquad (9)$$

А значит, разница между двумя значениями исходной функции больше, чем $R_1 - R_2$, что противоречит условию. Следовательно предположение ($T \neq 0$) неверно. Проведя аналогичные рассуждения для оставшихся трёх функций разности, получим, что значения функции $f(x, y)$ на всей плоскости одинаковы.

$\square$

Доказанная теорема является дискретным аналогом **теоремы Лиувилля** ([1, Vol. 6. P. 146–151.] и [2, 45, 194-206])

7 ДГФ на ограниченной области

Определение 1. ***Ограниченной областью*** *A называется некоторое конечное множество дискретных (целочисленных) точек, которые могут быть расположены произвольно (связность не обязательна).* ***Границей области*** *P_A называется множество всех дискретных точек таких, что для любого $(x_p, y_p) \in P_A$ соблюдаются условия*

$$\begin{cases} (x_p, y_p) \notin A; \\ \exists (x_a, y_a) \in A : |x_a - x_p| + |y_a - y_p| = 1. \end{cases}$$

Теорема 3. *Если функция гармоническая в ограниченной области, то наибольшее и наименьшее значения она принимает на ее границе.*

Доказательство. Предположим, что наибольшее значение функция принимает в точке (x_0, y_0) не на границе области. Так как значение наибольшее, значения во всех соседних точках меньше или равно $f(x_0, y_0)$. Но их среднее арифметическое равно $f(x, y)$. Следовательно значения функции во всех этих точках равны $f(x_0, y_0)$. Аналогично рассуждая об этих четырех точках и далее, получим, что значение функции в любой точке на ограниченной области равно $f(x_0, y_0)$.А это значит, что максимальное значение принимается, в часности, и на границе, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 4. *Существует не более одной гармонической функции, определённой в заданной ограниченной области с известными значениями на границе.*

Доказательство. Пусть существуют две такие функции — $f(x,y)$ и $g(x,y)$. Тогда рассмотрим функцию $h(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$. Заметим, что на границах она будет принимать значение 0. Но по теореме 3, h принимает максимальные и минимальные значения на границе. Следовательно она принимает значение 0 на всей ограниченной области. □

8 Численные методы в ДГФ

Последняя теорема утверждает, что в заданной ограниченной области существует не более одной ДГФ. Также есть все основания полагать, что такая функция всегда будет ровно одна, этот факт пока принят без доказательства. Таким образом, граничные значения всегда однозначно определяют функцию внутри себя. Достаточно логично попытаться придумать метод, который будет восстанавливать функцию по границе. Начата работа в этом направлении, на данный момент рассматриваются два метода:

- Как говорилось во введении, значение ограниченной ДГФ, определённой на прямой в данной точке, равно вероятности того, что пьяница придёт из этой точки домой. Это может быть расширено на ограниченную ДГФ, определённую на плоскости, с заданными граничными значениями. Значение в каждой не заданной точке (x,y) определяется как математическое ожидание значения в граничной точке, в которую придет подвыпивший человек, если он стартует в точке (x,y). Таким образом построить по граничным значениям ДГФ на плоскости можно **методом Монте-Карло** — многократным запусканием из каждой точки программы, моделирующей человека, ходящего в случайную сторону на один шаг до тех пор, пока он не дойдёт до границы, с последующим занесением в эту точку среднего арифметического результатов всех проходов. Для оптимизации при обрабатывании каждой точки можно считать известными не только значения на границе, но и значения в ранее обработанных точки.

- Другой способ — **метод релаксации**, который заключается в следующем: мы выбираем любые начальные значения в незаданных точках внутри ограниченной области и многократно проходим по всем этим точкам, выбирая среднее арифметическое значений функции в соседних точках в качестве нового значения в каждой точке. Метод также можно оптимизировать, исходя из соображений симметрии.

Начато более детальное изучение этих методов, написаны первые компьютерные программы, о каких-либо результатах говорить пока рано, но это достаточно перспективное направление для дальнейшего изучения.

9 Достигнутые результаты

- Доказаны базовые теоремы для дискретных гармонических функций, в том числе и на ограниченных областях определения;
- Выведен аналог теоремы Лиувилля для дискретных функций (если значения гармонической функции ограниченны сверху и снизу, то она постоянна на всей области определения);
- Начато исследование численных методов поостроения ДГФ.

10 Дальнейшее направление работы

- Доказать или опровергнуть следующие гипотезы:
  1. $f(x, y)$ — ДГФ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}((\frac{\partial f}{\partial x})^{2i} + (\frac{\partial f}{\partial y})^{2i}) \equiv 0$.
  2. $E(f) \in (0, \infty) \Rightarrow \exists c \mid f(x, y) \equiv c$.
- Обосновать методы релаксации и Монте-Карло, оптимизировать программы, анализировать достоинства и недостатки каждого из методов. Попытаться найти другие методы построения ДГФ на ограниченной области с заданной границей.
- Доказать существование ДГФ на ограниченной области с известными значениями на границе.

11 Приложение

Определение 2. *(A) Предположим, что у некоторого эксперимента имеется n равновероятных исходов, и событие X происходит ровно в m из них. Тогда* ***вероятностью*** *события X называется число $P_1(X) := m/n$.*

(B) Теперь предположим, что событие X зависит от последовательности таких экспериментов. Последовательность из T экспериментов имеет n^T возможных исходов. Предположим, что событие X происходит ровно при m_T исходов из них. Тогда ***вероятностью*** *события X называется число $P_T(X) := m_T/n^T$.*

(C) Пусть теперь событие X зависит от бесконечной последовательности таких экспериментов. Мы будем называть число $P(X)$ ***вероятностью*** *события X, если вероятности $P_T(X)$ стремятся к числу $P(X)$ при стремлении T к бесконечности. То, что вероятность $P(X)$ благоприятного исхода существует для рассматриваемой задачи, можно использовать без доказательства.*

(По [3, ч. 1])

Список литературы

[1] Capoulade J. Sur quelques propriétés des fonctions harmoniques et des fonctions préharmoniques, Mathematica (Cluj), 1932.

[2] Heilbronn H. On discrete harmonic functions Proc. Camb. Philos. Soc. 1949

[3] Д. Баранов, М. Скопенков, А. Устинов Случайные блуждания и электрические цепи (материал для подготовки проекта) http://olympiads.mccme.ru/lktg/2010/4/4-1ru.pdf