3-раскрашиваемые графы с запретами на ребрах

И.А.Павлов[1)], К.А.Хадаев[2)]

[1)] Гимназия №6, ул. Вяземская, 4, 630117, Новосибирск; jediananas@yandex.ru
[2)] Гимназия №1, Красный пр., 48, 630091, Новосибирск; khadaev98@gmail.com

Аннотация

В работе рассматриваются правильные раскраски вершин графа цветами из множества $C = \{1, 2, 3\}$, согласованные с системой запретов на ребрах этого графа. Для данного ребра AB отображение $f : \{A, B\} \to C$, где $f(A) \neq f(B)$, назовем *запретом* для этого ребра, если при раскраске вершин графа нельзя одновременно красить вершину A в цвет $f(A)$ и вершину B — в цвет $f(B)$. Граф называется $(3, x)$-раскрашиваемым для некоторого $x \in \mathbb{N}$, если при любом выборе для каждого его ребра множества из x запретов существует раскраска вершин графа в цвета из множества $\{1, 2, 3\}$, не нарушающая ни один из этих запретов. Получено полное описание $(3, x)$-раскрашиваемых графов при каждом значении $x = 2, 3, \dots, 6$. Высказана гипотеза о том, как описывается класс всех $(3, 1)$-раскрашиваемых графов.

Введение

Пусть $G = G(V, E)$ — конечный простой неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E.

Определение 1. *Раскраской вершин* графа G называется любое отображение $c : V \to C$, где C — фиксированное *множество цветов*, т.е. выбор для каждой вершины A ее цвета $c(A) \in C$. Раскраска c называется *правильной* если $c(A) \neq c(B)$ при $AB \in E$, т.е. никакие две смежные вершины графа не окрашены в один и тот же цвет.

Определение 2. Граф называется *k-раскрашиваемым*, если существует правильная раскраска его вершин в k цветов, т.е. такая что $|C| = k$.

Определение 3. Пусть $AB \in E$ — ребро графа G. Отображение $f : \{A, B\} \to C$, где $f(A) \neq f(B)$, назовем *запретом*, для ребра AB, если при раскраске вершин G запрещается одновременно окрашивать вершину A в цвет $f(A)$ и вершину B — в цвет $f(B)$. Пусть $f(A) = X$, $f(B) = Y$. Если для ребра зафиксировано обозначение AB (соответственно, BA), то запрет будем отождествлять с упорядоченной парой цветов (X, Y) (соответственно, (Y, X)).

Определение 4. Будем называть граф *нагруженным*, если для каждого его ребра задано свое множество запретов, где $C = \{1, 2, \dots, k\}$ — множество цветов. Обычные графы будут являться частным случаем нагруженных графов при пустом множестве запретов. Для ребра $e \in E$ нагруженного графа G обозначим через $r(e)$ количество запретов на ребре e. Нагруженный граф G назовем *x-нагруженным*, или *графом с x запретами на ребрах*, если $r(e) = x$ для любого $e \in E$.

Определение 5. *Правильной* (k, x)*-раскраской* x*-нагруженного графа* назовем такую правильную раскраску его вершин цветами из множества $C = \{1, 2, \ldots, k\}$, что на каждом ребре графа не нарушен ни один из x запретов для этого ребра.

Определение 6. Обыкновенный граф G назовем (k, x)*-раскрашиваемым*, если для любого соответствующего ему x-нагруженного графа существует правильная (k, x)-раскраска его вершин.

Нам понадобятся стандартные понятия теории графов: цепи, циклы и деревья (см. [5]). Цепь с n вершинами принято обозначать как P_n, цикл длины n — как C_n.

Основным результатом работы являются следующая теорема, дающая полное описание связных $(3, x)$-раскрашиваемых графов при каждом значении $x = 2, 3, \ldots, 6$:

Теорема. *Пусть* G *— обыкновенный связный граф.*

а) Граф G *является* $(3, 6)$*-раскрашиваемым* $\Leftrightarrow G = P_1$;

б) Если $x \in \{4, 5\}$, *то граф* G *является* $(3, x)$*-раскрашиваемым* $\Leftrightarrow G \in \{P_1, P_2\}$;

в) Если $x \in \{2, 3\}$, *то граф* G *является* $(3, x)$*-раскрашиваемым* $\Leftrightarrow G \in \{P_1, P_2, P_3\}$.

Относительно (3,1)-раскрашиваемых графов мы высказываем следующую гипотезу, черновой вариант доказательства которой имеется у авторов и в настоящее время дорабатывается.

Гипотеза. *Связный граф* G *является (3,1)-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда при последовательном удалении из* G *всех вершин степени 1 получается один из следующих графов:*

1) *одновершинный граф;*

2) *цикл;*

3) *граф вида* G_1 *(рис. 1), причем длина ни одного из циклов не равна* $3n + 1$, $n \in \mathbb{N}$;

4) *граф вида* G_2 *(рис. 1), называемый тэта-графом, для которого выполняется одно из следующих условий:*

а) *длины всех цепей больше 1 и не дают попарно различные остатки при делении на 3;*

б) *одна цепь имеет длину 1, а длины двух других не кратны 3.*

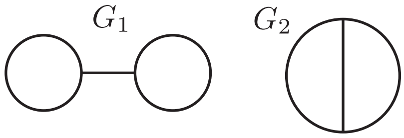

Рисунок 1.

Приведем краткий исторический обзор предшествующих результатов и мотивацию для поставленной нами задачи. Несмотря на то, что исследованная задача об описании графов, раскрашиваемых в три цвета и имеющих запрещенные пары цветов на ребрах, является новой, она естественным образом продолжает классическую тематику предписанных раскрасок графов.

Понятие предписанной раскраски графа впервые возникло в 1976 году у В.Г. Визинга [1] и определялось как раскраска вершин графа с заданными предписаниями (наборами допустимых цветов) в каждой вершине. В 1979 г. вышла известная работа П. Эрдеша, А. Рубина и Х. Тэйлора [2] по предписанному хроматическому числу. В 1994 году К. Томасенном [3] была доказана теорема о предписанной 5-раскрашиваемости планарных графов. Отдельная страница, посвященная раскраскам графов с предписаниями в вершинах, есть в английской Википедии [4].

Наряду с предписанными раскрасками вершин, Е. Диницем, Ф. Галвином, Дж. Каном [5], [6] и другими авторами были определены и изучены предписанные раскраски ребер графов и мультиграфов. Наибольший интерес представляет гипотеза о совпадении обычного и предписанного хроматического индексов графа и подтверждение этой гипотезы Галвином [5] для класса двудольных графов.

Отличие рассмотренной в данной работе задачи от ранее исследованных состоит в том, что красятся вершины графа, однако предписания (запреты) задаются не в его вершинах, а на ребрах. Тем самым введенную нами раскраску в некотором смысле можно назвать “гибридной” по отношению к предписанным раскраскам вершин и ребер.

Раскраска вершин графа с запретами на ребрах естественным образом возникает в следующей прикладной задаче. Пусть вершины графа обозначают работы некоторого проекта, а цвета вершин — работников, выполняющих эти работы. Ребро между вершинами A и B означает связанность соответствующих работ, то есть что работники, выполняющие работы A и B, в процессе их выполнения должны сотрудничать. Тогда запрет (X, Y) на ребре AB означает, что работник X, выполняя работу A, не может сотрудничать с работником Y, выполняющим работу B (в силу несоответствия профессиональных навыков, личных качеств или каких-то других причин). В этом случае существование правильной раскраски с запретами на ребрах означает, что можно назначить работников на все работы (избегая конфликтов и несоответствий) и успешно выполнить проект.

Данную работу можно считать первым шагом на пути исследования общей задачи с предписаниями на ребрах: с произвольным числом цветов, без условия правильности, без фиксации списка цветов, общего для всех вершин графа.

1. Доказательство теоремы

Здесь и далее раскраской будем называть правильную раскраску нагруженного графа с x запретами на ребрах, а k-раскрашиваемым графом — (k, x)-раскрашивамый граф, если из контекста ясно, чему равно x. Основным объектом изучения будут $(3, x)$-раскрашиваемые графы. Будем рассматривать только связные графы, поскольку раскраска и запреты различных компонент связности никак не влияют друг на друга.

Ясно, что для раскраски в 3 цвета определение 5 имеет смысл только при $0 \leq x \leq 6$, поскольку различных запретов на одном ребре не может быть больше 6. При $x = 0$ мы получаем в точности определение обычной правильной 3-раскраски вершин.

Лемма. *В любом связном графе с не менее тремя вершинами есть подграф P_3.*

Доказательство. Если в связном графе есть хотя бы три вершины, то степень хотя бы одной из них не меньше двух, а значит, мы можем выделить подграф P_3. Лемма доказана.

Замечание. Из данных выше определений следует, что если граф G является $(3, x)$-раскрашиваемым, то он является $(3, y)$-раскрашиваемым при любом $0 \leq y < x$.

Доказательство теоремы.

а) Очевидно, что одновершинный граф P_1 является (3,6)-раскрашиваемым. Пусть в графе G есть хотя бы две вершины. В силу связности, это означает, что в нем есть хотя бы одно ребро e. Тогда наложим на это ребро запреты (1,2), (1,3), (2,3), (2,1), (3,1), (3,2). Для соответствующего нагруженного графа не существует раскраски, поскольку мы не сможем покрасить концы ребра e, не нарушив ни одного запрета.

б) Из доказанного утверждения а) и сделанного выше замечания следует, что достаточно доказать (3,5)-раскрашиваемость графа P_2, и доказать, что все связные графы с не менее тремя вершинами не являются (3,4)-раскрашиваемыми.

Если G — это P_2, то хотя бы одной комбинации цветов не будет среди запретов для его единственного ребра, а значит, соответствующий нагруженный граф можно раскрасить. Поэтому граф P_2 (3,5)-раскрашиваем. По замечанию выше он и (3,4)-раскрашиваем.

Если связный граф G содержит по меньшей мере три вершины, то по лемме в нем найдется подграф P_3. Уже следующая система из 4 и 2 запретов показывает, что подграф P_3 и, соответственно, весь граф G не является (3,4)-раскрашиваемым (оставшиеся 2 запрета на ребре справа выбираются произвольно):

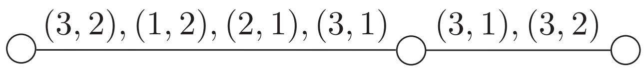

Рисунок 1.

Действительно, поскольку на оба ребра цепи наложены запреты (3,1) и (3,2), то левая и центральная вершина цепи не могут быть окрашены в цвет 3. Значит, концы левого ребра окрашены в какую-то из пар цветов (1,2) или (2,1), но обе эти пары входят в набор запретов для этого ребра.

в) Аналогично случаю б), достаточно доказать (3,3)-раскрашиваемость графа P_3, и не (3,2)-раскрашиваемость связных графов, отличных от P_1, P_2 и P_3.

Докажем, что граф P_3 является (3,3)-раскрашиваемым. Пусть B — средняя вершина P_3. Для каждого ребра рассмотрим цвета, встречающиеся в трех запретах на этом ребре при вершине B не более одного раза. Для каждого ребра таких цветов будет не меньше двух, значит, по принципу Дирихле найдется цвет c, встречающийся в запретах на раскраску вершины B на обоих ребрах не более одного раза. Покрасим вершину B в цвет c. По выбору цвета c крайние вершины цепи можно покрасить хотя бы в один цвет, не нарушая запретов.

Докажем, что не существует связных $(3, 2)$-раскрашиваемых графов, отличных от P_1, P_2, P_3. Предположим от противного, что существует $(3, 2)$-раскрашиваемый граф

$F \notin \{P_1, P_2, P_3\}$. Тогда F по лемме содержит подграф P_3. Так как F связен и $F \neq P_3$, то в F будет как минимум еще одно ребро, создающее цикл C_3, или еще одна вершина D, соединенная хотя бы одним ребром с подграфом P_3. Последнее возможно, когда D соединена ребром с центральной вершиной или с одной из крайних вершин цепи P_3.

Рассмотрим все три варианта подграфов и наложим запреты следующим образом:

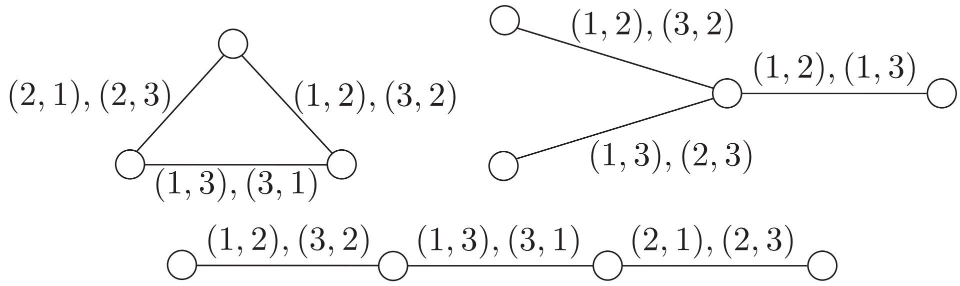

Рисунок 2.

Докажем, что все графы на рисунке 2 с указанными запретами на ребрах не являются раскрашиваемыми. Без учета запретов существует 6 различных правильных раскрасок графа C_3. Так как каждый из 6 запретов на ребрах запрещает одну из этих раскрасок, и любые два запрета запрещают разные раскраски, то ни одна из раскрасок не удовлетворяет всем запретам. Во втором графе для каждого цвета X существует выходящее из центральной вершины A ребро AB_X с запретами $(X, Y), (X, Z)$. Если A покрашена в цвет X, то B_X не может быть покрашена в X из-за правильности, а в цвета Y, Z — из-за запретов. Таким же образом получаем, что ни одна из двух внутренних вершин третьего графа не может быль покрашена в цвет 2. Из-за условия правильности эти вершины должны быть покрашены в цвета 1 и 3, но такие раскраски запрещены на центральном ребре. Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность С.В.Августиновичу за ценные замечания. Работа выполнена под руководством А.Н. Глебова и В.Ю. Губарева.

Литература

[1] Визинг В.Г., Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: сборник научных трудов. Т. 29. Институт математики СО АН СССР: Новосибирск, 1976. С. 3–10.

[2] Erdos P., Rubin A. L., Taylor H., Choosability in graphs // Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Arcata, Congressus Numerantium. 1979. V. 26. P. 125–157.

[3] Thomassen C., Every planar graph is 5-choosable // Journal of Combinatorial Theory. 1994. Series B, V. 62. P. 180–181.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/List_coloring

[5] Galvin F. The list chromatic index of a bipartite multigraph, Journal of Combinatorial Theory, Series B. 1995. 63: 153-158.

[6] Kahn J. Asymptotics of the list chromatic index for multigraphs, Random Structures & Algorithms. 2000. 17 (2): 117-156.

[7] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.

[8] Jensen T. R., Toft B. Graph Coloring Problems, New York: Wiley-Interscience, 1995.

[9] Дистель Р. Теория графов. Пер. с англ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2002. 336 с.